UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Existência de solução não-negativa para equações indefinidas do tipo Kirchhoff em domínio exterior com crescimento subcrítico ou crítico.

Gabriela Coêlho Rodrigues

Belém
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Gabriela Coêlho Rodrigues

Existência de solução não-negativa para equações indefinidas do tipo Kirchhoff em domínio exterior com crescimento subcrítico ou crítico.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Belém

2017

Dados Internacionais de Catalogação - na - Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós-Graduação do ICEN/UFPA

Rodrigues, Gabriela Coêlho
Existência de solução não-negativa para equações indefinidas do tipo Kirchhoff em domínio exterior com crescimento subcrítico ou crítico/ Gabriela Coêlho Rodrigues; orientador, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo. -2017.
90 f.: il; 29cm
Inclui bibliografias .

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2017.

1. Equações diofantinas. 2. Problemas Kirchhoff – Crescimento crítico e subcrítico. 3. Métodos variacionais. I. Figueiredo, Giovany de Jesus Malcher, orient. II. Título.

CDD – 22 ed. 512.72

Gabriela Coêlho Rodrigues

Existência de solução não-negativa para equações indefinidas do tipo Kirchhoff em domínio exterior com crescimento subcrítico ou crítico.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belém, 17 de Janeiro de 2017.

Resultado: APROVADA

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos (Membro Externo)
Secretaria de Estado de Educação - SEDUC

Ricardo Ruviaro

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro (Membro Externo)
Universidade de Brasília - UnB

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento (Membro)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu sabedoria para ingressar nesse mestrado e a força e capacidade necessárias para concluí-lo.

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo pela paciência e dedicação, explorando meus limites e fazendo provar a mim mesma meu potencial.

Agradeço à minha família, em especial a meus pais, Carlos e Rosa e ao meu irmão pelo apoio, pelas palavras de conforto em momentos em que a calma e esperança de conseguir quase iam embora e pelo incentivo de seguir em frente.

Ao meu namorado, Anderson, por tentar me ajudar sempre que possível e pela compreensão, visto que a falta de tempo reduziu várias visitas.

Dedico um agradecimento especial ao Prof. Dr. Pedro Franco de Sá, por quem tenho enorme admiração e que me ajudou inúmeras vezes do início ao fim desse trajeto.

Agradeço ainda ao Alexandre e à Vanessa que me ensinaram a usar o LaTex (eu nem sabia o que era um preâmbulo) e por último, mas não menos importante, um enorme "muito obrigada" aos outros amigos (que não daria para citar um a um aqui) e a todos que ouviram minhas reclamações e continuaram torcendo por mim.

Posso dizer agora, finalmente e com certeza: Eu consegui!

Gabriela Coêlho Rodrigues

Resumo

Neste trabalho estudaremos os resultados que podem ser encontrados em [6] que trata da existência de solução não-negativa para equações indefinidas do tipo Kirchhoff em domínio exterior, considerando não-linearidade com crescimento subcrítico ou crítico.

Palavras-chave: Problema de Kirchhoff, domínio exterior, crescimento subcrítico, crescimento crítico.

Abstract

In this paper, we will study the results that can be found in [6], which investigates the existence of nonnegative solutions for indefinite Kirchhoff equations in exterior domain, considering nonlinearity with subcritical or critical growth.

Key Words: Kirchhoff problem, exterior domain, subcritical growth, critical growth.

Sumário

Notações

- $\partial\Omega$: Fronteira de Ω;
- $\rightarrow$: Convergência forte;
- $\rightharpoonup$: Convergência fraca;
- $\hookrightarrow$: Imersão contínua;
- $\|u\|$: Norma de u em $H_0^1(\Omega)$;
- $|u|_{L^p(\Omega)}$: Norma de u em $L^p(\Omega)$;
- $L_{loc}(\Omega)$: Conjunto das funções localmente integráveis em Ω.
- $u\mathcal{X}_\Omega$: Função característica de u sobre Ω;
- $B_r(0)$: Bola de centro em 0 e raio r;
- $(f \circ g)(t)$: Composição da função f com a função g, isto é, $f(g(t))$;
- $o_n(1)$: Ordem pequena.

