UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Controlabilidade uniforme da fronteira de um sistema semi-discreto aplicado à equação de ondas

Luiz Gutemberg R. Miranda

Belém
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Luiz Gutemberg R. Miranda

Controlabilidade uniforme da fronteira de um sistema semi-discreto aplicado à equação de ondas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Miranda, Luiz Gutemberg Rosario, 1988-
Controlabilidade uniforme da fronteira de um sistema semi-discreto aplicado a equa ção de ondas / Luiz Gutemberg Rosario Miranda. - 2016.

Orientador: Dilberto da Silva Almeida Júnior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2016.

1. Diferenças finitas. 2. Equação de onda. 3. Equação de onda-Controlabilidade. 4. Sequências (Matemática). 5. Sequência biortogonal. I. Título.

CDD 22. ed. 515.62

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Luiz Gutemberg R. Miranda

Controlabilidade uniforme da fronteira de um sistema semi-discreto aplicado à equação de ondas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 08 de Abril de 2016
Conceito: Aprovado.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Dilberto da Siva Almeida Júnior - Orientador
UFPA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
UFPA

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
PPGME

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
UFPA Salínas

Dedicatória

Ao meu Deus,
Meus pais Luis Antônio e Ana Maria,
Minha esposa Débora
Minhas filhas Anna Lara e Ana Luiza.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida e a pela oportunidade de estar conseguindo convergir para o tão sonhado mestrado e futuramente o doutorado, a todos que con tribuíram para o sucesso deste trabalho, em especial, destaco Luis Antonio Mescouto Miranda e Ana Maria Mescouto do Rosário que nunca deixaram eu perder o foco nas horas mais difíceis, a minha esposa Débora Mescouto Miranda pelos momentos de amor e compreensão, A minha avó (mãezinha) que sempre me acompanhou nessa grande jornada, a todos os meus familiares e amigos da Vila do Treme Bragança, a todos os colegas do GPAMN (Grupo de Pesquisa de Análise Matemática e Numérica) e principalmente ao meu orientador Dilberto da Silva Almeida Junior pela sua paciência em me orientar e vontade de repassar sua vasta experiência matemática. A todos vocês, meu imenso obrigado.

Resumo

Mostramos nesta dissertação a existência de uma sequência biortogonal em $L^2(-T,T)$ para uma família de exponenciais complexas do tipo $(e^{i\lambda_j t})_{\substack{|j|\leq N \\ j\neq 0}}$ onde $(i\lambda_j)_{\substack{|j|\leq N \\ j\neq 0}}$ é um conjunto de autovalores do sistema homogêneo da equação da onda discretizada por diferenças finitas e estimamos sua norma. Além disso, mostramos que dado uma sequência biortogonal, a sua última componente, isto é, a componente N, tem crescimento exponencial. Com a existência dessa sequência biortogonal conseguimos explicitar um funcional controle $v_h(t)$ na fronteira para uma solução u do sistema semi-discreto por diferenças finitas.

Palavras-chave: Diferenças Finitas, sequência biortogonal, controle.

Abstract

we show in this dissertation the existence of a sequence biorthogonal in $L^2(-T,T)$ for a family of complex exponentials of type $(e^{i\lambda_j t})_{\substack{|j|\leq N\\ j\neq 0}}$ where $(i\lambda_j)_{\substack{|j|\leq N\\ j\neq 0}}$ is a set of eigenvalues of the homogeneous sistem of wave equation discretized by finite difference and we estimate its norm. Moreover, we show that given a biorthogonal sequence, its last component, i.e, the component N, has growth exponential. With the existence of this biorthogonal sequence we could explicit a functional control $v_h(t)$ on the boundary for a solution u of sistem semi-discrete by finite difference.

Key Words: Finite Difference, Biorthogonal Sequence, Control.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Controlar oscilações em problemas traduzidos em termos de uma equação diferencial parcial de evolução, (equação da onda, por exemplo) têm despertado o interesse de muitos pesquisadores nos últimos anos. O problema de controlabilidade, pode ser expresso de maneira geral da seguinte forma: consideramos um sistema a controlar, sobre o qual podemos atuar mediante um mecanismo dado na fronteira, ou em uma parte interior do sistema. Dado um $T > 0$, o problema de controlabilidade consiste em estudar a possibilidade de conduzir o sistema ao estado de equilíbrio.

Muitos trabalhos, usam como objeto de suas análises as pequenas vibrações de uma corda de comprimento unitário, estas são representadas pela clássica equação da onda unidimensional, no contexto do contínuo ou discreto. A fim de mostrar a importância do estudo do contole para o sistema de ondas no contexto do contínuo é considerado o seguinte sistema;

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, && (1.1)\\ u(t,0) = 0, \quad u(t,1) &= v(t), \quad t > 0, && (1.2)\\ u(0,x) = u^0(x), \quad u_t(0,x) &= u^1(t), \quad x \in (0,1). && (1.3) \end{aligned}$$

O sistema $(1.1) - (1.3)$ está bem posto mediante à escolhas adequadas dos dados iniciais (u^0, u^1) e da condição de fronteira v. Por exemplo, para todo $T > 0$, o sistema $(1.1) - (1.3)$ está bem posto quando $(u^0, u^1) \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ e $v \in L^2(0,T)$, isto é, existe uma solução $u \in \mathcal{C}\left([0,T]; H_0^1(0,1)\right) \bigcap \mathcal{C}^1\left([0,T]; L^2(0,1)\right)$

Quando $v = 0$, temos o sistema homogêneo correspondente ao sistema $(1.1) - (1.3)$ dado por

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= 0, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, && (1.4)\\ w(t,0) = 0, \quad w(t,1) &= 0, \quad t > 0, && (1.5)\\ w(0,x) = w^0(x), \quad w_t(0,x) &= w^1(t), \quad x \in (0,1), && (1.6) \end{aligned}$$

a energia de suas soluções é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 |w_x|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |w_t|^2 dx, \tag{1.7}$$

onde

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0, \qquad \forall\ t > 0,$$

portanto, a energia é conservativa, isto é

$$E(t) = E(0) \geq 0, \qquad \forall\ t > 0.$$

Esta lei de conservação implica, em particular, que uma solução do sistema sem controle, onde os dados iniciais não é o trivial, ou seja, $(w^0, w^1) \neq (0,0)$ nunca alcança o estado de equilíbrio, a saber

$$(w(x,t), w_t(x,t)) \neq (0,0) \qquad \forall\ t > 0.$$

Este fato, motiva o estudo da controlabilidade exata do sistema $(1.1) - (1.3)$. Neste caso, o problema de controlabilidade exata consiste em verificar para quais condições iniciais do sistema $(1.1) - (1.3)$ é possível selecionar um funcional controle $v \in L^2(0,T)$ de modo que o sistema alcance a posição de equilíbrio $(0,0)$ depois de um tempo T.

Assim, foi obtido o seguinte problema de contole na fronteira relacionado a equação da onda unidimensional : Dados $T > 2$ e $(u^0, u^1) \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ existe uma função controle $v \in L^2(0,T)$ tal que a solução u do sistema

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, & (1.8)\\ u(t,0) = 0, \quad u(t,1) &= v(t), \quad t > 0, & (1.9)\\ u(0,x) = u^0(x), \quad u_t(0,x) &= u^1(t), \quad x \in (0,1), & (1.10) \end{aligned}$$

satisfaz

$$u(T,\cdot) = u'(T,\cdot) = 0.$$

Este resultado pode ser demonstrado diretamente utilizando a Fórmula de D'Alembert, também demonstra-se usando a Teoria do Momento e mais recentemente usa-se o Método HUM (Hilbert Uniqueness Method) (ver [10],[13]).

Agora, observando no contexto semi-discreto, temos a versão onde o sistema (1.8) é semi-discretizado por Diferenças Finitas, que é dado da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} &= 0; \quad j = 1,2,...,N, & (1.11)\\ u_0(t) = 0; u_{N+1}(t) &= v_h(t), \quad t > 0, & (1.12)\\ u_j(0) = u_j^0; u_j'(0) &= u_j^1, \quad j = 1,2,...,N, & (1.13) \end{aligned}$$

onde h é o tamanho da malha.

Quando $v_h = 0$, o sistema homogêneo correspondente ao sistema $(1.11) - (1.13)$ é dado por

$$\begin{aligned} w_j''(t) - \frac{w_{j+1}(t) - 2w_j(t) + w_{j-1}(t)}{h^2} &= 0, \quad j = 1, 2, ..., N, && (1.14) \\ w_0(t) = 0; w_{N+1}(t) &= 0, \quad t > 0, && (1.15) \\ w_j(0) = w_j^0; w_j'(0) &= w_j^1, \quad j = 1, 2, ..., N, && (1.16) \end{aligned}$$

A energia de suas soluções é dada por

$$E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N} \left[\left| \frac{w_{j+1}(t) - w_j(t)}{h} \right|^2 + \left| w_j'(t) \right|^2 \right], \tag{1.17}$$

e que

$$\frac{d}{dt} E_h(t) = 0 \qquad \forall t > 0, \tag{1.18}$$

assim, a energia $E_h(t)$ é conservativa, logo

$$E_h(t) = E_h(0) \ \ \forall \ \ t > 0. \tag{1.19}$$

Consequentemente, também há uma motivação para estudar o problema de controlabilidade do sistema semi-discreto $(1.11) - (1.13)$. Neste contexto, Infante e Zuazua (1999) em [10] mostraram que este não é observável em todo o conjunto solução do sistema, desse modo, temos que um sistema é observável se, e somente se, é controlável, portanto, o sistema é controlável somente em uma subclasse de soluções, chamada de soluções filtradas, a fim de simplificar a linguagem, todas as vezes que nos referirmos ao controle de uma solução dos sistemas mencionados, esta por sua vez, é uma solução filtrada. Logo, temos o seguinte problema de controle: Dados $T > 0$ e $\left(u_j^0, u_j^1\right)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$ existe o funcional controle $v_h \in L^2(0, T)$ tal que a solução u do sistema $(1.11) - (1.13)$, satisfaz

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0, j = 1, 2, \cdots, N.$$

Nesta dissertação, não nos preocupamos em mostrar em qual subclasse de soluções o sistema semi-discreto é controlável, mais centralizamos os nossos estudos, para exibirmos um funcional controle v_h para as soluções filtradas do sistema $(1.11) - (1.13)$ em função de uma sequência biortogonal para uma família de exponenciais complexas $(e^{i\lambda_n t})_{\substack{|n| \leq N \\ n \neq 0}}$ em $L^2(-T, T)$, onde $(i\lambda_n)_{\substack{|n| \leq N \\ n \neq 0}}$ é um conjunto de autovalores do sistema $(2.5) - (2.7)$. Negreanu M. em 2003 ([15]) faz uma construção do controle, no entanto, o método é muito sofisticado. Faremos nesta dissertação uma releitura de uma parte do artigo *Uniform boundary controllability* *off a semi-dicrete* $1-d$ *wave equation* de Sorin Micu(2001) (ver [14]), pois, percebemos a simplicidade do método, onde as ferramentas principais são relações trigonométricas e alguns conhecimentos de análise complexa.

No segundo capítulo, relatamos alguns resultados preliminares para o sistema semi-discreto adjunto homogêneo correspondente ao sistema $(1.11)-(1.13)$, citamos a definição de sequência biortogonal e alguns resultados de análise complexa.

No terceiro capítulo, mostramos a existência de uma sequência biortogonal para uma família de exponenciais complexas, e estimamos a sua norma em $L^2(-T,T)$.

Por fim, no quarto capítulo, traremos o resultados de controlabilidade do sistema semi-discreto $(1.11)-(1.13)$.

Capítulo 2

Semi-discretização em diferenças finitas

Inicialmente, estudaremos algumas propriedades do sistema homogêneo associado ao sistema $(1.1)-(1.3)$, num contexto semi-discreto. Relembrando, temos que o sistema homogêneo no contínuo é dado por

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= 0, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, && (2.1)\\ w(t,0) = 0, \quad w(t,1) &= 0, \quad t > 0, && (2.2)\\ w(0,x) = w^0(x), \quad w_t(0,x) &= w^1(t), \quad x \in (0,1). && (2.3) \end{aligned}$$

2.1 Semi-discretização do sistema homogêneo

Essas semi-discretizações ocorrem somente na variável espacial x sendo o tempo t contínuo, baseamos as aproximações para as derivadas de segunda ordem pelo polinômio de Taylor. Dessa forma, Dado $N \in \mathbb{N}$ e $h = 1/(N+1)$ introduzimos a seguinte partição regular de malha

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_j = jh < ... < x_N < x_{N+1} = 1, \tag{2.4}$$

com $j = 0, 1, 2, ..., N+1$. Em seguida, introduzimos a seguinte semi-discretização em diferenças finitas do sistema $(2.1)-(2.3)$

$$\begin{aligned} w_j''(t) - \frac{w_{j+1}(t) - 2w_j(t) + w_{j-1}(t)}{h^2} &= 0, \quad j = 1, 2, ..., N, && (2.5)\\ w_0(t) = 0; w_{N+1}(t) &= 0, \quad t > 0, && (2.6)\\ w_j(0) = w_j^0; w_j'(0) &= w_j^1, \quad j = 1, 2, ..., N, && (2.7) \end{aligned}$$

onde denotamos por (') e ("), respectivamente, a derivação de (1^{a}) e (2^{a}) ordem no tempo. O sistema $(2.5)-(2.7)$ é um sistema de N equações diferenciais lineares com N incógnitas $w_1, w_2, ..., w_N$, uma vez que, $w_0 = w_{N+1} = 0$. Obviamente $w_j = w_j(t)$ é a aproximação para $w(x_j, t)$ sendo w solução do sistema $(2.1)-(2.3)$, desde que os dados iniciais (w_j^0, w_j^1), para $j = 0, 1, 2, ..., N+1$ sejam aproximações dos dados iniciais (2.2).

2.2 Formas matriciais

Apartir do momento que nos deparamos com sistemas algébricos, para simplificar a notação do sistema, sempre procuramos deixa-lo sob a forma matricial. Além disso, consideramos os vários resultados que temos para as matrizes. Assim, denotando por $W(t) = (w_1(t), w_2(t), \cdots, w_N(t))^T$, o sistema homogêneo pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} W''(t) + A_h W(t) &= 0, \quad j = 1, 2, ..., N, && (2.8)\\ W(0) = W^0; W'(0) &= W^1, \quad t > 0, && (2.9) \end{aligned}$$

onde A_h é uma matriz quadrada de ordem N tal que

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

e $W^0 = \left(w_j^0\right)_{1 \leq j \leq N}$ e $W^1 = \left(w_j^1\right)_{1 \leq j \leq N}$. Notamos que podemos simplificar ainda mais o sistema $(2.8) - (2.9)$, reduzido a derivada de 2ª ordem para 1ª ordem.

Sejam $a = W$ e $b = W'$, obtemos que

$$a' = W' = b \quad \textbf{e} \quad b' = W'' = -A_h W = -A_h a,$$

logo,

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -A_h & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -A_h & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix}.$$

Agora, denotamos $Z(t) = (W(t), W'(t))^T$, obtemos um sistema equivalente ao sistema $(2.5) - (2.7)$ dado por

$$\begin{aligned} Z'(t) + L_h Z(t) &= 0, \quad t > 0, && (2.11)\\ Z(0) = Z^0 &= \left(W^0, W^1\right)^T, && (2.12) \end{aligned}$$

onde

$$L_h = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_h & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

2.3 Análise espectral

Vamos considerar o seguinte problema de autovalores associado as equações do sistema (2.5)−(2.7),

$$-\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} = \theta\varphi_j, \quad j = 1, 2, ..., N, \tag{2.14}$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_{N+1}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

denotamos por $\theta_1(h), \theta_2(h), \cdots, \theta_N(h)$ os N autovalores tais que

$$0 < \theta_1(h) < \theta_2(h) < \cdots < \theta_N(h). \tag{2.16}$$

Esses autovalores podem ser calculados explicitamente tal como realizado por Isaakson e Keller em [11]. Tem-se então que,

$$\theta_k(h) = \frac{4}{h^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k\pi h}{2}\right); k = 1, 2, \cdots, N. \tag{2.17}$$

Os autovetores $\varphi^k = (\varphi_1^k, \varphi_2^k, \cdots, \varphi_N^k)$ associados aos autovalores $\theta_k(h)$ que também podem ser calculados, são

$$\varphi_j^k = \mathrm{sen}\,(k\pi jh); \quad j, k = 1, 2, \cdots, N. \tag{2.18}$$

As soluções do sistema $(2.6) - (2.7)$ admitem um desenvolvimento de Fourier sobre a base dos autovalores e autovetores. Mais precisamente, cada solução $w = (w_1, w_2, \cdots, w_N)$ de $(2.6) - (2.7)$ pode ser escrita como,

$$w(x_j, t) = \sum_{k=1}^{N}\left[a_k \cos\left(\sqrt{\theta_k(h)t}\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\theta_k(h)t}\right)\right]\varphi_j^k, \tag{2.19}$$

onde os coeficientes $a_k,\ b_k \in R$ podem ser calculados explicitamente em termos dos dados iniciais de $(2.5) - (2.7)$.

Portanto, os autovalores de A_h são da forma $\theta_k = \dfrac{4}{h^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{k\pi h}{2}\right)$ que correspondem aos autovetores $\varphi^k = (\,\mathrm{sen}\ (k\pi jh))_{1\leq j\leq N}$.

Agora, daremos ênfase para análise espectral do operador L_h, estes têm alta relevância em todos os nossos estudos.

Teorema 2.3.1 *Os autovalores e autovetores da matriz L_h em* (2.11) *são dados, respectivamente, por*

$$\sigma_k = i\lambda_k, \quad \textbf{onde} \quad \lambda_k = \frac{2}{h}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right) \quad |k| \leq N, \quad k \neq 0, \tag{2.20}$$

e

$$\Phi^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\lambda_k}\varphi^k \\ -\varphi^k \end{pmatrix}, \quad |k| \leq N, \quad k \neq 0. \tag{2.21}$$

Demonstração: Vamos considerar o seguinte problema de autovalor associado ao sistema (2.11).

$$D_h\Phi \quad = \quad \sigma\Phi, \tag{2.22}$$

seja $\Phi = (x, y)$. Assim,

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

logo, obtemos o seguinte sistema

$$-y = \sigma x \Rightarrow x = \frac{-y}{\sigma}, \tag{2.24}$$
$$A_h x = \sigma y. \tag{2.25}$$

Substituindo (2.24) em (2.25), obtemos

$$A_h(-y) = -\sigma^2(-y). \tag{2.26}$$

assim, para $\sigma \neq 0$, temos que $-y = \varphi^k$, consequentemente, $-\sigma_k^2 = \theta_k$, logo

$$y = -\varphi^k, \quad \textbf{e} \quad x = \frac{1}{\sigma_k}\varphi^k, \tag{2.27}$$

onde

$$\sigma_k \quad = \quad \sqrt{-\theta_k} = i\frac{2}{h}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right) \quad |k| \leq N, \quad k \neq 0.$$

■

Agora, usamos a Desenvolvimento de Fourier das soluções do sistema (2.5) – (2.7) em termos dos autovalores e autovetores do operador L_h. Assim, se $Z^0 = (W^0, W^1)$ é tal que

$$Z^0 = \sum_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0}} a_n^0 \Phi^n(h), \tag{2.28}$$

então a solução correspondente, $Z(t)$, é

$$Z(t) = \sum_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0}} a_n^0 e^{i\lambda_n t}\Phi^n(h).$$

2.4 Análise complexa

Nesta seção apresentamos alguns teoremas clássicos da análise complexa.

Definição 2.4.1 *Seja f uma definida nos complexos. Dizemos que f é holomorfa no ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ quando $f'(z_0)$ existe. Se f é holomorfa em todo plano complexo dizemos que f é uma função inteira.*

Definição 2.4.2 *Seja f uma definida nos complexos. Dizemos que f é uma função do tipo exponencial em $B > 0$, quando existe uma constante $A > 0$, tal que*

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|} \qquad \forall \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Teorema 2.4.1 *Teorema de Paley-Wiener Seja uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ do tipo exponencial em B. Existe uma função $\widehat{f} \in L^2(-A, A)$ com suporte compacto e*

$$f(z) = \int_{-T}^{T} \Theta_m(t) e^{izt} dt,$$

se, e somente se, f é uma função inteira. Neste caso, temos que$\widehat{f}$ é a transformada de Fourier.

Teorema 2.4.2 *Teorema de Plancherel Existe uma isometria linear Ψ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$univocamente determinada pela condição*

$$\Psi f = \widehat{f}.$$

(ver [16] e [19])

Capítulo 3

Sequência biortogonal

Neste capítulo, mostraremos a existência de uma sequência biortogonal $(\Theta_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$ para uma família de exponenciais complexas do tipo $(e^{i\lambda_j t})_{\substack{|j|\leq N\\ j\neq 0}}$, onde $(i\lambda_j)_{\substack{|j|\leq N\\ j\neq 0}}$ é o conjunto de autovalores do sistema (2.6) $-$ (2.7), isto é $\lambda_k = \frac{2}{h}\operatorname{sen}(\frac{k\pi h}{2})$, porconseguinte, exibiremos uma estimativa superior para $\|\Theta_m\|_{L^2(-T,T)}$ e uma estimativa inferior para $\|\Psi_N\|_{L^2(-T,T)}$, onde $(\Psi_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$ é uma sequência biortogonal qualquer para uma família de exponenciais complexas do tipo $(e^{i\lambda_j t})_{\substack{|j|\leq N\\ j\neq 0}}$ em $L^2(-T,T)$.

Definição 3.0.1 *Dizemos que* $(\Theta_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$ *é uma sequência biortogonal para uma família de exponenciais complexas* $(e^{i\lambda_n t})_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0}}$ *em* $L^2(-T,T)$*, se*

$$\int_{-T}^{T}\Theta_m(t)e^{i\lambda_n t}dt = \delta_{mn} = \begin{cases} 0; & m\neq n\\ 1; & m=n\end{cases}$$

$\forall\ \ |m|\leq N,\ \forall |n|\leq N$ *e* $m,n\neq 0.$

ver [6]

3.1 Teorema de existência

No próximo Teorema temos como finalidade, verificarmos a existência de uma sequência biortogonal $(\Theta_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$, para isso, usaremos fortemente o Teorema de Paley-Wiener, um dos teoremas clássicos da análise complexa.

Teorema 3.1.1 *Se* $T>0$ *é suficientemente grande, então existe uma sequência* $(\Theta_m)_{|m|\leq N m\neq 0}$ *biortogonal em* $L^2(-T,T)$ *de uma família de exponênciais complexas* $(e^{i\lambda_j t})_{\substack{|j|\leq N\\ j\neq 0}}$*, onde,* $\lambda_k = \frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)$.

Demonstração: Primeiramente vamos definir, para cada $|m| \leq N$ e $m \neq 0$, a função

$$\xi_m(z) = \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{z-\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(z-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(z-\lambda_m)}{4}} \right)^{2}$$

Para cada função ξ_m valem as seguintes propriedades:

1. ξ_m é uma função inteira;

   Entende-se por função inteira, uma função que é diferenciável em todo o plano complexo, logo, é facil ver que $\left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,\pm m}} \frac{z-\lambda_n}{\lambda_m-\lambda_n}\right)$ é inteira, além disso se uma função $f(z)$ é inteira e z_0 é uma de suas raizes então $\frac{f(z)}{z-z_0}$ tambem é uma função inteira. Assim, λ_m é uma raiz da função inteira sen $(a(z-\lambda_m))$, logo, $\frac{\operatorname{sen}(a(z-\lambda_m))}{a(z-\lambda_m)}$ é inteira. Portanto, ξ_m é inteira, pois o produto de funções inteiras também é uma função inteira.

2. $\xi_m(\lambda_n) = \delta_{nm}, \forall |n| \leq N, n \neq 0$;

   De fato, pois, seja $n_0 \neq m$, temos que

$$\begin{aligned}
\xi_m(\lambda_{n_0}) &= \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{\lambda_{n_0}-\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(\lambda_{n_0}-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(\lambda_{n_0}-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(\lambda_{n_0}-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(\lambda_{n_0}-\lambda_m)}{4}} \right)^{2} \\
&= \left(\frac{\lambda_{n_0}-\lambda_{n_0}}{\lambda_m-\lambda_{n_0}} \right) \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m,n_0}} \frac{\lambda_{n_0}-\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(\lambda_{n_0}-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(\lambda_{n_0}-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(\lambda_{n_0}-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(\lambda_{n_0}-\lambda_m)}{4}} \right)^{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

   Por outro lado, temos que

$$\lim_{z\to\lambda_m} \xi_m(z) = \lim_{z\to\lambda_m} \left[\left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{z-\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(z-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(z-\lambda_m)}{4}} \right)^{2} \right],$$

   logo

$$\begin{aligned}
\xi_m(\lambda_m) &= \lim_{z\to\lambda_m} \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{z-\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} \right) \lim_{z\to\lambda_m} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(z-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \lim_{z\to\lambda_m} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(z-\lambda_m)}{4}} \right)^{2} \\
&= \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{\lambda_m-\lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n} \right) \lim_{z\to\lambda_m} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(z-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \lim_{z\to\lambda_m} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(z-\lambda_m)}{4}} \right)^{2},
\end{aligned}$$

como

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

tem-se que

$$\xi_m(\lambda_m) = 1,$$

portanto, $\xi_m(\lambda_n) = \delta_{mn}, \forall |n| \leq N$ com $n \neq 0$.

Além disso, temos outras duas propriedades, a saber:

3. $\xi_m(x) \in L^2(-\infty, \infty)$;
4. $\xi_m(z)$ é do tipo exponencial para quase todo T, isto é, $\exists A_m > 0$, tal que

$$|\xi_m(z)| \leq A_m e^{T|Z|} \quad ; \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

As demonstrações das duas últimas propriedades são extremamente trabalhosas, por isso, para não perdermos o foco da demonstração do Teorema atual, aceitaremos sua veracidade. Estas por sua vez, serão demonstradas posteriormente sob a forma de Lemas, mais especificamente, os lemas (3.1.5) e (4.1.2), respectivamente.

Agora, introduziremos a transformada de fourier de ξ_m, dada por

$$\Theta_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_m(x) e^{-ixt} dx.$$

Vamos mostrar que $(\Theta_m)_{\substack{|m| \leq N \\ m \neq 0}}$ é a sequência biortogonal que procuramos. Com efeito, como a função $\xi_m(z)$ é inteira do tipo exponencial para quase todo T e $\xi_m(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, pelo Teorema de Paley-Wieiner (ver [19]), tem-se que, $\Theta_m(t)$ tem suporte compacto em $[-T, T]$, $\Theta_m(t) \in L^2(-T, T)$ e além disso,

$$\int_{-T}^{T} \Theta_m(t) e^{ixt} dt = \xi_m(x),$$

Pela propriedade (2), temos

$$\int_{-T}^{T} \Theta_m(t) e^{i\lambda_n t} dx = \delta_{mn}; \quad \forall \ \ m, n = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N.$$

Isto garante que a sequência $(\Theta_m)_{\substack{|m| \leq N \\ m \neq 0}}$ é biortogonal à família de exponenciais complexas $(e^{i\lambda_j t})_{\substack{|j| \leq N \\ j \neq 0}}$.

■

Agora, passaremos as demonstrações das duas últimas propriedades. Primeiramente, vamos mostrar que $\xi_m(x) \in L^2(-\infty,\infty)$, para isso, alguns lemas preliminares serão demonstrados. Temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_m| &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{x-\lambda_n}{\lambda_m-\lambda_n} \right) \left(\frac{\sin \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\sin \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right)^{2} \right|^2 dx \\
&= \prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{1}{|\lambda_m-\lambda_n|^2} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} x-\lambda_n \right) \left(\frac{\sin \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right)^{4N} \left(\frac{\sin \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right)^{4} \right| dx \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Lema 3.1.2 *Defindo*

$$\gamma_1(N) = \prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{1}{|\lambda_m-\lambda_n|^2} \qquad (3.2)$$

Tem-se que:

1. $\gamma_1(N) \prod_{\substack{|k|\leq N \\ k\neq 0,m}} |\lambda_k|^2 = \cos^4\left(\frac{m\pi h}{2}\right)$;

2. $\gamma_1(N) \leq \dfrac{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right) \text{ sen } \left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|^2}{h^2 2^{4N-2}(N!)^4}$;

Demonstração: Provemos 1. Notemos que

$$|\lambda_m-\lambda_n| = |\lambda_n-\lambda_m| = \frac{2}{h}\left| \text{sen}\left(\frac{n\pi h}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{m\pi h}{2}\right) \right| = \frac{4}{h}\left| \text{sen}\left(\frac{n-m}{4}\pi h\right) \cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right) \right|,$$

logo

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} |\lambda_m-\lambda_n| &= \prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{4}{h}\left| \text{sen}\left(\frac{n-m}{4}\pi h\right) \cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right) \right| \\
&= \frac{4^{2N-1}}{h^{2N-1}} \prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \left| \text{sen}\left(\frac{n-m}{4}\pi h\right) \right| \prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \left| \cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right) \right| \\
&= \frac{4^{2N-1}}{h^{2N-1}} P_1 P_2, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

onde,

$$P_1 = \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{n-m}{4}\pi h\right)\right|, \qquad P_2 = \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right|.$$

Se $1 \leq m \leq N$, tem-se que

$$P_1 = \prod_{-N\leq n\leq -1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{n-m}{4}\pi h\right)\right| \prod_{1\leq n\leq m-1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{n-m}{4}\pi h\right)\right| \prod_{m+1\leq n\leq N} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{n-m}{4}\pi h\right)\right|$$

fazendo $K = n - m$, tem-se que $n = k + m$. Logo,

$$\begin{aligned}
P_1 &= \prod_{-N\leq k+m\leq -1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{1\leq k+m\leq m-1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{m+1\leq k+m\leq N} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \\
&= \prod_{-N-m\leq k\leq -(m+1)} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{1-m\leq k\leq -1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{1\leq k\leq N-m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \\
&= \prod_{-N-m\leq k\leq -N-1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{-N\leq k\leq -(m+1)} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{1-m\leq k\leq -1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \times \\
&\times \prod_{1\leq k\leq N-m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right|
\end{aligned}$$

observemos que $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{-k\pi h}{4}\right)\right|$, logo,

$$\begin{aligned}
P_1 &= \prod_{N+1\leq k\leq N+m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{m+1\leq k\leq N} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{1\leq k\leq m-1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \times \\
&\times \prod_{1\leq k\leq N-m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \\
&= \prod_{N+1\leq k\leq N+m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{\substack{1\leq k\leq N\\ k\neq m}} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{1\leq k\leq N-m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \\
&= \prod_{\substack{1\leq k\leq N\\ k\neq m}} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{1\leq k\leq N-m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{N+1-m\leq k\leq N} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k+m}{4}\pi h\right)\right|
\end{aligned}$$

Além disso,

$$P_2 = \prod_{-N\leq n\leq -(m+1)} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \prod_{-m\leq n\leq -1} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \times$$

$$
\begin{aligned}
&\times \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\ne m}} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \prod_{-N\le n\le -(m+1)} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \prod_{-m\le n\le -1} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \times \\
&\times \prod_{1\le n\le N} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \prod_{-N\le n\le -(m+1)} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \prod_{-m\le n\le -1} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \times \\
&\times \prod_{1\le n\le N-m} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \prod_{N-m+1\le n\le N} \left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right|
\end{aligned}
$$

fazendo $k = m + n$ tem-se que $n = k - m$, logo,

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \prod_{-N\le k-m\le -(m+1)} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{-m\le k-m\le -1} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \times \\
&\times \prod_{1\le k-m\le N-m} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{N-m+1\le k-m\le N} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \prod_{-N+m\le k\le -1} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{0\le k\le m-1} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{m+1\le k\le N} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \times \\
&\times \prod_{N+1\le k\le N+m} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \prod_{\substack{0\le k\le N\\ k\ne m}} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{-N+m\le k\le -1} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{N+1\le k\le N+m} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right|
\end{aligned}
$$

sabemos que $\left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{-k\pi h}{4}\right)\right|$ e $\cos(0) = 1$, assim,

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \prod_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne m}} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \prod_{1\le k\le N-m} \left|\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \times \\
&\times \prod_{N-m+1\le k\le N} \left|\cos\left(\frac{k+m}{4}\pi h\right)\right|
\end{aligned}
$$

resultando em

$$
\begin{aligned}
P_1 \cdot P_2 &= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \prod_{\substack{1\le k\le N\\ k\neq m}} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\cos(\frac{k\pi h}{4})\right| \prod_{1\le k\le N-m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\cos\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\right| \times \\
&\times \prod_{N+1-m\le k\le N} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k+m}{4}\pi h\right)\cos\left(\frac{k+m}{4}\pi h\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m}{2}\pi h\right)\right|} \prod_{\substack{1\le k\le N\\ k\neq m}} \left|\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \prod_{1\le k\le N-m} \left|\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \times \\
&\times \prod_{N+1-m\le k\le N} \left|\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{k+m}{2}\pi h\right)\right| \\
&= \frac{1}{2^{2N-1}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \prod_{\substack{1\le k\le N\\ k\neq m}} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \prod_{1\le k\le N-m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \times \\
&\times \prod_{N+1-m\le k\le N} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k+m}{2}\pi h\right)\right|. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Observamos agora que