Introdução

Este trabalho tem por objetivo investigar a existência de solução não-negativa para a seguinte classe de problemas não locais do tipo Kirchhoff:

$$(P_{\lambda,\gamma}) \quad \begin{cases} M(\|u\|^2)[-\Delta u + u] = \lambda a(x)g(u) + \gamma|u|^4u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde λ é um parâmetro real positivo, Ω é um domínio exterior de $\mathbb{R}^3$, isto é, $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \Theta$, sendo Θ um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^3$. Neste trabalho estudaremos dois casos do problema $(P_{\lambda,\gamma})$, sendo o primeiro com $\gamma = 0$ (caso subcrítico) e o segundo quando $\gamma = 1$ (caso crítico).

Esta dissertação é um estudo de [6] que trata da existência de solução positiva para equações indefinidas do tipo Kirchhoff em domínio exterior, considerando não-linearidade com crescimento subcrítico ou crítico.

As funções $M\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a\colon \Omega \to \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem a algumas condições estabelecidas posteriormente. Ademais, usaremos

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx.$$

Antes de enunciarmos o principal resultado desta dissertação, necessitamos das seguintes hipóteses sobre $M\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$:

(M_1) A função M é crescente e $0 < M(0) := m_0$.

(M_2) A função $t \mapsto \dfrac{M(t)}{t}$ é decrescente.

A hipótese (M_1) nos permite abordar o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ via Métodos Variacionais, enquanto a hipótese (M_2) nos fornece um crescimento importante que será usado ao longo deste trabalho.

Um exemplo típico de função que satisfaz as condições (M_1) e (M_2) é dado por $M(t) = m_0 + bt$, para uma constante real $b > 0$ e para todo $t \geq 0$.

As hipóteses sobre a função contínua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

(g_1)

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(t)}{|t|^3} = 0.$$

(g_2) Existe $q \in (4, 6)$ tal que

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{g(t)}{|t|^{q-1}} = 0.$$

(g_3) Existe $\theta \in (4, 6)$ tal que $0 < \theta G(t) \leq t g(t)$, para todo $|t| > 0$, onde

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds.$$

Um exemplo típico de função que satisfaz as condições (g_1) a (g_3) dá-se por

$$g(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i t_+^{q_i - 1}$$

com $k \in \mathbb{N}$, $3 < q_i < q$, $C_i > 0$ e $t_+ = \max\{t, 0\}$.

Quanto às hipóteses sobre a função a, temos:

(a_1) A função $a \in C(\Omega, \mathbb{R})$ muda de sinal em Ω.

Antes de enunciarmos a segunda hipótese sobre a função a, definamos os conjuntos $\Omega^+ = \{x \in \Omega : a(x) > 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \Omega : a(x) < 0\}$. Sabe-se então que existe uma função teste $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ sobre

Ω, $\zeta(x) = 1$ em Ω^+ e $\zeta(x) = 0$ em Ω^-. Seja dist$(\overline{\Omega^-}, \overline{\Omega^+})$ a distância entre os conjuntos $\overline{\Omega^-}$ e $\overline{\Omega^+}$. Dependendo desta distância, é possível tomar um $\widetilde{K} := \sup\limits_{\Omega} |\nabla \zeta|$ tão pequeno quanto se queira.

(a_2) A distância dist$(\overline{\Omega^-}, \overline{\Omega^+}) = \delta > 0$ é tal que, tomando θ a constante definida na hipótese (g_3) teremos

$$\widetilde{K} < \frac{\theta}{2} - 2.$$

(a_3) Existe $R_0 > 0$, tal que

$$a(x) < 0 \quad \text{para} \quad |x| \geq R_0 \quad \text{e} \quad \sup_{|x| \geq R} |a(x)||x|^2 < \infty, \quad \forall\, R \geq R_0.$$

A hipótese (a_1) caracteriza o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ como indefinido. Quanto à função ζ, esta será essencial para superar algumas dificuldades ao longo deste trabalho, tais como a validade da condição Palais-Smale.

A hipótese (a_3) é utilizada para superar a não-compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ para $2 < s \leq 6$, uma vez que o domínio Ω não é limitado.