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=N+1-m}^{N} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k+m}{2}\pi h\right)\right| &= \prod_{N+1\le k\le N+m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \\
&= \prod_{1\le k\le m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k+N}{2}\pi h\right)\right| \\
&= \prod_{1\le k\le m} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\cos\left(\frac{N\pi h}{2}\right) + \cos\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{2}\right)\right| \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

por hipótese, $h = \dfrac{1}{N+1}$, logo, $Nh = 1-h$, resultando que

$$
\cos\left(\frac{N\pi h}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{2}\right),
$$

e

$$
\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi h}{2}\right).
$$

Assim, substituindo 3.6 e 3.6 em 3.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
\prod_{N+1-m\le k\le N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k+m}{2}\pi h\right)\right| &= \prod_{1\le k\le m}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{2}\right)+\cos\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\right| \\
&= \prod_{1\le k\le m}\left|\cos\left(\frac{k-1}{2}\pi h\right)\right| \\
&= \prod_{0\le k\le m-1}\left|\cos\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{1\le k\le m}\left|\cos\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{-m\le k\le -1}\left|\cos\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{N-m\le k\le N-1}\left|\cos\left(\frac{k-N}{2}\pi h\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \\
&\times \prod_{k=N-m}^{N-1}\left|\cos\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\cos\left(\frac{N\pi h}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|} \\
&\times \prod_{N-m\le k\le N-1}\left|\cos\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{k=N-m}^{N-1}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k+1}{2}\pi h\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{N+1-m\le k\le N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

substituindo (3.6) em (3.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
P_1\cdot P_2 &= \frac{1}{2^{2N-1}\left|\cos^2\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{\substack{1\le k\le N\\ k\ne m}}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|\prod_{1\le k\le N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2^{2N-1}\left|\cos^2\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\ \operatorname{sen}\ \left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{1\le k\le N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2N-2}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|\left|2\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{1\leq k\leq N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{2^{2N-2}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(m\pi h\right)\right|}\prod_{1\leq k\leq N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Análogamente, se $-N \leq m \leq -1$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
P_1 \cdot P_2 &= \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{n-m}{4}\pi h\right)\right|\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\cos\left(\frac{n+m}{4}\pi h\right)\right| \\
&= \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{-(-n+m)}{4}\pi h\right)\right|\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\cos\left(\frac{-(-n-m)}{4}\pi h\right)\right| \\
&= \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{-n+m}{4}\pi h\right)\right|\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\cos\left(\frac{-n-m}{4}\pi h\right)\right| \\
&= \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{-n-(-m)}{4}\pi h\right)\right|\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\cos\left(\frac{-n+(-m)}{4}\pi h\right)\right| \\
&= \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,-m}}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{n-(-m)}{4}\pi h\right)\right|\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,-m}}\left|\cos\left(\frac{n+(-m)}{4}\pi h\right)\right|.
\end{aligned}
$$

agora, como $1 \leq -m \leq N$ resulta que

$$
\begin{aligned}
P_1 \cdot P_2 &= \frac{1}{2^{2N-2}\left|\cos\left(\frac{-m\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(-m\pi h\right)\right|}\prod_{1\leq k\leq N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{2^{2N-2}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(m\pi h\right)\right|}\prod_{1\leq k\leq N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2.
\end{aligned}
$$

Segue-se que qualquer que seja $|m| \leq N$, com $m \neq 0$ tem-se

$$
P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2^{2N-2}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(m\pi h\right)\right|}\prod_{1\leq k\leq N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2, \qquad (3.8)
$$

Consequentemente, substituindo 3.8 em 3.3, obtemos

$$
\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}|\lambda_m - \lambda_n| = \frac{2^{2N}}{h^{2N-1}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(m\pi h\right)\right|^2}\prod_{1\leq k\leq N}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2, \qquad (3.9)
$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} |\lambda_m-\lambda_n| &= \frac{2^{2N}}{h^{2N-1}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\ \text{sen}\ (m\pi h)\right|}\prod_{1\leq k\leq N}\left|\text{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2\\
&= \frac{2\,\text{sen}\left(\frac{m\pi h}{2}\right)}{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\ \text{sen}\ (m\pi h)\right|}\prod_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0,m}}\frac{2}{h}\left|\text{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|\\
&= \frac{1}{\left|\cos^2\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|}\prod_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0,m}}|\lambda_k|, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

logo

$$\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} |\lambda_m-\lambda_n|^2 = \frac{1}{\cos^4\left(\frac{m\pi h}{2}\right)}\prod_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0,m}}|\lambda_k|^2,$$

assim,

$$\gamma_1(N)=\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\frac{1}{|\lambda_m-\lambda_n|^2} = \cos^4\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\prod_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0,m}}\frac{1}{|\lambda_k|^2}.$$

Portanto

$$\gamma_1(N)\prod_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0,m}}|\lambda_k|^2=\cos^4\left(\frac{m\pi h}{2}\right). \qquad (3.11)$$

o que encerra a prova de 1.

Agora provemos 2. Para provar a desigualdade, tomamos a equação (3.9) e notemos que, sendo a função $f(x)=\frac{\text{sen}\,(x)}{x}$ deccrescente no intervalo $[0,\pi]$, temos que

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\leq\frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)}{\frac{k\pi h}{2}} \quad\Rightarrow \frac{2}{\pi}\leq\frac{2}{k\pi h}\,\text{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\quad\Rightarrow kh\leq\ \text{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right),$$

logo,

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} |\lambda_m-\lambda_n| &= \frac{2^{2N}}{h^{2N-1}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\text{sen}\left(m\pi h\right)\right|}\prod_{1\leq k\leq N}\left|\text{sen}\left(\frac{k\pi h}{2}\right)\right|^2\\
&\geq \frac{2^{2N}}{h^{2N-1}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\text{sen}\left(m\pi h\right)\right|}\prod_{1\leq k\leq N}|kh|^2\\
&\geq \frac{2^N(N!)^2}{h^{-1}\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\text{sen}\left(m\pi h\right)\right|}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\gamma_1(N) = \prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{1}{|\lambda_m - \lambda_n|^2} \leq \frac{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right) \operatorname{sen}\left(m\pi h\right)\right|^2}{h^2 2^{4N}(N!)^4} \tag{3.12}$$

Assim, finalizamos a demonstração.

■

Seja agora a integral

$$\gamma_2(N) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} x-\lambda_n \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right)^{2} \right|^2 dx. \tag{3.13}$$

Se $0 < \delta < 1$ é um número positivo sub-unitário temos que $\gamma_2(N) = I_1 + I_2$, onde

$$I_1 = \int_{|x-\lambda_m|\leq \delta N\pi} \left| \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} x-\lambda_n \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right)^{2} \right|^2 dx, \tag{3.14}$$

e

$$I_2 = \int_{|x-\lambda_m|\geq \delta N\pi} \left| \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} x-\lambda_n \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right)^{2} \right|^2 dx, \tag{3.15}$$

Vamos estimar cada uma das duas integrais. Para a segunda integral temos

Lema 3.1.3 *Para $T > 0$ suficientemente grande com independência de N, tem-se que existe uma constante $C_1 > 0$, com não dependência de N, talque*

$$\gamma_1(N) I_2 \leq C_1. \tag{3.16}$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|x-\lambda_m|\geq \delta N\pi} \left| \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} x-\lambda_n \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right)^{4N} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right)^{4} \right| dx \\
&= \int_{|x-\lambda_m|\geq \delta N\pi} \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} |x-\lambda_n|^2 \right) \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right|^{4N} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^{4} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{|x-\lambda_m|\geq\delta N\pi}\left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}|x-\lambda_n|^2\right)\frac{1}{\left|\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right|^{4N}}dx\\
&= \int_{|x-\lambda_m|\geq\delta N\pi}\left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}|x-\lambda_n|^2\right)\left|\frac{4N}{T(x-\lambda_m)}\right|^{4N}dx\\
&= \frac{(4N)^{4N}}{T^{4N}}\int_{|x-\lambda_m|\geq\delta N\pi}\left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}|x-\lambda_n|^2\right)\frac{1}{|x-\lambda_m|^{4N-2}}\cdot\frac{1}{|x-\lambda_m|^2}dx\\
&= \frac{(4N)^{4N}}{T^{4N}}\int_{|x-\lambda_m|\geq\delta N\pi}\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\frac{x-\lambda_n}{x-\lambda_m}\right|^2\frac{1}{|x-\lambda_m|^2}dx, \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

para x tal que $|x-\lambda_m|\geq\delta N\pi$, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x-\lambda_n}{x-\lambda_m}\right| &\leq \left|\frac{x-\lambda_m+\lambda_m-\lambda_n}{x-\lambda_m}\right| \leq \frac{|x-\lambda_m|+|\lambda_m-\lambda_n|}{|x-\lambda_m|} \leq 1+\frac{|\lambda_m|+|\lambda_n|}{|x-\lambda_m|} \leq\\
\leq\ 1+\frac{\left|\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right|+\left|\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\right|}{\delta N\pi} &\leq 1+\frac{|m\pi|+|n\pi|}{\delta N\pi}\leq 1+\frac{2N\pi}{\delta N\pi}\leq 1+\frac{2}{\delta},
\end{aligned}
$$

segue-se que

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{(4N)^{4N}}{T^{4N}}\int_{|x-\lambda_m|\geq\delta N\pi}\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^2\frac{1}{|x-\lambda_m|^2}dx\\
&\leq \frac{(4N)^{4N}}{T^{4N}}\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{4N-2}\int_{|x-\lambda_m|\geq\delta N\pi}\frac{1}{|x-\lambda_m|^2}dx, \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

vamos estudar a integral. Fazendo $u=x-\lambda_m$ tem-se que $\frac{du}{dx}=1$, segue-se que

$$
\int_{|x-\lambda_m|\geq\delta N\pi}\frac{1}{|x-\lambda_m|^2}dx=\int_{|u|\geq\delta N\pi}\frac{1}{|u|^2}du=2\int_{\delta N\pi}^{+\infty}\frac{1}{u^2}du=2\left[-\frac{1}{u}\Big|_{\delta N\pi}^{+\infty}\right]=\frac{2}{\delta N\pi},
$$

substituindo 3.19 em 3.18, resulta que

$$
I_2 \leq \frac{2(4N)^{4N}}{\delta N\pi T^{4N}}\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{4N-2}. \qquad (3.19)
$$

Portanto, usando a segunda estimativa do Lema 3.1.2 e também usando a Fórmula de Stirling (ver [3]), segue-se que

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(N)I_2 &\leq \frac{\left|\cos\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(m\pi h\right)\right|^2}{h^2 2^{4N-2}(N!)^4}\frac{2(4N)^{4N}}{\delta N\pi T^{4N}}\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{4N-2} \\
&\leq \frac{|m\pi h|^2}{h^2 2^{4N-2}\left(\sqrt{2N\pi}\left(\frac{N}{e}\right)^N\right)^4}\frac{2(4N)^{4N}}{\delta N\pi T^{4N}}\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{4N-2} \\
&\leq \frac{e^{4N}2^{4N}}{\delta T^{4N}}\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{4N-2} \\
&\leq \frac{e^{4N}2^{4N}}{\delta T^{4N}}\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)^{4N-2} \\
&\leq \frac{e^{4N}2^{4N}}{\delta T^{4N}}\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)^{4N}\left(\frac{\delta}{\delta+2}\right)^{2} \\
&\leq \frac{e^{4N}2^{4N}}{T^{4N}}\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)^{4N}\frac{\delta}{(\delta+2)^2} \\
&\leq \frac{e^{4N}2^{4N}}{T^{4N}}\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)^{4N} \\
&\leq \left[\frac{2e\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)}{T}\right]^{4N}.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Portanto, tomando $T \geq 2e\left(\frac{\delta+2}{\delta}\right)$, observamos que T não depende de N e tem-se que existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$\gamma_1(N)I_2 \;\leq\; C_1,$$

finalizando a demonstração.

∎

As estimativas da primeira integral são mais trabalhosa. Seja observado primeiro que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi}\left|\left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} x-\lambda_n\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right)^{2N}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right)^{2}\right|^2 dx \\
&= \int_{|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi}\left|\left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} x-\lambda_n\right)\right|^2\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N}\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^{4} dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} |\lambda_n|^2\right) \times \\
&\times \int_{|x-\lambda_m|\leq \delta N\pi} \left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right|^2\right) \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N} \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^{4} dx. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Vamos denotar por I_3 a integral

$$
I_3 = \int_{|x-\lambda_m|\leq \delta N\pi} \left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right|^2\right) \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N} \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^{4} dx.
$$

Segue-se que

Lema 3.1.4 *Para $T > 0$ suficientemente grande com não dependencia de N, tem-se que existem duas constantes $C_2 > 0$ e $C_3 > 0$ que independem de N, talque*

$$
I_3 \leq \left(C_2|\lambda_m|^2 + C_3\right) e^{\left(\frac{\alpha|\lambda_m|^2}{N}\right)}. \qquad (3.22)
$$

Demonstração: vamos considerar os casos $|m| \leq \delta N$ e $|m| \geq \delta N$.

Caso I: $|m| \leq \delta N$

Nós trabalharemos primeiro com o termo $\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N}$. Seja primeiro observado que, existe $a > \pi^2$ tal que

$$
\frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 - \frac{1}{a}x^2, \qquad \forall |x| < \pi. \qquad (3.23)
$$

Pela desigualdade (3.23) segue-se que, para $\left|\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right| < \pi$, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N} \leq \left(1 - \frac{1}{a}\left(\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right)^2\right)^{4N} &= e^{\ln\left(1 - \frac{1}{a}\left(\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right)^2\right)^{4N}} \\
&= e^{4N\ln\left(1 - \frac{1}{a}\left(\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right)^2\right)} \\
&\leq e^{4N\left(-\frac{1}{a}\left(\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right)^2\right)} \\
&\leq e^{\left(-\frac{T^2(x-\lambda_m)^2}{4aN}\right)}, \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

temos que

$$\left|\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right| < \pi \quad \Rightarrow \quad |x-\lambda_m| < \frac{4N\pi}{T}.$$

Assim, de (3.24) e (3.25) resulta que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N} \leq e^{\left(-\dfrac{T^2(x-\lambda_m)^2}{4aN}\right)}, \quad \textbf{se} \quad |x-\lambda_m| < \frac{4N\pi}{T}. \tag{3.25}$$

Por outro lado, se $\left|\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right| \geq \pi$, segue-se que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N} \leq \frac{1}{\left|\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right|^{4N}} \leq \frac{1}{\pi^{4N}} \leq e^{\ln\left(\frac{1}{\pi^{4N}}\right)} \leq e^{\ln(1)-\ln(\pi^{4N})} \leq e^{-4N\ln(\pi)}, \tag{3.26}$$

temos que

$$\left|\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}\right| \geq \pi \quad \Rightarrow \quad |x-\lambda_m| \geq \frac{4N\pi}{T}.$$

Assim, de (3.26) e (3.27) resulta que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N} \leq e^{-4N\ln(\pi)}, \quad \textbf{se} \quad |x-\lambda_m| \geq \frac{4N\pi}{T}. \tag{3.27}$$

Passaremos agora a estimar o produto $\prod\limits_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\dfrac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right|$. Como $\lambda_n = -\lambda_{-n}$ temos que

$$\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right|^2 = \frac{|x-\lambda_{-m}|}{|\lambda_{-m}|} \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,\pm m}} \left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right| = \frac{|x+\lambda_m|}{|\lambda_m|} \prod_{\substack{n=1\\ n\neq |m|}}^{N} \left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right|.$$

Observamos agora que

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\neq |m|}}^{N} \left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| = \tag{3.28}$$

$$= \begin{cases} \left|\frac{x^2-\lambda_{N+1-|m|}^2}{\lambda_{N+1-|m|}^2}\right| \prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq |m|}}^{\frac{N}{2}} \left|\dfrac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| \left|\dfrac{x^2-\lambda_{N+1-n}^2}{\lambda_{N+1-n}^2}\right|, & \textbf{se } N \textbf{ par} \\ \left|\frac{x^2-\lambda_{N+1-|m|}^2}{\lambda_{N+1-|m|}^2}\right| \left|\frac{x^2-\lambda_{(N+1)/2}}{\lambda_{(N+1)2}}\right| \prod\limits_{\substack{n=1\\ n\neq |m|}}^{(N-1)/2} \left|\dfrac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| \left|\dfrac{x^2-\lambda_{N+1-n}^2}{\lambda_{N+1-n}^2}\right|, & \textbf{se } N \textbf{ impar} \end{cases} \tag{3.29}$$

Desde que $|x-\lambda_m| \leq \delta N\pi$, usando a segunda desigualdade triangular temos que

$$|x| \;\leq\; \delta N\pi + |\lambda_m| \leq \delta N\pi + \left|\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi h}{2}\right)\right| \leq \delta N\pi + |m|\pi \leq \delta N\pi + \delta N\pi \leq 2\delta N\pi,$$

e, para $N \geq |j| \geq \frac{N}{2}$, temos que

$$|\lambda_j| = \left|\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{2}{h}\frac{j\pi h}{2}\right| = |j|\pi = N\pi,$$

e

$$|\lambda_j| = \left|\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{2}\right)\right| \geq \left|\frac{2}{h}jh\right| = 2\,|j| \geq 2\frac{N}{2} = N \geq \frac{N}{2},$$

isto é, para $\frac{N}{2} \leq |j| \leq N$ tem-se $\frac{N}{2} \leq |\lambda_j| \leq N\pi$. Além disso, como $|m| \leq \delta N$ e $0<\delta<1$ é um número sub-unitário, tem se que $|m| \leq \frac{N}{2}$, logo,$|N+1-|m|| \geq \frac{N}{2}$. Daí segue-se

$$\begin{aligned}\max\left\{\left|\frac{x^2-\lambda^2_{N+1-|m|}}{\lambda^2_{N+1-|m|}}\right|, \left|\frac{x^2-\lambda_{(N+1)/2}}{\lambda_{(N+1)2}}\right|\right\} \;&\leq\; \max\left\{\frac{|x^2|+|\lambda^2_{N+1-|m|}|}{|\lambda^2_{N+1-|m|}|}, \frac{|x^2|+|\lambda_{(N+1)/2}|}{|\lambda_{(N+1)2}|}\right\}\\ &\leq\; \frac{(2\delta\pi N)^2+(N\pi)^2}{(\frac{N}{2})^2} \leq 4\pi^2(4\delta^2+1) \leq 20\pi^2.\end{aligned}$$

Além disso, se x é tal que $|x| \leq 2\delta N\pi$, logo,

$$\frac{|x|^2h^2}{4} \leq \frac{(2\delta N\pi)^2h^2}{4} = (\delta N\pi)^2h^2 = \left(\frac{\delta N\pi}{N+1}\right)^2 \leq (\delta\pi)^2, \tag{3.30}$$

se tomarmos $\delta < \frac{1}{4\pi}$, temos que

$$\frac{|x|^2h^2}{4} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 \implies \frac{|x|h}{2} \leq \frac{1}{4}, \tag{3.31}$$

assim, existe $z \in \mathbb{R}$ não negativo tal que $\operatorname{sen}\left(\frac{z\pi h}{2}\right) = \frac{|x|h}{2}$ segue-se que $\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{z\pi h}{2}\right) = |x|$ portanto,

$$x^2 = \frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\Big(\frac{z\pi h}{2}\Big). \tag{3.32}$$

Tomando $p \in \mathbb{N}$ com $p=[z]$, temos que $p \leq z < p+1$ e

$$4p^2 \leq 4z^2 = \frac{4}{h^2}z^2h^2 \leq \frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\Big(\frac{z\pi h}{2}\Big) = x^2 \leq \frac{N^2}{4},$$

logo,

$$4p^2 \leq \frac{N^2}{4} \quad \Rightarrow \quad p \leq \frac{N}{4},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{N}\left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| &\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right|\left|\frac{x^2-\lambda_{N+1-n}^2}{\lambda_{N+1-n}^2}\right| \\
&\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{x^2-\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}{\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\right|\left|\frac{x^2-\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{N+1-n}{2}\pi h\right)}{\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{N+1-n}{2}\pi h\right)}\right| \\
&\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{x^2-\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}{\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\right|\left|\frac{x^2-\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi h}{2}\right)}{\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi h}{2}\right)}\right| \\
&\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{x^2-\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}{\frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\right|\left|\frac{x^2-\frac{4}{h^2}\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}{\frac{4}{h^2}\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\right| \\
&\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{x^4-\frac{4}{h^2}x^2+\frac{4^2}{h^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}{\frac{4^2}{h^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\right|,
\end{aligned}$$

usando a igualdade (3.32), segue

$$\begin{aligned}
&\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{\frac{4^2}{h^4}\operatorname{sen}^4\left(\frac{z\pi h}{2}\right)-\frac{4^2}{h^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{z\pi h}{2}\right)+\frac{4^2}{h^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}{\frac{4^2}{h^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\right| \\
&\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{z\pi h}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{z\pi h}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\right| \\
&\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{z\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{z\pi h}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\right| \\
&\leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left|\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(n\pi h)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(z\pi h)}{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(n\pi h)}\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \quad (20\pi^2)^2 \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \left| \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi h) - \operatorname{sen}^2(z\pi h)}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \right| .$$

Se $p > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{n=1 \\ n\neq|m|}}^{N} \left| \frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2} \right| \quad &\leq \quad (20\pi^2)^2 \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq|m|}}^{p} \left(\frac{\operatorname{sen}^2(z\pi h) - \operatorname{sen}^2(n\pi h)}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \right) \times \\
&\times \quad \prod_{\substack{n=p+1 \\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \left(\frac{\operatorname{sen}^2(n\pi h) - \operatorname{sen}^2(z\pi h)}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \right) \\
&\leq \quad (20\pi^2)^2 \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq|m|}}^{p} \left(\frac{\operatorname{sen}^2[(p+1)\pi h] - \operatorname{sen}^2(n\pi h)}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \right) \times \\
&\times \quad \prod_{\substack{n=p+1 \\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \left(\frac{\operatorname{sen}^2(n\pi h) - \operatorname{sen}^2(p\pi h)}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \right) \\
&\leq \quad (20\pi^2)^2 \times \\
&\times \quad \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq|m|}}^{p} \frac{(\operatorname{sen}[(p+1)\pi h] - \operatorname{sen}(n\pi h))(\operatorname{sen}[(p+1)\pi h] + \operatorname{sen}(n\pi h))}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \times \\
&\times \quad \prod_{\substack{n=p+1 \\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{(\operatorname{sen}(n\pi h) - \operatorname{sen}(p\pi h))(\operatorname{sen}(n\pi h) + \operatorname{sen}(p\pi h))}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \\
&\leq \quad (20\pi^2)^2 \times \\
&\times \quad \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq|m|}}^{p} \frac{4 \operatorname{sen}\left[\frac{(p+1-n)}{2}\pi h\right] \cos\left[\frac{(p+1+n)}{2}\pi h\right] \operatorname{sen}\left[\frac{(p+1+n)}{2}\pi h\right] \cos\left[\frac{(p+1-n)}{2}\pi h\right]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \times \\
&\times \quad \prod_{\substack{n=p+1 \\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]} 4 \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(n-p)}{2}\pi h\right] \cos\left[\frac{(n+p)}{2}\pi h\right] \operatorname{sen}\left[\frac{(n+p)}{2}\pi h\right] \cos\left[\frac{(n-p)}{2}\pi h\right]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \\
&\leq \quad (20\pi^2)^2 \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq|m|}}^{p} \frac{\operatorname{sen}\,[(p+1-n)\pi h] \operatorname{sen}\,[(p+1+n)\pi h]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \times
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{\substack{n=p+1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{\operatorname{sen}\,[(n-p)\pi h]\,\operatorname{sen}\,[(n+p)\pi h]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)}.$$

Se $|m| \leq p$ temos que $0 \leq p-|m|$,logo

$$\operatorname{sen}[(p+1+|m|)\pi h] \geq \operatorname{sen}[(p+|m|)\pi h] = |\operatorname{sen}[(p+|m|)\pi h]|\,,$$

e

$$\operatorname{sen}[(p+1-|m|)\pi h] \geq \operatorname{sen}[(p-|m|)\pi h] = |\operatorname{sen}[(p-|m|)\pi h]|\,.$$

Caso $|m| \geq p$ temos que $|m|-p \geq 0$, logo

$$\operatorname{sen}[(|m|+p)\pi h] = |\operatorname{sen}[(p+|m|)\pi h]|\,,$$

e

$$\operatorname{sen}[(|m|-p)\pi h] = |\operatorname{sen}[(|m|-p)\pi h]| = |-\operatorname{sen}[(p-|m|)\pi h]| = |\operatorname{sen}[(p-|m|)\pi h]|\,.$$

Notamos também que $p, |m| \in \mathbb{N}$, logo, $|p-|m|| \geq 1$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{N} \left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| &\leq (20\pi^2)^2 \frac{\operatorname{sen}^2(|m|\pi h)}{|\operatorname{sen}[(p-|m|)\pi h]\operatorname{sen}[(p+|m|)\pi h]|} \times \\
&\times \prod_{n=1}^{p} \frac{\operatorname{sen}\,[(p+1-n)\pi h]\,\operatorname{sen}\,[(p+1+n)\pi h]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \times \\
&\times \prod_{n=p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{\operatorname{sen}\,[(n-p)\pi h]\,\operatorname{sen}\,[(n+p)\pi h]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \\
&\leq (20\pi^2)^2 \frac{\operatorname{sen}(|m|\pi h)}{\operatorname{sen}[\pi h]} \prod_{n=1}^{p} \frac{\operatorname{sen}\,[(p+1-n)\pi h]\,\operatorname{sen}\,[(p+1+n)\pi h]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \times \\
&\times \prod_{n=p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{\operatorname{sen}\,[(n-p)\pi h]\,\operatorname{sen}\,[(n+p)\pi h]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \\
&\leq (20\pi^2)^2 \frac{(|m|\pi h)}{\pi h} \prod_{n=1}^{p} \frac{\operatorname{sen}\,[(p+1-n)\pi h]\,\operatorname{sen}\,[(p+1+n)\pi h]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)} \times \\
&\times \prod_{n=p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{\operatorname{sen}\,[(n-p)\pi h]\,\operatorname{sen}\,[(n+p)\pi h]}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (20\pi^2)^2|m|\prod_{n=1}^{p}\frac{\text{sen }[(p+1-n)\pi h]\text{ sen }[(p+1+n)\pi h]}{\text{sen}^2(n\pi h)}\times\\
&\times \prod_{n=p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{\text{sen }[(n-p)\pi h]\text{ sen }[(n+p)\pi h]}{\text{sen}^2(n\pi h)}\\
&\leq 400\pi^4|m|\prod_{n=1}^{p}\frac{\text{sen }[(p+1-n)\pi h]\text{ sen }[(p+1+n)\pi h]}{\text{sen}^2(n\pi h)}\times\\
&\times \prod_{n=p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{\text{sen }[(n-p)\pi h]\text{ sen }[(n+p)\pi h]}{\text{sen}^2(n\pi h)}.
\end{aligned}
$$

Seja

$$
\begin{aligned}
\omega &= \prod_{n=1}^{p}\text{sen }[(p+1-n)\pi h]\text{ sen }[(p+1+n)\pi h]\times\\
&\times \prod_{n=p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\text{sen }[(n-p)\pi h]\text{ sen }[(n+p)\pi h]\\
&= \prod_{1\leq n\leq p}\text{sen }[(p+1-n)\pi h]\prod_{1\leq n\leq p}\text{sen }[(p+1+n)\pi h]\times\\
&\times \prod_{p+1\leq n\leq\left[\frac{N}{2}\right]}\text{sen }[(n-p)\pi h]\prod_{p+1\leq n\leq\frac{N}{2}}\text{sen }[(n+p)\pi h],
\end{aligned}
$$

fazendo, $k=p+1-n$ tem-se que $n=p+1-k$; $k=p+1+n$ tem-se que $n=k-(p+1)$; $k=n-p$ tem-se que $n=k+p$; $k=n+p$ tem-se que $n=k-p$.

$$
\begin{aligned}
\omega &= \prod_{1\leq p+1-k\leq p}\text{sen }(k\pi h)\prod_{1\leq k-(p+1)\leq p}\text{sen }(k\pi h)\prod_{p+1\leq k+p\leq\left[\frac{N}{2}\right]}\text{sen }(k\pi h)\prod_{p+1\leq k-p\leq\left[\frac{N}{2}\right]}\text{sen }(k\pi h)\\
&= \prod_{-p\leq -k\leq -1}\text{sen }(k\pi h)\prod_{p+2\leq k\leq 2p+1}\text{sen }(k\pi h)\prod_{1\leq k\leq\left[\frac{N}{2}\right]-p}\text{sen }(k\pi h)\prod_{2p+1\leq k\leq\left[\frac{N}{2}\right]+p}\text{sen }(k\pi h)\\
&= \prod_{1\leq k\leq p}\text{sen }(k\pi h)\prod_{p+2\leq k\leq 2p+1}\text{sen }(k\pi h)\prod_{1\leq k\leq\left[\frac{N}{2}\right]-p}\text{sen }(k\pi h)\prod_{2p+1\leq k\leq\left[\frac{N}{2}\right]+p}\text{sen }(k\pi h)\\
&= \frac{1}{\text{sen }[(p+1)\pi h]}\prod_{1\leq k\leq p+1}\text{sen }(k\pi h)\prod_{p+2\leq k\leq 2p+1}\text{sen }(k\pi h)\prod_{1\leq k\leq\left[\frac{N}{2}\right]-p}\text{sen }(k\pi h)\times\\
&\times \text{sen }[(2p+1)\pi h]\prod_{2p+2\leq k-p\leq\left[\frac{N}{2}\right]+p}\text{sen }(k\pi h)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\text{sen}\,[(2p+1)\pi h]}{\text{sen}\,[(p+1)\pi h]} \prod_{1\le k\le\left[\frac{N}{2}\right]} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{1\le k\le\left[\frac{N}{2}\right]-p} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{\left[\frac{N}{2}\right]+1\le k\le\left[\frac{N}{2}\right]+p} \text{sen}\,(k\pi h),$$

como, $p \le \frac{N}{4}$ temos que $0 \le (2p+1)\pi h \le \left(\frac{N}{2}+1\right)\pi h = \left(\frac{N+2}{2(N+1)}\right)\pi \le \pi$, analogamente, $0 \le (p+1)\pi h \le \pi$, como a função $f(x) = \frac{\text{sen}\,x}{x}$ é descrescente em $[0,\pi]$, temos que

$$\frac{\text{sen}\,[(2p+1)\pi h]}{\text{sen}\,[(p+1)\pi h]} \le \frac{(2p+1)\pi h}{(p+1)\pi h},$$

logo

$$\begin{aligned}
\omega &\le \frac{(2p+1)\pi h}{(p+1)\pi h} \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-p} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]+p} \text{sen}\,(k\pi h) \\
&= \frac{2(p+1)}{(p+1)} \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-p} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]+p} \text{sen}\,(k\pi h) \\
&\le 2\prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-p} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]+p} \text{sen}\,(k\pi h),
\end{aligned}$$

segue-se que

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{N} \left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| &\le 800\pi^4|m| \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-p} \text{sen}\,(k\pi h) \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]+p} \text{sen}\,(k\pi h)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \text{sen}^{\,2}(k\pi h)} \\
&\le 800\pi^4|m| \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{1}{\text{sen}\,(k\pi h)} \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]+p} \text{sen}\,(k\pi h) \\
&\le 800\pi^4|m| \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{1}{\text{sen}\,(k\pi h)} \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \text{sen}\,[(k+p)\pi h] \\
&\le 800\pi^4|m| \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{\text{sen}\,[(k+p)\pi h]}{\text{sen}\,(k\pi h)}.
\end{aligned}$$

Notemos que $0 \leq (k+p)\pi h \leq (\frac{N}{2}+\frac{N}{4})\pi h \leq \frac{3N}{4}\pi h = \frac{3N}{4}\pi \frac{1}{N+1} \leq \pi$. Segue-se que

$$\frac{\operatorname{sen}[(k+p)\pi h]}{(k+p)\pi h} \leq \frac{\operatorname{sen}(k\pi h)}{k\pi h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}[(k+p)\pi h]}{\operatorname{sen}(k\pi h)} \leq \frac{k+p}{k},$$

assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{N} \left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| &\leq 800\pi^4|m| \prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{k+p}{k} \\
&\leq 800\pi^4|m| e^{\left(\ln\left(\prod_{k=\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{k+p}{k}\right)\right)} \\
&\leq 800\pi^4|m| e^{\left(\sum_{k=\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \ln\left(1+\frac{p}{k}\right)\right)} \\
&\leq 800\pi^4|m| e^{\left(\sum_{k=\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{p}{k}\right)} \\
&\leq 800\pi^4|m| e^{\left(\int_{\frac{N}{2}-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{p}{y}dy\right)} \\
&\leq 800\pi^4|m| e^{\left(\int_{\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]+1} \frac{p}{y}dy\right)} \\
&\leq 800\pi^4|m| e^{\left(p\left[\ln y\Big|_{\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}\right]\right)} \\
&\leq 800\pi^4|m| e^{\left(p\ln\left(\frac{\left[\frac{N}{2}\right]+1}{\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}\right)\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 800\pi^4|m|e^{\left(p\ln\left(\frac{\left[\frac{N}{2}\right]-p+1+p}{\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}\right)\right)} \\
&\leq 800\pi^4|m|e^{\left(p\ln\left(1+\frac{p}{\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}\right)\right)} \\
&\leq 800\pi^4|m|e^{\left(\frac{p^2}{\left[\frac{N}{2}\right]-p+1}\right)},
\end{aligned}$$

como $p \leq \frac{N}{4}$ e $x^2 = \frac{4}{h^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{z\pi h}{2}\right) \geq \frac{4}{h^2}(zh)^2 = 4z^2 \geq 4p^2 \geq p^2$, temos

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{N}\left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| \leq 800\pi^4|m|e^{\left(\frac{p^2}{\frac{N}{2}-\frac{N}{4}}\right)} \leq 800\pi^4|m|e^{\left(\frac{4p^2}{N}\right)} \leq 800\pi^4|m|e^{\left(\frac{4x^2}{N}\right)}.$$