O problema elíptico típico denomina-se Problema de Dirichlet, cuja formulação dá-se por

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} -\Delta u(x) = f\,(x, u(x)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado regular, $f\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma dada função e $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é a função incógnita cuja regularidade depende da regularidade de f.

O problema $(\mathcal{D})$ é dito local, pois em todos os termos envolvidos os valores são calculados pontualmente, o que não ocorre no problema $(P_{\lambda,\gamma})$.

Problemas não-locais do tipo Kirchhoff modelam certos fenômenos, como por exemplo, no caso em que

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) = m_0 + b\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)$$

cujo operador $-\left[m_0 + b\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right]\Delta u$ aparece na equação hiperbólica

$$(\mathcal{K})\quad \begin{cases} u_{tt} - \left[m_0 + b\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right]\Delta u(x) = f\,(x,u) & \text{em } \ \Omega, \times(0,T), \\ u = 0 & \text{sobre } \ \partial\Omega, \times(0,T), \\ u\,(x,0) = u_0(x), & \\ u_t\,(x,0) = u_1(x), & \end{cases}$$

a qual é uma generalização da equação

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

introduzida por Kirchhoff em 1883, ver [9]. Esta é uma extensão da equação clássica da corda vibrante, proposta por D'Alembert, pois descreve a vibração de uma corda elástica levando-se em consideração a mudança no comprimento da mesma durante o movimento. Nesta equação, L é o comprimento da corda, h é a área da secção transversal da corda, E é o módulo de Young do material do qual a corda é feita, ρ é a densidade de massa e P_0 é a tensão inicial.

Alguns dos primeiros estudos envolvendo equações do tipo Kirchhoff são os de Bernstein, em 1987, e Pohozaev, em 1975. Entretanto, o problema $\mathcal{K}$ só começou a receber maior atenção após o trabalho de Lions, em 1978, no qual utilizou-se pela primeira vez argumentos de análise funcional não-linear para atacar problemas não-locais do tipo Kirchhoff. A partir de então o estudo de problemas não-locais avançou muito mais rapidamente.

Dentre os resultados encontrados, podemos destacar o trabalho de Alves, Corrêa e Ma [1] os quais estudaram a existência de solução positiva para o problema

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u(x) = f\left(x,u\right) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $M(t) \geq m_0 > 0$ para todo $t \geq 0$ e f com crescimento subcrítico. Um ano depois, Perera e Zhang [12] estudaram o problema $(\mathcal{P}_1)$ quando $M = a + bt$, $a, b > 0$ e $N = 1, 2$ e 3, utilizando a teoria de índice de Yang e obtendo uma solução não trivial para o problema.

Posteriormente, em 2009, He e Zou [7] estudaram a existência de múltiplas soluções para o problema

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} -\left[a + b\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right]\Delta u(x) = \lambda f\left(x,u\right) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que λ é um parâmetro positivo e f uma função que satisfaz hipóteses mais gerais que no trabalho de Perera e Zhang.

Podemos citar ainda o trabalho de Figueiredo e dos Santos Júnior [5] em que foi estudado o problema

$$(\mathcal{P}_3) \quad \begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u(x) = \lambda f\left(x,u\right) + |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $N = 1, 2$ e 3, $f(x,u) = |u|^{r-2}u$, $1 < r < 2 < q \leq 2^*$, onde λ é um parâmetro positivo e $M \geq m_0 > 0$ é uma função que satisfaz determinadas hipóteses. Utilizando a teoria de gênero de Krasnoselskii eles obtiveram um resultado de múltiplas soluções para o problema $(\mathcal{P}_3)$.

Quanto a este trabalho, o principal resultado que provaremos é:

Teorema 0.1. *Assuma as condições* (M_1), (M_2), (g_1) - (g_3) *e* (a_1) - (a_3). *Se* $\gamma = 0$, *o problema* $(P_{1,0})$ *possui solução não-negativa para todo* $\lambda > 0$. *Se* $\gamma = 1$, *então existe* $\lambda_* > 0$ *tal que o problema* $(P_{\lambda,1})$ *possui solução não-negativa para todo* $\lambda > \lambda_*$.