Se $p=0$, temos que

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{N}\left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| \leq (20\pi^2)^2\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left(\frac{\operatorname{sen}^2(n\pi h)-\operatorname{sen}^2(z\pi h)}{\operatorname{sen}^2(n\pi h)}\right) \leq 800\pi^4,$$

como $|m|\geq 1$ e $e^c \geq 1$ se $c\geq 0$, temos que

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\neq|m|}}^{N}\left|\frac{x^2-\lambda_n^2}{\lambda_n^2}\right| \leq 800\pi^4|m|e^{\left(\frac{4x^2}{N}\right)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right| \leq 800\pi^4|m|\frac{|x+\lambda_m|}{|\lambda_m|}e^{\left(\frac{4x^2}{N}\right)} &\leq 800\pi^4|m|\frac{|x+\lambda_m|}{2|m|}e^{\left(\frac{4x^2}{N}\right)} \\
&\leq 400\pi^4\,|x+\lambda_m|\,e^{\left(\frac{4x^2}{N}\right)}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Agora, temos

$$I_3 = \int_{\frac{4N\pi}{T}\leq|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi}\left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}\left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right|^2\right)\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N}\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^4 dx +$$

$$+ \int_{|x-\lambda_m \leq \frac{4N\pi}{T}} \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \left| \frac{x-\lambda_n}{\lambda_n} \right|^2 \right) \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right|^{4N} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx. \tag{3.34}$$

Seja

$$\beta_1 = \int_{|x-\lambda_m \leq \frac{4N\pi}{T}} \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \left| \frac{x-\lambda_n}{\lambda_n} \right|^2 \right) \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}} \right|^{4N} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx.$$

Pelas equações (3.25) e (3.33), temos

$$\begin{aligned}
\beta_1 \leq\ & \left(400\pi^4\right)^2 \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} |x+\lambda_m|^2\, e^{\left(\frac{8x^2}{N}\right)} e^{\left(-\frac{T^2(x-\lambda_m)^2}{4aN}\right)} \times \\
\times\ & \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
\leq\ & \left(400\pi^4\right)^2 \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} |x+\lambda_m|^2\, e^{\left(\frac{8x^2+8(x-2\lambda_m)^2}{N}\right)} e^{\left(-\frac{T^2(x-\lambda_m)^2}{4aN}\right)} \times \\
\times\ & \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
\leq\ & \left(400\pi^4\right)^2 \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} |x+\lambda_m|^2\, e^{\left(\frac{16x^2-32x\lambda_m+32\lambda_m^2}{N}\right)} e^{\left(-\frac{T^2(x-\lambda_m)^2}{4aN}\right)} \times \\
\times\ & \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
\leq\ & \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} |x+\lambda_m|^2\, e^{\left(\frac{16x^2-32x\lambda_m+16\lambda_m^2}{N}\right)} e^{\left(-\frac{T^2(x-\lambda_m)^2}{4aN}\right)} \times \\
\times\ & \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
\leq\ & \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} |x+\lambda_m|^2\, e^{\left(\frac{16(x-\lambda_m)^2}{N}\right)} e^{\left(-\frac{T^2(x-\lambda_m)^2}{4aN}\right)} \times
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times \quad \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
& \leq \quad \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} |x+\lambda_m|^2 \, e^{\left(16 - \dfrac{T^2}{4a}\right)\left[\dfrac{(x-\lambda_m)^2}{N}\right]} \times \\
& \times \quad \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx. \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

Assim, para $T \geq 8\sqrt{a}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\beta_1 & \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} |x+\lambda_m|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} (|x-\lambda_m| + 2|\lambda_m|)^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} \left(|x-\lambda_m|^2 + 4|x-\lambda_m||\lambda_m| + 4\lambda_m^2\right) \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} \left(3|x-\lambda_m|^2 + 6|\lambda_m|^2\right) \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|x-\lambda_m|\leq \frac{4N\pi}{T}} \left(3|x-\lambda_m|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 + 6|\lambda_m|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 \right) dx,
\end{aligned}
$$

fazendo $u = x - \lambda_m$ temos que $du = dx$, logo,

$$
\begin{aligned}
\beta_1 & \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{|u|\leq \frac{4N\pi}{T}} \left(3|u|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{Tu}{4}}{\frac{Tu}{4}} \right|^4 + 6|\lambda_m|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{Tu}{4}}{\frac{Tu}{4}} \right|^4 \right) du \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \left[\int_{|u|\leq \frac{4\pi}{T}} \left(3|u|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{Tu}{4}}{\frac{Tu}{4}} \right|^4 + 6|\lambda_m|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{Tu}{4}}{\frac{Tu}{4}} \right|^4 \right) du + \right. \\
& + \left. \int_{\frac{4\pi}{T}\leq|u|\leq \frac{4N\pi}{T}} \left(3|u|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{Tu}{4}}{\frac{Tu}{4}} \right|^4 + 6|\lambda_m|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{Tu}{4}}{\frac{Tu}{4}} \right|^4 \right) du \right] \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \left(\int_{|u|\leq \frac{4\pi}{T}} \left(\frac{48}{T^2} + 6|\lambda_m|^2 \right) du + \int_{\frac{4\pi}{T}\leq|u|\leq \frac{4N\pi}{T}} \left(\frac{256}{T^4} + \frac{96}{T^2}|\lambda_m|^2 \right) |u|^{-2} du \right) \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} 2 \left(\int_0^{\frac{4\pi}{T}} \frac{48}{T^2} + 6|\lambda_m|^2 du + \int_{\frac{4\pi}{T}\leq u\leq \frac{4N\pi}{T}} \left(\frac{256}{T^4} + \frac{96}{T^2}|\lambda_m|^2 \right) u^{-2} du \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} 2\left(\left[\frac{48}{T^2}+6|\lambda_m|^2\right] u\Big|_0^{\frac{4\pi}{T}} - \left[\frac{256}{T^4}+\frac{96}{T^2}|\lambda_m|^2\right] u^{-1}\Big|_{\frac{4\pi}{T}}^{\frac{4N\pi}{T}}\right)\\
&\leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} 4\left(\frac{192\pi}{T^3}+\frac{24\pi|\lambda_m|^2}{T}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, para $T > 1$ temos que existem constantes positivas C_2' e C_3' tais que

$$
\beta_1 \leq \left(C_2'|\lambda_m|^2 + C_3'\right) e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}}. \tag{3.36}
$$

Seja

$$
\beta_2 = \int_{\frac{4N\pi}{T}\leq|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi} \left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right|^2\right) \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N} \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^4 dx.
$$

Pelas equações (3.27) e (3.33), temos

$$
\begin{aligned}
\beta_2 &\leq \left(400\pi^4\right)^2 \int_{\frac{4N\pi}{T}\leq|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi} |x+\lambda_m|^2 e^{\left(\frac{8x^2}{N}\right)} e^{(-4N\ln(\pi))} \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^4 dx\\
&\leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{\frac{4N\pi}{T}\leq|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi} |x+\lambda_m|^2 e^{\left(\frac{16(x-\lambda_m)^2}{N}\right)} e^{(-4N\ln(\pi))} \times\\
&\times \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^4 dx\\
&\leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{\frac{4N\pi}{T}\leq|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi} |x+\lambda_m|^2 e^{\left(\frac{16(x-\lambda_m)^2}{N}-4N\ln(\pi)\right)} \times\\
&\times \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^4 dx\\
&\leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{\frac{4N\pi}{T}\leq|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi} |x+\lambda_m|^2 e^{\left(\frac{16(\delta N\pi)^2}{N}-4N\ln(\pi)\right)} \times\\
&\times \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^4 dx\\
&\leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{\frac{4N\pi}{T}\leq|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi} |x+\lambda_m|^2 e^{\left(16\delta^2\pi^2 N-4N\ln(\pi)\right)} \times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \times \quad \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
& \leq \quad \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{\frac{4N\pi}{T} \leq |x-\lambda_m| \leq \delta N\pi} |x+\lambda_m|^2 \, e^{\left(16\delta^2\pi^2 - 4\ln(\pi)\right) N} \times \\
& \times \quad \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx.
\end{aligned}
$$

Como o δ é arbitrário, podemos tomar $\delta < \frac{\sqrt{\ln(\pi)}}{2\pi}$, assim,

$$
\begin{aligned}
\beta_2 & \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{\frac{4N\pi}{T} \leq |x-\lambda_m| \leq \delta N\pi} |x+\lambda_m|^2 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{\frac{4N\pi}{T} \leq |x-\lambda_m| \leq \delta N\pi} (3|x-\lambda_m|^2 + 6|\lambda_m|^2) \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}} \right|^4 dx \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \int_{\frac{4N\pi}{T} \leq |x-\lambda_m| \leq \delta N\pi} \left(\frac{768}{T^4} + \frac{96|\lambda_m|^2}{T^2} \right) \frac{1}{|x-\lambda_m|^2} dx,
\end{aligned}
$$

fazendo $u = x - \lambda_m$ temos que $du = dx$, logo,

$$
\begin{aligned}
\beta_2 & \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \left(\int_{\frac{4N\pi}{T} \leq |u| \leq \delta N\pi} \left(\frac{768}{T^4} + \frac{96|\lambda_m|^2}{T^2} \right) \frac{1}{|u|^2} du \right) \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \left(2 \int_{\frac{4N\pi}{T} \leq u \leq \delta N\pi} \left(\frac{768}{T^4} + \frac{96|\lambda_m|^2}{T^2} \right) \frac{1}{u^2} du \right) \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \left(2 \left[- \left(\frac{768}{T^4} + \frac{96|\lambda_m|^2}{T^2} \right) \frac{1}{u} \Bigg|_{\frac{4N\pi}{T}}^{\delta N\pi} \right] \right) \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \left(2 \left[- \left(\frac{768}{T^4} + \frac{96|\lambda_m|^2}{T^2} \right) \frac{1}{\delta N\pi} + \left(\frac{768}{T^4} + \frac{96|\lambda_m|^2}{T^2} \right) \frac{T}{4N\pi} \right] \right) \\
& \leq \left(400\pi^4\right)^2 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \left(2 \left[\left(\frac{768}{T^4} + \frac{96|\lambda_m|^2}{T^2} \right) \frac{T}{4N\pi} \right] \right) \\
& \leq 160000\pi^7 e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \left(\frac{384}{T^3} + \frac{48|\lambda_m|^2}{T} \right).
\end{aligned}
$$

Portanto, para $T > 1$ temos que existem constantes positivas C_2'' e C_3'', tais que

$$
\beta_1 \leq \left(C_2''|\lambda_m|^2 + C_3''\right) e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}}. \tag{3.37}
$$

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.34), obtemos que

$$I_3 \;\leq\; \left(C_2'|\lambda_m|^2 + C_3'\right) e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} + \left(C_2''|\lambda_m|^2 + C_3''\right) e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}} \leq \left(C_2|\lambda_m|^2 + C_3\right) e^{\frac{16\lambda_m^2}{N}}.$$

onde $C_2 = C_2' + C_2''$ e $C_3 = C_3' + C_3''$ são constantes positivas que não dependem de N e m.

Caso II: $|m| \geq \delta N$
Este caso é mais simples que o primeiro. Temos que

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right| &\leq \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \frac{|x-\lambda_m| + |\lambda_m - \lambda_n|}{\lambda_n} \leq \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \frac{\delta N\pi + 4(N+1)}{2|n|} \leq \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \frac{N+8N}{2|n|} \leq \\
&\leq \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \frac{5N}{|n|} \leq (5N)^{2N-1} \prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \frac{1}{|n|} \leq \frac{(5N)^{2N-1} m}{(N!)^2} \leq \frac{(5N)^{2N-1} m}{\left(\sqrt{2N\pi}\left(\frac{N}{e}\right)^N\right)^2} \leq \\
&\leq \frac{(5N)^{2N} e^{2N} m}{2N\pi N^{2N}} \leq \frac{(5)^{2N} e^{2N} |\lambda_m|}{N} \leq \frac{|\lambda_m| e^{8N}}{N},
\end{aligned}$$

tomando $\delta = \frac{1}{13}$, temos que

$$\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right| \leq \frac{|\lambda_m|(e)^{338(4\delta^2 N)}}{N} \leq \frac{|\lambda_m| e^{338\frac{4\delta^2 N^2}{N}}}{N} \leq \frac{|\lambda_m| e^{338\cdot\frac{(2|m|)^2}{N}}}{N} \leq \frac{|\lambda_m| e^{338\cdot\frac{|\lambda_m|^2}{N}}}{N},$$

segue-se que

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{|x-\lambda_m|\leq \delta N\pi} \left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}} \left|\frac{x-\lambda_n}{\lambda_n}\right|^2\right) \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4N}}\right|^{4N} \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}{\frac{T(x-\lambda_m)}{4}}\right|^4 dx \\
&\leq \frac{|\lambda_m|^2 e^{676\cdot\frac{|\lambda_m|^2}{N}}}{N^2} \int_{|x-\lambda_m|\leq\delta N\pi} dx \\
&\leq \frac{|\lambda_m|^2 e^{676\cdot\frac{|\lambda_m|^2}{N}}}{N} \cdot 2\delta N\pi \\
&\leq 2\delta\pi |\lambda_m|^2 e^{676\cdot\frac{|\lambda_m|^2}{N}} \\
&\leq \left(C_2|\lambda_m|^2 + C_3\right) e^{676\cdot\frac{|\lambda_m|^2}{N}},
\end{aligned}$$

onde $C_2 = 2\delta\pi$ e $C_3 > 0$ são constantes positivas que não dependem de N e m. Portanto, qualquer que seja $|m|$, tem-se que

$$I_3 \ \leq \ \left(C_2|\lambda_m|^2 + C_3\right) e^{676 \cdot \frac{|\lambda_m|^2}{N}}. \tag{3.38}$$

Portanto, qualquer que seja m temos que

$$I_3 \ \leq \ \left(C_2|\lambda_m|^2 + C_3\right) e^{\alpha \cdot \frac{|\lambda_m|^2}{N}}. \tag{3.39}$$

como queriamos demonstrar.

■

Lema 3.1.5 *Para $T > 0$ suficientemente grande, tem-se que para cada $|m| \leq N$ com $m \neq 0$, $\xi_m(x) \in L^2(-\infty, \infty)$.*

Demonstração: Para demonstrarmos este Lema usaremos os três lemas anteriores, assim, temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_m|^2 dx = \gamma_1(N) I_2 + \gamma_1(N) I_3 \left(\prod_{\substack{|n| \leq N \\ n \neq 0, m}} |\lambda_n|^2 \right),$$

da relação (1) do Lema (3.1.2), temos que

$$\gamma_1(N) \prod_{\substack{|k| \leq N \\ k \neq 0, m}} |\lambda_k|^2 \ \leq \ 1,$$

logo, pelos Lemas (3.1.3) e (3.1.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_m|^2 dx \leq C_1 + \left(C_2|\lambda_m|^2 + C_3\right) e^{\alpha \cdot \frac{|\lambda_m|^2}{N}} \leq C_1 + \left(C_2 \pi^2 m^2 + C_3\right) e^{\alpha \frac{\pi^2 m^2}{N}} \leq C_m,$$

onde C_m é uma constante positiva que só depende de m, portanto, a integral acima é finita para cada m.

■

Lema 3.1.6 *Para $T > 0$ suficientemente grande, tem-se que para cada $|m| \leq N$ com $m \neq 0$, a função ξ_m é do tipo exponencial, isto é, $\exists A_m \geq 0$, tem-se que*

$$|\xi_m(z)| \leq A_m e^{T|z|}; \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Temos que

$$|\xi_m(z)| = \left(\prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,m}} \frac{z-\lambda_n}{|\lambda_m - \lambda_n|} \right) \left(\frac{\left| \operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4N} \right|}{\frac{T|z-\lambda_m|}{4N}} \right)^{2N} \left(\frac{\left| \operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4} \right|}{\frac{T|z-\lambda_m|}{4}} \right)^{2}.$$

Tomando $z \in \mathbb{C}$ talque $|z-\lambda_m| \geq \delta N\pi$ onde $0<\delta<1$, fazendo um raciocínio análogo ao do lema (3.1.3), temos que existe uma constante $A_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|\xi_m(z)| &= A_1 \left| \operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4N} \right|^{2N} \left| \operatorname{sen} \frac{T(z-\lambda_m)}{4} \right|^{2} \\
&= A_1 \frac{\left| e^{\frac{iT(z-\lambda_m)}{4N}} - e^{\frac{-iT(z-\lambda_m)}{4N}} \right|^{2N}}{2^{2N}} \frac{\left| e^{\frac{iT(z-\lambda_m)}{4}} - e^{\frac{-iT(z-\lambda_m)}{4}} \right|^{2}}{2^{2N}} \\
&= A_1 \frac{\left(\left| e^{\frac{iT(z-\lambda_m)}{4N}} \right| + \left| e^{\frac{-iT(z-\lambda_m)}{4N}} \right| \right)^{2N}}{2^{2N}} \frac{\left(\left| e^{\frac{iT(z-\lambda_m)}{4}} \right| + \left| e^{\frac{-iT(z-\lambda_m)}{4}} \right| \right)^{2}}{2^{2N}} \\
&= A_1 \frac{\left(e^{\frac{-T}{4N} Im(z)} + e^{\frac{T}{4N} Im(z)} \right)^{2N}}{2^{2N}} \frac{\left(e^{\frac{-T}{4} Im(z)} + e^{\frac{T}{4} Im(z)} \right)^{2}}{2^{2N}} \\
&= A_1 \frac{\left(2e^{\frac{T}{4N}|Im(z)|} \right)^{2N}}{2^{2N}} \frac{\left(2e^{\frac{T}{4}|Im(z)|} \right)^{2}}{2^{2N}} \\
&= A_1 e^{\frac{T}{2}|Im(z)|} e^{\frac{T}{2}|Im(z)|} \\
&= A_1 e^{T|Im(z)|}.
\end{aligned}$$

Agora, tomando Tomando $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-\lambda_m| \leq \delta N\pi$, deste que a função composta $(|\cdot| \circ \xi_m)$ é uma função contínua, pelo Teorema de Weierstrass existe $B_m > 0$, tal que

$$|\xi_m(z)| \leq B_m e^{T|Im(z)|}.$$

Assim tomando $A_m = \max\{A_1, B_m\}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ temos que

$$|\xi_m(z)| \leq A_m e^{T|Im(z)|}.$$

como $|Im(z)| \leq |z|$, temos que

$$|\xi_m(z)| \leq A_m e^{(T+\epsilon)|z|}.$$

Concluindo, assim, o Teorema (3.1.1). ∎

3.2 Estimativas para norma da sequência em $L^2(-T,T)$

Teorema 3.2.1 *Se $T>0$ é suficientemente grande, então a sequência biortogonal $(\Theta_m)_{|m|\leq N m\neq 0}$, satisfaz*

$$\|\Theta_m\|_{L^2(-T,T)} \leq C|\lambda_m| e^{\left(\beta\frac{|\lambda_m|^2}{N}\right)}, \ \forall |m|\leq N, \tag{3.40}$$

onde C,β são constantes positivas que não dependem de N e m.

Demonstração: Pelo Teorema de Plancherel (ver [19]), existe uma isometria entre uma função e sua transformada, logo, temos que

$$\sqrt{2\pi}\|\Theta_m(t)\|_{L^2(-T,T)} = \|\xi_m\|_{L^2(-\infty,\infty)}. \tag{3.41}$$

Assim, para estimar a norma de Θ_m, basta estimar a norma de ξ_m. Logo, usando os Lemas (3.1.2),(3.1.3) e (3.1.4) temos que

$$2\pi\|\Theta_m\|^2_{L^2(-T,T)} = \|\xi_m\|^2_{L^2(-\infty,\infty)} = \gamma_1(N)I_2 + \gamma_1(N)I_3\left(\prod_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0,m}}|\lambda_n|^2\right),$$

logo, da relação (1) do Lema (3.1.2), temos que

$$\gamma_1(N)\prod_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0,m}}|\lambda_k|^2 \ \leq \ 1,$$

além disso, $|\lambda_m| = |\frac{2}{h}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi h}{2}\right)| \geq 2|m| \geq 1$ e $e^{\alpha\cdot\frac{|\lambda_m|^2}{N}} \geq 1$, resultando em,

$$\begin{aligned} 2\pi\|\Theta_m\|^2_{L^2(-T,T)} &\leq C_1 + 4\left(C_2|\lambda_m| + C_3\right)e^{\alpha\frac{|\lambda_m|^2}{N}} \\ &\leq C_1|\lambda_m|^2 e^{\alpha\frac{|\lambda_m|^2}{N}} + \left(C_2+C_3\right)|\lambda_m|^2 e^{\alpha\frac{|\lambda_m|^2}{N}}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Portanto,

$$\|\Theta_m\|_{L^2(-T,T)} \ \leq \ C|\lambda_m| e^{\beta\frac{|\lambda_m|^2}{N}}$$

Onde $C=\sqrt{\frac{C_1+(C_2+C_3)}{2\pi}}$ e $\beta=\alpha/2$. ■

Observamos que os Teoremas (3.1.1) e (3.2.1) também implicam na existência de uma sequência biortogonal $(\Theta_m)_{|m|\leq N m\neq 0}$, tal que

$$\|\Theta_m\|_{L^2(-T,T)} \leq C|\lambda_m| e^{(\alpha'|\lambda_m|)}, \ \forall |m|\leq N, \tag{3.43}$$

onde, C e α' são constantes positivas que não dependem de N.

Além disso, observamos também que os Teoremas (3.1.1) e (3.2.1) implicam na existência de uma sequência biortogonal $(\Theta_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$, tal que

$$\|\Theta_m\|_{L^2(-T,T)} \leq C'|\lambda_m|, \ \forall \ \ |m| \leq \sqrt{N}, \tag{3.44}$$

onde, C' é uma constante positiva que não dependem de N.

Note que a norma de todos os elementos da família biortogonal $(\Theta_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$ depende de m mas não explicitamente de N.

Mostraremos agora, que para $m = N$, a norma de qualquer sequência biortogonal tem crescimento exponencial. Para verificarmos isso, temos o seguinte o Teorema.

Teorema 3.2.2 *Seja* $(\Gamma_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$ *uma sequência biortogonal de* $(e^{i\lambda_n t})_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0}}$ *em* $L^2(-T,T)$*, onde* $(i\lambda_n)_{\substack{|n|\leq N\\ n\neq 0}}$ *são os autovalores da matriz* L_h*. Existe uma constante positiva* C *que não depende de* N*, tal que*

$$\|\Gamma_N\|_{L^{2(-T,T)}} \geq Ce^{\sqrt{N}}. \tag{3.45}$$

Demonstração: Primeiramente definiremos a seguinte sequência de funções

$$\tau_m(z) = \int_{-T}^{T} \Gamma_m(t)e^{itz}dt, \quad |m| \leq N, \quad m \neq 0. \tag{3.46}$$

logo,

$$|\tau_m(z)| \leq \int_{-T}^{T} |\Gamma_m(t)||e^{itz}|dt,$$

usando Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|\tau_m(z)| \ &\leq \ \|\Gamma_m(t)\|_{L^2(-T,T)} \left(\int_{-T}^{T} |e^{itz}|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq \ \|\Gamma_m(t)\|_{L^2(-T,T)} \left(\int_{-T}^{T} e^{-2\mathbf{Im}(z)t} dt\right)^{1/2} \\
&\leq \ \sqrt{2T}e^{T|\mathbf{Im}(z)|}\|\Gamma_m(t)\|_{L^2(-T,T)}, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{C}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Além disso,

$$|\tau_m(x)| \leq \sqrt{2T}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}, \quad \forall \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.48}$$

Assim, τ_m é uma função do tipo exponencial, pelo Teorema de Paley-Wiener segue-se que τ_m é uma função inteira do tipo exponencial para todo T, segue-se que, pelo teorema da Fatoração de Hadamard´s (ver, [19]) podemos escreve-la por

$$\tau_m(z) = az^p e^{bz} \prod_{z_k \in E} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}}, \tag{3.49}$$

onde E é o conjunto dos zeros z_k de τ_m com $z_k \neq 0$, isto é, $E = \{z_k \in \mathbb{C} | \tau_m(z_k) = 0, z_k \neq 0\}$.

Pela definição da função τ_m temos que $\tau_m(\lambda_n) = \delta_{mn}$. Portanto, $E' = \{\lambda_n; |n| \leq N, n \neq 0, \pm m\} \subseteq E$. Logo,

$$\tau_m(z) = az^p e^{bz} \prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,\pm m}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_k}} \prod_{z_k \in E - E'} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}}. \tag{3.50}$$

Se definirmos a função polinomial

$$P_m(z) = \prod_{\substack{|n|\leq N \\ n\neq 0,\pm m}} \frac{z - \lambda_n}{\lambda_m - \lambda_n}, \tag{3.51}$$

fica bem definida a função $\phi_m(z)$ dada por

$$\phi_m(z) = \frac{\tau_m(z)}{P_m(z)}. \tag{3.52}$$

A função ϕ_m tem as seguintes propriedades:

- é uma função do tipo exponencial para todo T;
- $\phi_m(\lambda_m) = 1$;
- $\tau_m(z) = P_m(z)\phi_m(m)$;

Definamos $\varphi_N : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pondo $\varphi_N(z) = \phi_N(\lambda_N - z)$. Evidentemente, φ_N é uma função inteira e $\varphi_N(0) = \phi_N(\lambda_N) = 1$. Vamos estimar $|P_N(\lambda_N - z)|$.

$$P_N(\lambda_N - z) = \prod_{\substack{|n|\leq N-1 \\ n\neq 0}} \frac{\lambda_N - z - \lambda_n}{\lambda_N - \lambda_n} = \prod_{\substack{|n|\leq N-1 \\ n\neq 0}} \frac{\mu_n - z}{\mu_n},$$

onde

$$\mu_n = \lambda_N - \lambda_n = \frac{4}{h} \cos\left(\frac{N+n}{4}\pi h\right) \text{sen}\left(\frac{N-n}{4}\pi h\right),$$

para $-N + 1 \leq n \leq -1$ e $1 \leq n \leq N - 1$.

Fazendo $j = N-n$ tem-se que $n = N-j$, logo, $-N+1 \leq N-j \leq -1$ e $1 \leq N-j \leq N-1$, logo, $N+1 \leq j \leq 2N-1$ e $1 \leq j \leq N-1$, assim, $1 \leq j \leq 2N-1, j \neq N$. Denotando por $\upsilon_j = \mu_{N-j}$, temos que

$$\begin{aligned}
\upsilon_j &= \frac{4}{h}\cos\left(\frac{2N-j}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j}{4}\pi h\right)\\
&= \frac{4}{h}\cos\left(\frac{2N\pi h}{4}-\frac{j}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\\
&= \frac{4}{h}\left[\cos\left(\frac{2N\pi h}{4}\right)\cos\left(\frac{j}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j}{4}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\\
&= \frac{4}{h}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi h}{4}\right)\cos\left(\frac{j}{4}\right)+\cos\left(\frac{2\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j}{4}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\\
&= \frac{4}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi h}{4}+\frac{j\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\\
&= \frac{4}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right).
\end{aligned}$$

Notemos que $(\upsilon_j)_{\substack{1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}}$ é crescente e

$$P_N(\lambda_N - z) = \prod_{\substack{1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\upsilon_j - z}{\upsilon_j}.$$

Agora, se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| \leq N$, então

$$\frac{\sqrt{h|z|}}{4} \leq \frac{\sqrt{hN}}{2} \leq \frac{1}{2},$$

logo, existe $t \geq 0$, tal que

$$\frac{\sqrt{h|z|}}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{t\pi h}{4}\right),$$

resultando que

$$|z| = \frac{4}{h}\operatorname{sen}^2\left(\frac{t\pi h}{4}\right),$$

tomando $p = [t]$, temos que $p \leq t < p+1$, assim, $p \leq \left[\frac{N}{2}\right]$ e $|z| \in [\upsilon_p, \upsilon_{p+1}]$. Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
|P_N(\lambda_N - z)| &= \prod_{\substack{1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{|\upsilon_j - z|}{|\upsilon_j|}\\
&= \prod_{1\leq j\leq p} \frac{|\upsilon_j - z|}{|\upsilon_j|} \prod_{\substack{p+1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{|\upsilon_j - z|}{|\upsilon_j|}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \prod_{1\leq j\leq p} \frac{|z|-\upsilon_j}{\upsilon_j} \prod_{\substack{p+1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\upsilon_j-|z|}{\upsilon_j}\\
&\geq \left(\prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\upsilon_p-\upsilon_j}{\upsilon_j} \prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\upsilon_j-\upsilon_{p+1}}{\upsilon_j} \right) \left(\frac{|z|-\upsilon_p}{\upsilon_p} \cdot \frac{\upsilon_{p+1}-|z|}{\upsilon_{p+1}} \right),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\upsilon_p-\upsilon_j}{\upsilon_j} &= \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\mu_{N-p}-\mu_{N-j}}{\mu_{N-j}}\\
&= \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\lambda_{N-j}-\lambda_{N-p}}{\mu_{N-j}}\\
&= \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\frac{2}{h}\,\text{sen}\left(\frac{N-j}{2}\pi h\right) - \frac{2}{h}\,\text{sen}\left(\frac{N-p}{2}\pi h\right)}{\frac{4}{h}\,\text{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\,\text{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\frac{4}{h}\,\text{sen}\left(\frac{N-j-(N-p)}{4}\pi h\right)\cos\left(\frac{N-j+(N-p)}{4}\pi h\right)}{\frac{4}{h}\,\text{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\,\text{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{p-j}{4}\pi h\right)\cos\left(\frac{2N-j-p}{4}\pi h\right)}{\text{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\,\text{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $k=p-j$ temos que $j=p-k$, logo

$$
\prod_{1\leq j\leq p-1} \text{sen}\left(\frac{p-j}{4}\pi h\right) = \prod_{1\leq p-k\leq p-1} \text{sen}\left(\frac{k}{4}\pi h\right) = \prod_{1\leq k\leq p-1} \text{sen}\left(\frac{k}{4}\pi h\right),
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\upsilon_p-\upsilon_j}{\upsilon_j} = \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\cos\left(\frac{2N-j-p}{4}\pi h\right)}{\text{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)} &= \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\cos\left(\frac{2N\pi h}{4} - \frac{j+p}{4}\pi h\right)}{\text{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{2\pi h}{4} + \frac{j+p}{4}\pi h\right)}{\text{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\text{sen}\left(\frac{j+p+2}{4}\pi h\right)}{\text{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $k=j+p+2$ temos que $j=k-p-2$ e fazendo $k=j+2$ temos que $j=k-2$, logo

$$
\prod_{1\leq j\leq p-1} \frac{\upsilon_p-\upsilon_j}{\upsilon_j} = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq k-p-2\leq p-1} \text{sen}\left(\frac{k}{4}\pi h\right)}{\displaystyle\prod_{1\leq k-2\leq p-1} \text{sen}\left(\frac{k}{4}\pi h\right)} = \frac{\displaystyle\prod_{p+3\leq k\leq 2p+1} \text{sen}\left(\frac{k}{4}\pi h\right)}{\displaystyle\prod_{3\leq k\leq p+1} \text{sen}\left(\frac{k}{4}\pi h\right)}.
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\upsilon_j-\upsilon_{p+1}}{\upsilon_j} &= \prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\mu_{N-j}-\mu_{N-(p+1)}}{\mu_{N-j}}\\
&= \prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\lambda_{N-(p+1)}-\lambda_{N-j}}{\mu_{N-j}}\\
&= \prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{N-(p+1)}{2}\pi h\right)-\frac{2}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{N-j}{2}\pi h\right)}{\frac{4}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{j-(p+1)}{4}\pi h\right)\cos\left(\frac{2N\pi h}{4}-\frac{p+j+1}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{j-(p+1)}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi h}{4}+\frac{p+j+1}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{j-(p+1)}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p+j+3}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)}\\
&\times \prod_{p+2\leq j\leq 2N-1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{j-(p+1)}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p+j+3}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j+2}{4}\pi h\right)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)}\\
&\times \frac{\prod\limits_{1\leq k\leq 2N-p-2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod\limits_{2p+5\leq k\leq 2N+p+2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}{\prod\limits_{p+2\leq k\leq 2N-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod\limits_{p+4\leq k\leq 2N+1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)}\\
&\times \frac{\prod\limits_{k=1}^{2N-p-2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod\limits_{k=2p+5}^{2N+1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod\limits_{k=2N+2}^{2N+p+2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}{\prod\limits_{k=p+2}^{2N-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod\limits_{k=p+4}^{2p+4}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod\limits_{k=2p+5}^{N+1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)} \\
&\times \frac{\displaystyle\prod_{1\leq k\leq 2N-p-2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod_{2N+2\leq k\leq 2N+p+2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}{\displaystyle\prod_{p+2\leq k\leq 2N-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod_{p+4\leq k\leq 2p+4}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}.
\end{aligned}
$$

Observe que, $2N-p-2\geq p+1 \Rightarrow 2N\geq 2p+3 \Rightarrow 2N\geq N+3 \Rightarrow N\geq 3$. Logo, para $N\geq 3$ temos

$$
\begin{aligned}
\prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}}\frac{\upsilon_j-\upsilon_{p+1}}{\upsilon_j} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)} \\
&\times \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p+1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod_{k=p+2}^{2N-p-2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod_{k=2N+2}^{2N+p+2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}{\displaystyle\prod_{k=p+2}^{2N-p-2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod_{k=2N-p-1}^{2N-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod_{k=p+4}^{2p+4}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)} \\
&\times \frac{\displaystyle\prod_{1\leq k\leq p+1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod_{2N+2\leq k\leq 2N+p+2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}{\displaystyle\prod_{2N-p-1\leq k\leq 2N-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)\prod_{p+4\leq k\leq 2p+4}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}.
\end{aligned}
$$