A fim de demonstrar o teorema anterior seguiremos a seguinte estrutura no decorrer deste estudo: no Capítulo 1 construiremos a estrutura variacional do problema. No Capítulo 2 provaremos que o funcional satisfaz as duas geometrias do passo da montanha e a condição Palais-Smale. Já no Capítulo 3 provaremos a existência de solução não-negativa para o caso subcrítico e, por fim, no Capítulo 4 provaremos o caso crítico.

Capítulo 1

Estrutura Variacional do Problema $(P_{\lambda,\gamma})$

Neste capítulo construiremos a estrutura variacional do problema $(P_{\lambda,\gamma})$. Mais precisamente, associaremos ao problema um funcional $I_{\lambda,\gamma}$ que está bem definido e é de classe C^1. Em seguida calcularemos sua derivada $I'_{\lambda,\gamma}$.

Como queremos encontrar uma solução não-negativa para o problema $(P_{\lambda,\gamma})$, no decorrer deste trabalho assumiremos

$$g(t) = 0, \quad \forall\, t \leq 0.$$

Lembremos ainda que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ se, para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$, u satisfaz

$$M(\|u\|^2)\left[\int_\Omega |\nabla u \nabla \phi| dx + \int_\Omega u\phi dx\right] = \lambda \int_\Omega a(x)g(u)\phi dx + \gamma \int_\Omega |u|^4 u\phi dx.$$

Devemos procurar soluções não-negativas como pontos críticos do funcional $I_{\lambda,\gamma}\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 dado por

$$I_{\lambda,\gamma}(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega a(x)G(u)dx - \frac{\gamma}{6}\int_\Omega u_+^6 dx,$$

onde $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t M(s)ds$ e $u_+(x) := \max\{u(x), 0\}$.

Vamos considerar $I_{\lambda,\gamma}(u) = J_1(u) - J_2(u) - J_3(u)$ com

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2); \quad J_2(u) = \lambda \int_\Omega a(x)G(u)dx \quad \text{e} \quad J_3(u) = \frac{\gamma}{6}\int_\Omega u_+^6 dx.$$

Lema 1.1. *O funcional* $J_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2)$ *é de classe* C^1 *e* $J_1'(u)\phi = M(\|u\|^2)\left[\displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx + \int_\Omega u\phi dx\right]$.

Demonstração. Calcularemos primeiramente a Derivada de Gateaux DJ_1. Consideremos $F(u) = \|u\|^2$, isto é, $F(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx$. Assim,

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}[F(u)]$$

e, aplicando a regra da cadeia,

$$DJ_1(u)\phi = \frac{1}{2}M[F(u)]DF(u)\phi.$$

Pela de $\widehat{M}$ e da continuidade de M o primeiro fator já está bem definido, portanto, resta apenas calcular $DF(u)\phi$. Consideremos $F(u) = F_1(u) + F_2(u)$, com

$$F_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad F_2(u) = \int_\Omega |u|^2 dx.$$

Calcularemos primeiro a Derivada de Gateaux DF_1.

$$\begin{aligned}
\frac{F_1\left(u+t\phi\right)-F_1(u)}{t} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\left(u+t\phi\right)|^2dx-\int_\Omega |\nabla u|^2dx}{t}\\
&= \frac{1}{t}\int_\Omega \left[|\nabla u|^2+2t\nabla u\nabla\phi+t^2|\nabla\phi|^2-|\nabla u|^2\right]dx\\
&= \int_\Omega \frac{2t\nabla u\nabla\phi+t^2|\nabla\phi|^2}{t}dx\\
&= \int_\Omega \left[2\nabla u\nabla\phi+t|\nabla\phi|^2\right]dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
DF_1(u)\phi &= \lim_{t\to 0}\frac{F_1\left(u+t\phi\right)-F_1(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \left[2\nabla u\nabla\phi+t|\nabla\phi|^2\right]dx\\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0}\left[2\nabla u\nabla\phi+t|\nabla\phi|^2\right]dx.
\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$DF_1(u)\phi = 2\int_\Omega \nabla u\nabla\phi dx. \tag{1.1}$$