Obtemos que

$$
\begin{aligned}
\prod_{1\leq j\leq p-1}\frac{\upsilon_p-\upsilon_j}{\upsilon_j}\prod_{\substack{p+2\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}}\frac{\upsilon_j-\upsilon_{p+1}}{\upsilon_j} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p+3}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2p+2}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2p+3}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2p+4}{4}\pi h\right)}\times \\
&\times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)}\frac{\displaystyle\prod_{2N+2}^{2N+p+2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}{\displaystyle\prod_{2N-p-1}^{2N-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p+3}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2p+2}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2p+3}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2p+4}{4}\pi h\right)}\times \\
&\times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)}\times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \prod_{2N+2}^{2N+p+2} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi h}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{k-p-3}{4}\pi h\right)} \\
&\geq \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+2}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{N-p-1}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{N+p+3}{4}\pi h\right)} \\
&\times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi h}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p+3}{4}\pi h\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2p+2}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2p+3}{4}\pi h\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2p+4}{4}\pi h\right)} \\
&\geq \frac{16}{\pi^5}\frac{N(N+2)(p+3)}{(N-p-1)(N+p+3)(p+1)(2p+3)(p+2)},
\end{aligned}
$$

segue-se que

$$
\begin{aligned}
|P_N(\lambda_N - z)| &\geq \frac{16}{\pi^5}\frac{N(N+2)(p+3)}{(N-p-1)(N+p+3)(p+1)(2p+3)(p+2)} \\
&\times \left(\frac{|z|-\upsilon_p}{\upsilon_p}\cdot\frac{\upsilon_{p+1}-|z|}{\upsilon_{p+1}}\right) \\
&\geq \frac{16}{\pi^5}\frac{(N+2)(p+3)}{(N+p+3)(p+1)(2p+3)(p+2)} \\
&\times \left(\frac{|z|-\upsilon_p}{\upsilon_p}\cdot\frac{\upsilon_{p+1}-|z|}{\upsilon_{p+1}}\right) \\
&\geq \frac{16}{\pi^5}\frac{(N+2)(p+3)}{(N+\frac{N}{2}+3)(p+1)(2p+3)(p+2)} \\
&\times \left(\frac{|z|-\upsilon_p}{\upsilon_p}\cdot\frac{\upsilon_{p+1}-|z|}{\upsilon_{p+1}}\right) \\
&\geq \frac{16}{\pi^5}\frac{(N+2)(p+3)}{(\frac{3N}{2}+3)(p+1)(2p+3)(p+2)}\left(\frac{|z|-\upsilon_p}{\upsilon_p}\cdot\frac{\upsilon_{p+1}-|z|}{\upsilon_{p+1}}\right) \\
&\geq \frac{32}{3\pi^5(p+1)(2p+3)}\left(\frac{|z|-\upsilon_p}{\upsilon_p}\cdot\frac{\upsilon_{p+1}-|z|}{\upsilon_{p+1}}\right) \\
&\geq \frac{32}{3\pi^7 p(p+1)(2p+3)(p+1)}\left(|z|-\upsilon_p\right)\left(\upsilon_{p+1}-|z|\right) \\
&\geq \frac{32}{3\pi^7 p(p+1)(2p+3)(p+1)}\left[\min_{\substack{1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}}\{||z|-\upsilon_j|\}\right]^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, existe $0 < C < 1$ que não depende de N, tal que

$$
|P_N(\lambda_N - z)| \geq C\left[\min_{\substack{1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}}\{||z|-\upsilon_j|\}\right]^2, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \textbf{com}|z| \leq N. \tag{3.53}
$$

Por (3.47) e (3.53), otemos que

$$|\varphi_m(z)| = \frac{|\tau_N(\lambda_N - z)|}{|P_N(\lambda_N - z)|} \leq \frac{\sqrt{2T}e^{T|\mathbf{Im}(z)|}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}}{C\left[\min\limits_{\substack{1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}}\{||z| - \upsilon_j|\}\right]^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad , |z| \leq N. \tag{3.54}$$

Agora, lembramos o seguinte resultado (ver [12]):

Teorema 3.2.3 (A) . *Seja $f(z)$ holomorfica no circulo $|z| \leq 2eR$ $(R > 0)$, onde $f(0) = 1$ e seja $\eta \in \left(0, \frac{3e}{2}\right)$. Então dentro do circulo $|z| \leq R$, excluindo uma família de círculos cujo a soma dos raios não é maior que $4\eta R$, temos que*

$$\ln(|f(z)|) > -\left(2 + \ln\left(\frac{3e}{2\eta}\right)\right)\ln\left(M_f(2eR)\right), \tag{3.55}$$

onde $M_f(2eR) = \max\limits_{|z|=2eR} |f(z)|$.

Observamos que a função φ_N satisfaz as condições do Teorema (**A**), logo, $\forall R > 0$ e $\eta \in \left(0, \frac{3e}{2}\right)$ segue-se

$$\ln(|\varphi_N(z)|) > -\left(2 + \ln\left(\frac{3e}{2\eta}\right)\right)\ln\left(M_{\varphi_N}(2eR)\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad , |z| \leq N. \tag{3.56}$$

Denotando por $\delta = 2 + \ln\left(\frac{3e}{2\eta}\right)$ e tomando $\eta \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$, temos que $\delta > 1$. Pelo Teorema (**A**) existe $x_0 \in [-R, \frac{-R}{4}]$, tal que

$$\ln(|\varphi_N(x_0)|) > -\delta\ln\left(M_{\varphi_N}(2eR)\right). \tag{3.57}$$

Por outro lado, por (3.54),

$$|\varphi_N(x_0)| = \frac{|\tau_N(\lambda_N - x_0)|}{|P_N(\lambda_N - x_0)|} \leq \sqrt{2T}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}\frac{1}{|P_N(\lambda_N - x_0)|},$$

como x_0 é um número negativo, temos que

$$|P_N(\lambda_N - x_0)| = \prod_{\substack{1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}} \frac{\upsilon_j + |x_0|}{\upsilon_j} \geq \prod_{j=1}^{[\sqrt{N}]} \frac{\upsilon_j + |x_0|}{\upsilon_j} \geq \prod_{j=1}^{[\sqrt{N}]} \frac{|x_0|}{j(j+2)\pi h} \geq \left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right)^{[\sqrt{N}]}.$$

Logo,

$$|\varphi_N(x_0)| \quad \leq \quad \sqrt{2T}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right)^{-[\sqrt{N}]},$$

resultando que

$$\begin{aligned}
\ln(|\varphi_N(x_0)|) &\leq \ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right)^{-[\sqrt{N}]}\right)\\
&\leq \ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}\right)+\ln\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right)^{-[\sqrt{N}]}\\
&\leq \ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}\right)-[\sqrt{N}]\ln\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right). \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Assim, por (3.57) e (3.58), obtemos que existe $x_0 \in \left[-R, \frac{-R}{4}\right]$, tal que

$$\ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)}\right)-[\sqrt{N}]\ln\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right) \quad > \quad -\delta\ln\left(M_{\varphi_N}(2eR)\right),$$

logo,

$$\ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)}\right) \quad > \quad [\sqrt{N}]\ln\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right)-\delta\ln\left(M_{\varphi_N}(2eR)\right). \qquad (3.59)$$

Considerando $R > 0$ tal que

$$2eR = \frac{\upsilon_{S+1}+\upsilon_S}{2},$$

afirmamos que

$$\min_{\substack{1\leq j\leq 2N-1\\ j\neq N}}\{|2eR-\upsilon_j|\} = \frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2},$$

isto é, o mínimo é alcançado quando $j = S$. De fato, se $j = S$, temos

$$|2eR-\upsilon_j| = \left|\frac{\upsilon_{S+1}+\upsilon_S}{2}-\upsilon_S\right| = \left|\frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2}\right| = \frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2},$$

Caso contrário, se $j \neq S$, temos que $j < S$ ou $j > S$. primeiramente, se $j < S$, segue-se que

$$|2eR-\upsilon_j| = \left|\frac{\upsilon_{S+1}+\upsilon_S}{2}-\upsilon_j\right| = \left|\frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2}+\upsilon_S-\upsilon_j\right| \geq \left|\frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2}\right| = \frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2},$$

Se $j > S$, tem-se que $j \geq S+1$ segue-se que

$$|2eR-\upsilon_j| = \left|\frac{\upsilon_{S+1}+\upsilon_S}{2}-\upsilon_j\right| = \upsilon_j-\frac{\upsilon_{S+1}+\upsilon_S}{2} \geq \upsilon_{S+1}-\frac{\upsilon_{S+1}+\upsilon_S}{2} = \frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2}.$$

Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2} = \frac{\lambda_{N-S}-\lambda_{N-S-1}}{2} &= \frac{\text{sen}\,\left(\frac{N-S}{2}\pi h\right) - \text{sen}\,\left(\frac{N-S-1}{2}\pi h\right)}{h} \\
&= \frac{2\,\text{sen}\,\left(\frac{\pi h}{4}\right)\cos\left(\frac{2N-2S-1}{4}\pi h\right)}{h} \\
&= \frac{2\,\text{sen}\,\left(\frac{\pi h}{4}\right)\,\text{sen}\,\left(\frac{2+2S+1}{4}\pi h\right)}{h} \\
&\geq \frac{2+2S+1}{2}h \\
&\geq \frac{4}{2(N+1)} \\
&\geq \frac{1}{N},
\end{aligned}$$

portanto,

$$\min_{\substack{1\leq j\leq 2N-1 \\ j\neq N}}\{|2eR-\upsilon_j|\} = \frac{\upsilon_{S+1}-\upsilon_S}{2} \geq \frac{1}{N}, \tag{3.60}$$

logo

$$M_{\varphi_N}(2eR) = \max_{|z|=2eR}|\varphi_N(z)| \leq \frac{\sqrt{2T}N^2e^{2eRT}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}}{C}. \tag{3.61}$$

Assim, obtemos

$$\ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)}\right) > [\sqrt{N}]\ln\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right) - \delta\ln\left(\frac{\sqrt{2T}N^2e^{2eRT}\|\Gamma_m\|_{L^2(-T,T)}}{C}\right),$$

implicando que

$$(1+\delta)\ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)}\right) > [\sqrt{N}]\ln\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right) - 2e\delta TR - \delta\ln\left(\frac{N^2}{C}\right),$$

logo,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)}\right) &> \frac{[\sqrt{N}]}{(1+\delta)}\ln\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right) - \frac{2e\delta TR}{(1+\delta)} - \frac{\delta}{(1+\delta)}\ln\left(\frac{N^2}{C}\right) \\
&> \frac{[\sqrt{N}]}{(1+\delta)}\ln\left(\frac{|x_0|}{3\pi}\right) - 2eTR - \ln\left(\frac{N^2}{C}\right) \\
&> \frac{[\sqrt{N}]}{2\delta}\ln\left(\frac{R}{12\pi}\right) - 2eTR - \ln\left(\frac{N^2}{C}\right),
\end{aligned}$$

temos que $2[\sqrt{N}] = [\sqrt{N}] + [\sqrt{N}] \geq [\sqrt{N}] + 1 \geq \sqrt{N}$, logo, $[\sqrt{N}] \geq \frac{\sqrt{N}}{2}$, assim,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)}\right) &> \frac{\sqrt{N}}{4\delta}\ln\left(\frac{R}{12\pi}\right) - 2eTR - \ln\left(\frac{N^2}{C}\right) \\
&> \sqrt{N}\left(\frac{1}{4\delta}\ln\left(\frac{R}{12\pi}\right) - \frac{2eTR}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\ln\left(\frac{N^2}{C}\right)\right). \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Agora, se tomarmos $S = [N^{\frac{3}{4}}]$, temos que

$$2eR = \frac{\upsilon_{S+1} + \upsilon_S}{2} \geq \frac{\upsilon_{S+1}}{2} \geq \frac{(S+1)(S+3)h}{2} \geq \frac{(N^{\frac{3}{4}})(N^{\frac{3}{4}})h}{2} = \frac{N\sqrt{N}}{2(N+1)} \geq \frac{\sqrt{N}}{4},$$

e,

$$\begin{aligned}
2eR \leq \upsilon_{S+1} \leq \frac{\pi^2(S+1)(S+3)h}{4} \leq \frac{\pi^2\left(N^{\frac{3}{4}}+1\right)\left(N^{\frac{3}{4}}+3\right)h}{4} &\leq \frac{\pi^2}{4}\left(N\sqrt{N} + 4N^{\frac{3}{4}} + 3\right)h \\
&\leq 2\pi^2\sqrt{N}, \quad (3.63)
\end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{\sqrt{N}}{4} \leq 2eR \leq 2\pi^2\sqrt{N}, \quad (3.64)$$

logo, para $N \geq \max\left\{(144\delta)^2, \dfrac{(96\pi)^{9\delta}e^{18\delta+18\delta\pi^2 T}}{C^{9\delta}}\right\}$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt{2T}\|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)}\right) &> \sqrt{N}\left(\frac{1}{4\delta}\ln\left(\frac{R}{12\pi}\right) - \frac{2eTR}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\ln\left(\frac{N^2}{C}\right)\right) \\
&> \sqrt{N}\left(\frac{1}{4\delta}\ln\left(\frac{\sqrt{N}}{96e\pi}\right) - \frac{2\pi^2T\sqrt{N}}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\ln\left(\frac{N^2}{C}\right)\right) \\
&> \sqrt{N}\left(\frac{1}{8\delta}\ln\left(\frac{N}{96e\pi}\right) - 2\pi^2T - \frac{1}{\sqrt{N}}\ln\left(\frac{N^2}{C}\right)\right) \\
&= \sqrt{N}\left(\frac{1}{8\delta}\ln N - \frac{1}{8\delta}\ln 96e\pi - 2\pi^2T - \frac{2}{\sqrt{N}}\ln N - \frac{1}{\sqrt{N}}\ln\left(\frac{1}{C}\right)\right) \\
&> \sqrt{N}\left(\left[\frac{1}{8\delta} - \frac{2}{\sqrt{N}}\right]\ln N - \ln 96e\pi - 2\pi^2T - \ln\left(\frac{1}{C}\right)\right) \\
&> \sqrt{N}\left(\left[\frac{1}{8\delta} - \frac{2}{144\delta}\right]\ln N - \ln 96e\pi - 2\pi^2T - \ln\left(\frac{1}{C}\right)\right) \\
&> \sqrt{N}\left(\frac{1}{9\delta}\ln N - \ln 96e\pi - \pi^2T - \ln\left(\frac{1}{C}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> \sqrt{N}\left(\frac{1}{9\delta}\ln\left(\frac{(96\pi)^{9\delta}e^{18\delta+18\delta\pi^2T}}{C^{9\delta}}\right) - \ln 96e\pi - 2\pi^2T - \ln\left(\frac{1}{C}\right)\right)\\
&= \sqrt{N}\left(\ln\left(\frac{(96\pi)e^{2+2\pi^2T}}{C}\right) - \ln 96e\pi - 2\pi^2T - \ln\left(\frac{1}{C}\right)\right)\\
&= \sqrt{N}\left(\ln\left(\frac{(96e\pi)ee^{2\pi^2T}}{C}\right) - \ln 96e\pi - 2\pi^2T - \ln\left(\frac{1}{C}\right)\right)\\
&= \sqrt{N}. \qquad (3.65)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\sqrt{2T}\|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)} > e^{\sqrt{N}} \quad \Rightarrow \quad \|\Gamma_N\|_{L^2(-T,T)} > \frac{1}{\sqrt{2T}}e^{\sqrt{N}}.
$$

como queriamos demonstrar.

■

Capítulo 4

Resultados de controlabilidade

Neste capítulo, consideramos a sequência de sistemas semi-discretos correspondente a equação da onda no contínuo e estudaremos algumas propriedades de controlabilidade desses sistemas.

Para relembrar, o ponto de partida de nossos estudos é seguinte problema de controle: Dados $T > 2$ e $(u^0, u^1) \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ existe uma função controle $v \in L^2(0,T)$ tal que a solução u do sistema

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad x \in (0,1) \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) &= v(t), \qquad t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \quad u_t(x,0) &= u^1(t) \;\; x \in (0,1), \end{aligned}$$

satisfaz

$$u(T, \cdot) = u'(T, \cdot) = 0.$$

Neste capítulo o foco está relacionado ao problema de controlabilidade do sistema semi-discreto por diferenças finitas, que é expresso da seguinte forma: Dados $T > 0$ e $\left(u_j^0, u_j^1\right)_{1 \le j \le N} \in L^2(0,T)$ existe uma função controle $v \in L^2(0,T)$ tal que a solução u do sistema

$$u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} = 0, \quad j = 1, 2, ..., N, \tag{4.1}$$

$$u_0(t) = 0, \quad u_{N+1}(t) = v(t), \qquad t > 0, \tag{4.2}$$

$$u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{4.3}$$

satisfaz

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0, \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, N.$$

Nosso objetivo é construir um funcional controle v_h.

4.1 Caracterização do problema de controle

Primeiramente, veremos a seguinte caracterização do problema de controlabilidade do sistema (4.1) − (4.3).