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, para cada $\phi\in H_0^1(\Omega)$, com $\|\phi\|\leq 1$ temos:

$$\begin{aligned}
|\left[DF_1(u_n)-DF_1(u)\right]\phi| &= \left|2\int_\Omega \nabla u_n\nabla\phi dx-2\int_\Omega \nabla u\nabla\phi dx\right|\\
&\leq 2\int_\Omega |\nabla\left(u_n-u\right)\|\nabla\phi|dx.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\left[DF_1(u_n) - DF_1(u)\right]\phi| &\leq 2\left(\int_\Omega |\nabla\left(u_n - u\right)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}\, \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq 2\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Deste modo, podemos concluir

$$
\|DF_1(u_n) - DF_1(u)\|_{H_0^1(\Omega)} := \sup_{\|\phi\|\leq 1} |\left[DF_1(u_n) - DF_1(u)\right]\phi| \leq 2\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}.
$$

Mostramos assim que quando $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ temos $DF_1(u_n) \to DF_1(u)$ em $H_0^1(\Omega)$, portanto, o operador DF_1 é contínuo e, deste modo, $DF_1 = F_1' \in C\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$. Portanto, por (1.1) temos

$$
F_1'(u)\phi = DF_1(u)\phi = 2\int_\Omega \nabla u \nabla\phi dx. \tag{1.2}
$$

Calcularemos agora a Derivada de Gateaux DF_2.

$$
\begin{aligned}
\frac{F_2\left(u + t\phi\right) - F_2(u)}{t} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |u + t\phi|^2 dx - \int_\Omega |u|^2 dx}{t} \\
&= \frac{1}{t}\int_\Omega \left[u^2 + 2ut\phi + t^2\phi^2 - u^2\right] dx \\
&= \int_\Omega \frac{2ut\phi + t^2\phi^2}{t} dx \\
&= \int_\Omega \left[2u\phi + t\phi^2\right] dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
DF_2(u)\phi &= \lim_{t\to 0} \frac{F_2\left(u+t\phi\right)-F_2(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \left[2u\phi + t\phi^2\right] dx \\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0} \left[2u\phi + t\phi^2\right] dx.
\end{aligned}
$$

Concluímos então que

$$
DF_2(u)\phi = 2\int_\Omega u\phi dx. \tag{1.3}
$$

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, para cada $\phi \in H_0^1(\Omega)$, com $\|\phi\| \le 1$ temos:

$$
|\left[DF_2(u_n) - DF_2(u)\right]\phi| = \left|2\int_\Omega u_n\phi dx - 2\int_\Omega u\phi dx\right| \le 2\int_\Omega |\left(u_n-u\right)||\phi| dx.
$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\left[DF_2(u_n) - DF_2(u)\right]\phi| &\le 2\left(\int_\Omega |\left(u_n-u\right)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\phi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\le 2\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Deste modo, podemos concluir

$$
\|DF_2(u_n)-DF_2(u)\|_{H_0^1(\Omega)} := \sup_{\|\phi\|\le 1} |\left[DF_2(u_n)-DF_2(u)\right]\phi| \le 2\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)}.
$$

Mostramos assim que quando $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ temos $DF_2(u_n) \to DF_2(u)$ em $H_0^1(\Omega)$, portanto, o operador DF_2 é contínuo e, deste modo,

$DF_2 = F_2' \in C\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$. Portanto, por (1.3) temos

$$F_2'(u)\phi = DF_2(u)\phi = 2\int_\Omega u\phi dx. \tag{1.4}$$

Assim, por (1.2) e (1.4), concluímos que

$$DF(u)\phi = F'(u)\phi = F_1'(u)\phi + F_2'(u)\phi = 2\left(\int_\Omega u\phi dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx\right). \tag{1.5}$$

Sendo $DJ_1(u)\phi = \dfrac{1}{2}M[F(u)]DF(u)\phi$, com $F(u) = \|u\|^2$, por (1.5) encontramos

$$J_1'(u)\phi = M(\|u\|^2)\left(\int_\Omega u\phi dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx\right). \tag{1.6}$$

$\square$

Lema 1.2. *O funcional* $J_2(u) = \lambda\displaystyle\int_\Omega a(x)G(u)dx$ *é de classe* C^1 *e* $J_2'(u)\phi = \lambda\displaystyle\int_\Omega a(x)g(u)\phi dx.$

Demonstração. Calcularemos primeiramente a Derivada de Gateaux DJ_2. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \Omega$ e para cada $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$, consideremos a função $h \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = G(u + st\phi)$. Observe que $h'(s) = g(u + st\phi)\, t\phi$, $h(1) = G(u + t\phi)$ e $h(0) = G(u)$.

Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, temos do Teorema do Valor Médio que existe $c \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$, o que implica

$$\left|\frac{G(u + t\phi) - G(u)}{t}\right| = |g(u + ct\phi)\,\phi|.$$

Segue de (g_1) que $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{|t|^3} = 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(t)| \leq \varepsilon|t|^3, \quad \text{quando} \quad |t| < \delta. \tag{1.7}$$

Segue de (g_2) que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{|t|^{q-1}} = 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|g(t)| \leq \varepsilon |t|^{q-1}, \quad \text{quando} \quad |t| > R. \tag{1.8}$$

Além disso, sendo g contínua, temos $\left|\dfrac{g(t)}{|t|^{q-1}}\right|$ limitado no intervalo fechado $[\delta, R]$, portanto, existe um $\alpha > 0$ tal que

$$\left|\frac{g(t)}{|t|^{q-1}}\right| \leq \alpha \quad \forall \quad |t| \in [\delta, R]\,. \tag{1.9}$$

Assim, de (1.7), (1.8) e (1.9), concluímos que para todo $t \in \mathbb{R}$, teremos $g(t) \leq |g(t)| \leq \varepsilon |t|^3 + C_\varepsilon |t|^{q-1}$, onde $C_\varepsilon = \alpha + \varepsilon$.

Em particular, $g\,(u + ct\phi) \leq \varepsilon |u + ct\phi|^3 + C_\varepsilon |u + ct\phi|^{q-1}$. Sendo por hipótese $t \leq 1$, e $c \in (0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|g\,(u + ct\phi)\,||\phi| &\leq \varepsilon |u + ct\phi|^3 |\phi| + C_\varepsilon |u + ct\phi|^{q-1} |\phi| \\
&\leq \varepsilon |u|^3 |\phi| + \varepsilon |ct\phi|^4 + C_\varepsilon |u|^{q-1} |\phi| + C_\varepsilon |ct\phi|^q \\
&\leq \varepsilon |u|^3 |\phi| + C_1 \varepsilon |\phi|^4 + C_\varepsilon |u|^{q-1} |\phi| + C_2 C_\varepsilon |\phi|^q,
\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas.

Note ainda que por hipótese, $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$. Desde que $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^r(\Omega)$, com $2 \leq r \leq 6$, utilizando a desigualdade de Hölder, temos $\varepsilon |u|^3 |\phi| + C_1 \varepsilon |\phi|^4 + C_\varepsilon |u|^{q-1} |\phi| + C_2 C_\varepsilon |\phi|^q \in L^1(\Omega)$. De fato, pois:

- $\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{implica} \quad u \in L^6(\Omega), \quad \text{logo} \quad |u|^3 \in L^2(\Omega), \\ \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \text{assim} \quad \phi \in L^2(\Omega). \end{cases}$

  Portanto, $|u|^3 |\phi| \in L^1(\Omega)$.

- $\phi \in H_0^1(\Omega)$, implicando $\phi \in L^r(\Omega)$, com $2 \leq r \leq 6$. Em particular, temos $\phi \in L^4(\Omega)$, logo, $|\phi|^4 \in L^1(\Omega)$.

- $\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \text{ implica } u \in L^r(\Omega), \text{ logo } u \in L^q(\Omega) \text{ e } |u|^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega). \\ \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ implica } \phi \in L^r(\Omega), \text{ assim } \phi \in L^q(\Omega). \end{cases}$

  Como $q \in (4,6)$, temos $q \in [2,6]$. Sendo $\dfrac{q}{q-1} > 1$ e q expoentes conjugados, concluímos que $|u|^{q-1}|\phi| \in L^1(\Omega)$.

- $\phi \in H_0^1(\Omega)$, logo $\phi \in L^r(\Omega)$, com $2 \leq r \leq 6$. Em particular, temos $\phi \in L^q(\Omega)$, assim, $|\phi|^q \in L^1(\Omega)$.