Proposição 4.1.1 *O sistema* (4.1)−(4.3) *é controlável se, e somente se, dado uma condição inicial* $Z^0 = \left(u_j^0, u_j^1\right)_{1\le j\le N} \in \mathbb{C}^{2N}$ *existe* $v_h \in L^2(0,T)$ *tal que*

$$\frac{1}{h}\int_0^T v_h(t)\overline{w}_N(t)dt = h\sum_{j=1}^{N}\left(u_j^0\overline{w}_j^1 - u_j^1\overline{w}_j^0\right) \tag{4.4}$$

para algum vetor $(w_j^0, w_j^1)_{1\le j\le N} \in \mathbb{C}^{2N}$ *e* w *é uma solução de* (2.5) − (2.7) *em* $(0,T)$.

Demonstração: Sejam considerados $(w_j^0, w_j^1)_{1\le j\le N} \in \mathbb{C}^{2N}$ e w é solução de (2.5) − (2.7) em $(0,T)$. Multiplicando a j-ézima equação (4.1) por $\overline{w}_j(t)$, com $1 \le j \le N$, depois integrando em $(0,T)$ e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\int_0^T\left[u_j''(t)\overline{w}_j(t) - \frac{u_{j+1}(t)-2u_j+u_{j-1}}{h^2}\overline{w}_j(t)\right]dt = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{j=1}^{N}\int_0^T\frac{d}{dt}\left(u_j'(t)\overline{w}_j(t) - u_j(t)\overline{w}_j'(t)\right)dt +\\
+\ &\sum_{j=1}^{N}\int_0^T\left[u_j(t)\overline{w}_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t)-2u_j(t)+u_{j-1}(t)}{h^2}\overline{w}_j(t)\right]dt = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{j=1}^{N}\left(u_j'(t)\overline{w}_j(t) - u_j(t)\overline{w}_j'(t)\right)\Big|_0^T + \sum_{j=1}^{N}\int_0^T u_j(t)\overline{w}_j''(t)dt -\\
-\ &\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{N}\int_0^T(u_{j+1}(t)-2u_j(t)+u_{j-1}(t))\overline{w}_j(t)dt = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{j=1}^{N}\left(u_j'(t)\overline{w}_j(t) - u_j(t)\overline{w}_j'(t)\right)\Big|_0^T + \sum_{j=1}^{N}\int_0^T u_j(t)\overline{w}_j''(t)dt -\\
-\ &\frac{1}{h^2}\int_0^T\left[\sum_{j=1}^{N}u_{j+1}(t)\overline{w}_j(t) - \sum_{j=1}^{N}2u_j(t)\overline{w}_j(t) + \sum_{j=1}^{N}u_{j-1}(t)\overline{w}_j(t)\right]dt = 0,
\end{aligned}$$

transladando os índices dos somatórios dentro da última integral e usando as condições de contorno, obtemos

$$\sum_{j=1}^{N}\left(u_j'(t)\overline{w}_j(t) - u_j(t)\overline{w}_j'(t)\right)\Big|_0^T + \sum_{j=1}^{N}\int_0^T u_j(t)\overline{w}_j''(t)dt -$$

$$
\begin{aligned}
- & \frac{1}{h^2}\int_0^T \left[\sum_{j=2}^{N+1} u_j(t)\overline{w}_{j-1}(t) - \sum_{j=1}^{N} 2u_j(t)\overline{w}_j(t) + \sum_{j=0}^{N-1} u_j(t)\overline{w}_{j+1}(t)\right] dt = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{j=1}^{N} \left(u_j'(t)\overline{w}_j(t) - u_j(t)\overline{w}_j'(t)\right)\Big|_0^T + \sum_{j=1}^{N}\int_0^T u_j(t)\overline{w}_j''(t)dt - \\
- & \frac{1}{h^2}\int_0^T \left[\sum_{j=1}^{N} u_j(t)\overline{w}_{j-1}(t) + u_{N+1}(t)\overline{w}_N(t) - \sum_{j=1}^{N} 2u_j(t)\overline{w}_j(t) + \sum_{j=1}^{N} u_j(t)\overline{w}_{j+1}(t)\right] dt = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{j=1}^{N} \left(u_j'(t)\overline{w}_j(t) - u_j(t)\overline{w}_j'(t)\right)\Big|_0^T + \sum_{j=1}^{N}\int_0^T u_j(t)\overline{w}_j''(t)dt - \\
- & \frac{1}{h^2}\int_0^T \left[\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{w}_{j-1}(t) - 2(t)\overline{w}_j(t) + (t)\overline{w}_{j+1}(t)\right)u_j + v_h(t)\overline{w}_N(t)\right] dt = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{j=1}^{N} \left(u_j'(t)\overline{w}_j(t) - u_j(t)\overline{w}_j'(t)\right)\Big|_0^T + \\
+ & \sum_{j=1}^{N}\int_0^T u_j(t)\left(\overline{w}_j''(t) - \frac{\overline{w}_{j-1}(t) - 2(t)\overline{w}_j(t) + (t)\overline{w}_{j+1}(t)}{h^2}\right)dt - \int_0^T v_h(t)\overline{w}_N(t)dt = 0,
\end{aligned}
$$

desde que w é uma solução do sistema homogêneo, temos

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N} \left(u_j'(t)\overline{w}_j(t) - u_j(t)\overline{w}_j'(t)\right)\Big|_0^T - \int_0^T v_h(t)\overline{w}_N(t)dt = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{j=1}^{N} \left(u_T'(t)\overline{w}_j(T) - u_j(T)\overline{w}_j'(T)\right) - \sum_{j=1}^{N}\left(u_j^1\overline{w}_j^0 - u_j^0\overline{w}_j^1\right) - \int_0^T v_h(t)\overline{w}_N(t)dt = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{j=1}^{N} \left(u_T'(t)\overline{w}_j(T) - u_j(T)\overline{w}_j'(T)\right) + \sum_{j=1}^{N}\left(u_j^0\overline{w}_j^1 - u_j^1\overline{w}_j^0\right) - \int_0^T v_h(t)\overline{w}_N(t)dt = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, se w é uma solução qualquer de $(2.5)-(2.7)$, então

$$
\frac{1}{h}\int_0^T v_h(t)\overline{w}_N(t)dt = h\sum_{j=1}^{N}\left(u_j^0\overline{w}_j^1 - u_j^1\overline{w}_j^0\right) \tag{4.5}
$$

se, esomente se, o sistema (4.1) é controlável, isto é

$$
u_j'(T) = u_j(T) = 0 \quad \forall \quad j = 1, 2, \cdots, N, \tag{4.6}
$$

finalizando a demonstração.

■

Introduzimos a seguinte notação

$$\langle f, g\rangle = h\sum_{j=1}^{N}\left(f_j\overline{g}_{j+N} - f_{j+N}\overline{g}_j\right) \tag{4.7}$$

Onde $f = (f_k)_{1\leq k\leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$ e $g = (g_k)_{1\leq k\leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$, observemos que

$$\langle \alpha f, g\rangle = \alpha \langle f, g\rangle \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{C} \tag{4.8}$$

e

$$\langle f+h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle \quad \forall \quad h \in \mathbb{C}^{2N} \tag{4.9}$$

Lema 4.1.2 *Se $\Phi^n(h)$ e $\Phi^k(h)$ são autovetores do operador L_h então*

$$\left\langle \Phi^n(h), \Phi^k(h)\right\rangle = \frac{ih}{2\,\text{sen}\,\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\delta_{nk} \tag{4.10}$$

Demonstração:
Temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi^n(h), \Phi^k(h)\right\rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{i\lambda_n}\varphi^n(h), -\varphi^n(h)\right), \left(\frac{1}{i\lambda_k}\varphi^k(h), -\varphi^k(h)\right)\right\rangle \\ &= ih\left(\frac{1}{\lambda_k}+\frac{1}{\lambda_n}\right)\sum_{j=1}^{N}\varphi^n(h)\varphi^k(h)\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{j=1}^{N}\varphi^n(h)\varphi^k(h) = \sum_{j=1}^{N}\text{sen}\,(n\pi jh)\,\text{sen}\,(k\pi jh) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\cos((n-k)\pi jh) - \cos((n+k)\pi jh),$$

e, para $q \in \mathbb{Z}^*$,

$$\sum_{j=1}^{N}\cos(q\pi jh) = \begin{cases} 0, & \textbf{se } q \textbf{ par} \\ -1, & \textbf{se } q \textbf{ impar}\end{cases} \tag{4.11}$$

Portanto,

$$\left\langle \Phi^n(h), \Phi^k(h)\right\rangle = \frac{ih}{2\,\text{sen}\,\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\delta_{nk}$$

■

Proposição 4.1.3 *O sistema* $(4.1)-(4.3)$ *é controlável se, e somente se, para uma condição inicial* $U^0 = \sum_{\substack{|k|\leq N \\ k\neq 0}} \beta_k \varphi^k(h)$ *de* $(4.1)-(4.3)$ *existe* $v_h \in L^2(0,T)$, *tal que*

$$\int_0^T v_h(t)e^{-i\lambda_n t}dt = \frac{(-1)^n h}{\text{sen }(n\pi h)}\beta_n. \tag{4.12}$$

Demonstração: Pela proposição (4.1.1) segue-se que $(4.1)-(4.3)$ é controlável se, e somente se, exitir $v_h \in L^2(0,T)$, tal que

$$\frac{1}{h}\int_0^T v_h(t)w_N(t)dt = \left\langle U^0, Z^0 \right\rangle \tag{4.13}$$

onde $Z^0 = \left(w_j^0, w_j^1\right)_{1\leq j\leq N}$ condição inicial e w uma solução do sistema homogêneo. Assim, tomando $Z^0 = \Phi^n(h)$, temos que sua solução correspondente é

$$Z(t) = e^{i\lambda_n t}\Phi^n(h)$$

logo,

$$\overline{w}_N(t) = \overline{\frac{e^{i\lambda_n t}}{i\lambda_n}\text{sen }(n\pi h N)} = \overline{i(-1)^{n+1}\frac{e^{i\lambda_n t}}{\lambda_n}\text{sen }(n\pi h)} = i(-1)^n\frac{e^{-i\lambda_n t}}{\lambda_n}\text{sen }(n\pi h)\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_0^T v_h(t)\overline{w}_N(t)dt &= \left\langle U^0, Z^0 \right\rangle \\
\Leftrightarrow \frac{1}{h}\int_0^T v_h(t)(-1)^n i\frac{e^{-i\lambda_n t}}{\lambda_n}\text{sen }(n\pi h)\,dt &= \sum_{\substack{|k|\leq N \\ k\neq 0}} \beta_k \left\langle \Phi^k(h), \Phi^n(h) \right\rangle \\
\Leftrightarrow \int_0^T v_h(t)e^{-i\lambda_n t}dt &= h\frac{\lambda_n}{i(-1)^n\,\text{sen }(n\pi h)}\sum_{\substack{|k|\leq N \\ k\neq 0}} \beta_k \left\langle \Phi^k(h), \Phi^n(h) \right\rangle \\
\Leftrightarrow \int_0^T v_h(t)e^{-i\lambda_n t}dt &= i\frac{(-1)^{n+1}}{\cos\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\sum_{\substack{|k|\leq N \\ k\neq 0}} \beta_k \left\langle \Phi^k(h), \Phi^n(h) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Usando o lema anterior, obtemos

$$\frac{1}{h}\int_0^T v_h(t)e^{-i\lambda_n t}dt = \frac{(-1)^n h}{2\cos\left(\frac{n\pi h}{2}\right)\,\text{sen }\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}\beta_n = \frac{(-1)^n h}{\text{sen }(n\pi h)}\beta_n.$$

Finalizando a demonstração.

∎

4.2 Controle explícito

Teorema 4.2.1 *Seja* $(\Theta_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$ *uma sequência biortogonal em* $L^2(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ *para uma família de exponenciais* $(e^{i\lambda_m})_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$*, se considerarmos os dados iniciais* $U^0 = \sum_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0}} \beta_k \Phi^k(h)$*, então*

$$v_h(t) = \sum_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0}} \frac{(-1)^k h}{\text{sen }(k\pi h)} \beta_k \Theta_k \left(\frac{T}{2} - t\right) e^{i\lambda_n \frac{T}{2}} \tag{4.14}$$

é uma função controle para o sistema $(4.1)-(4.3)$.

Demonstração: Multiplicando a equação (4.14) por $e^{-i\lambda_n t}$ e integrando na variável do tempo em $(0,T)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T v_h(t)e^{-i\lambda_n t}dt &= \int_0^T \sum_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0}} \frac{(-1)^k h}{\text{sen }(k\pi h)} \beta_k \Theta_k \left(\frac{T}{2} - t\right) e^{i\lambda_n\left(\frac{T}{2}-t\right)}dt \\ &= \sum_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0}} \frac{(-1)^k h}{\text{sen }(k\pi h)} \beta_k \int_0^T \Theta_k \left(\frac{T}{2} - t\right) e^{i\lambda_n\left(\frac{T}{2}-t\right)}dt.\end{aligned}$$

Fazendo $s = \frac{T}{2} - t$ no segundo membro da igualdade, temos que

$$\int_0^T v_h(t)e^{-i\lambda_n t}dt = \sum_{\substack{|k|\leq N\\ k\neq 0}} \frac{(-1)^k h}{\text{sen }(k\pi h)} \beta_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Theta_k(s)\, e^{i\lambda_n s}ds,$$

e, pela biortogonalidade da sequência $(\Theta_m)_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$ à família de exponencias complexas $(e^{i\lambda_m})_{\substack{|m|\leq N\\ m\neq 0}}$, temos

$$\int_0^T v_h(t)e^{-i\lambda_n t}dt = \frac{(-1)^n h}{\text{sen }(n\pi h)}.$$

Portanto, pela proposição (4.1.3) segue-se o resultado.

■

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Nossa principal conclusão a respeito dessas abordagens numéricas diz respeito há construção da função controle para o sistema unidimensional da onda semi-discreto por diferenças finitas, vimos que é possível exibir explicitamente esta função, por ser uma releitura , a técnica usada simplifica muito as contas que foram realizadas. Todo esse contexto possibilita uma série de novas investigações no campo da análise numérica, principalmente com a análise de métodos numéricos mais efcientes para se reproduzir o problema da controlabilidade numérica. Como continuidade deste trabalho, objetivamos analisar o caso em que a equação da onda é semi-discreto por elementos fnitos, aplicações no caso de Sistemas de Timoshenko, aplicações para ondas acopladas bem como para outros sistemas acoplados.

Referências Bibliográficas

[1] Avdonin, S.A. Ivanov, S.A.: *Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems.* Cambridge University Press, 1995.

[2] Castro C.: *Boundary controllability of the one-dimensional wave equation with rapidly oscillating density*, Asymptotic Analysis 20, $317 - 350(1999)$.

[3] D. Romik: *Stirling's Approximation for n!: the Ultimate Short Proof?"*, Amer. Math. Monthly $107(2000), 556 - 557$.

[4] Correia, F.J.S.A.: *Introdução Análise Real*, Universidade Federal do Pará, 2ed., 2012.

[5] Folland, G. B.: *Introduction to partial differential equations*, 2 ed., Princenton University Press, 1995.

[6] Fattorini, H. O.: *Estimates for sequences biortogonal to certain complex exponentials and boundary control of the wave equation.* Lecture Notes in control and Inform. Sci. 2, $111 - 124(1979)$.

[7] Glowinski R.: *Ensuring well-posedness by analogy; Stokes problem and boundary control for the wave equation.* J. Comput. Phys. **103**, $189 - 221(1992)$.

[8] Glowinski R., Li C. H., Lions J. L.: *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation(I). Dirichlet controls: Description of the numerical method.* Jap. J. Appl. Math. 7, $1 - 76(1990)$.

[9] Glowinski R., Lions J. L.: *Exact and approximate controllability for distributed parameter system.* Acta Numerica, pp $159 - 333(1996)$.

[10] Infante J. A., Zuazua E.: *boundary observability for the space semi-discretization of the 1-D wave equation.* M2AN, **33** $407 - 438(1999)$.

[11] Isaakson E., Keller H.B.: *Analysis of Numerical Methods.* John & Sons, (1996).

[12] Levin, B. J.: *Distribution of zeros of entire functions.* Tanslation of math. Monographs. **5**, AMS,(1950).

[13] Lions J. L.: *Contrôllabilité Exacte and pertubations et stabilisation de systèmesdistrbués.* Tome 1, Masson, Paris, $159 - 333(1988)$.

[14] Micu, S.: *Uniform boundary controllability of a semi-discrete* 1-*D wave equation*. Universidad Complutense de Madrid, Madri, (2001).

[15] Negreanu M.: *Métodos numéricos para el análisis de la propagación, observación y control de ondas*. Universidad Complutense de Madrid, Madri, $159-333$(2003).

[16] Olea, María M.: *Análisis Funcional Trabajo Final La Transformada de Fourier*. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, 2012.

[17] RUDIN, Walter: *Real and Complex Analysis.*Second Edition, McGraw-Hill Publishing Co., 1974.

[18] Russel D. L.: *Controllability and stabilization theory for linear partial differential equation: recent progress and open questions*. SIAM Review.20(4), $639-737$(1978).

[19] Young R. M.: *An introduction to nonharmonic Fourier series*. New York: Academic press, (1980).