Além disso, para uma sequência $|t_n| \to 0$ e da continuidade da função g, temos $g\left(u(x) + ct_n\phi(x)\right)\phi(x) \to g\left(u(x)\right)\phi(x)$ pontualmente em Ω. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{J_2\left(u + t_n\phi\right) - J_2(u)}{t_n} &= \frac{\lambda \displaystyle\int_\Omega a(x)G\left(u + t_n\phi\right)dx - \lambda \int_\Omega a(x)G(u)dx}{t_n} \\
&= \frac{\lambda}{t_n}\int_\Omega a(x)\left[G\left(u + t_n\phi\right) - G(u)\right]dx \\
&= \lambda \int_\Omega a(x)\frac{G\left(u + t_n\phi\right) - G(u)}{t_n}dx \\
&= \lambda \int_\Omega a(x)g\left(u(x) + ct_n\phi(x)\right)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema A.1), passando o limite na igualdade anterior com $t_n \to 0$, teremos:

$$\begin{aligned}
DJ_2(u)\phi &= \lim_{t_n \to 0} \frac{J_2\left(u + t_n\phi\right) - J_2(u)}{t_n} \\
&= \lim_{t_n \to 0} \lambda \int_\Omega a(x)g\left(u(x) + ct_n\phi(x)\right)\phi(x)dx \\
&= \lambda \int_\Omega a(x) \lim_{t_n \to 0} g\left(u(x) + ct_n\phi(x)\right)\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

De onde concluímos

$$DJ_2(u)\phi = \lambda \int_\Omega a(x)g(u)\phi dx. \tag{1.10}$$

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Da imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$, com $2 < 3 < r \leq 6$ no caso $N = 3$, obtemos $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$.

Do Teorema de Vainberg (veja Teorema A.2), existe uma função $h_1 \in L^r(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω e $|u_n(x)| \leq h_1(x)$ quase sempre em Ω. Desde que g é, por hipótese, contínua, temos $g\left(u_n(x)\right) \to g\left(u(x)\right)$ quase sempre em Ω.

Da desigualdade triangular, da limitação da função g e da limitação de $|u_n(x)|$ por $h_1(x)$ quase sempre, obtemos

$$\begin{aligned}
|g\left(u_n(x)\right) - g\left(u(x)\right)|^{\frac{q}{q-1}} &\leq \left[|g\left(u_n(x)\right)| + |g\left(u(x)\right)|\right]^{\frac{q}{q-1}} \\
&\leq \left[\left|\varepsilon|u_n(x)|^3 + C_\varepsilon|u_n(x)|^{q-1}\right| + \left|\varepsilon|u(x)|^3 + C_\varepsilon|u(x)|^{q-1}\right|\right]^{\frac{q}{q-1}} \\
&\leq \left|2\varepsilon|h_1(x)|^3 + 2C_\varepsilon|h_1(x)|^{q-1}\right|^{\frac{q}{q-1}} \\
&\leq \left[4\max\{\varepsilon|h_1(x)|^3, C_\varepsilon|h_1(x)|^{q-1}\}\right]^{\frac{q}{q-1}} \\
&\leq k\left[\max\{\varepsilon|h_1(x)|^{\frac{3q}{q-1}}, C_\varepsilon|h_1(x)|^q\}\right],
\end{aligned}$$

onde k é uma constante positiva.

De modo que, novamente pela desigualdade de Hölder e pelas imersões contínuas, $k\left[\max\{\varepsilon|h_1(x)|^{\frac{3q}{q-1}}, C_\varepsilon|h_1(x)|^q\}\right] \in L^1(\Omega)$. De fato, pois $1 < \dfrac{q}{q-1} < 2$, implicando $2 < \dfrac{3q}{q-1} < 6$ e $q \in (4,6) \subset [2,6]$.

Outra vez pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema A.1), $g\left(u_n(x)\right) \to g\left(u(x)\right)$ em $L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$.

Assim, para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|\phi\| \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
|\left[DJ_2(u_n) - DJ_2(u)\right]\phi| &= \left|\lambda \int_\Omega a(x)g(u_n)\phi dx - \lambda \int_\Omega a(x)g(u)\phi dx\right| \\
&\leq \lambda \int_\Omega |a(x)|.|\left[g(u_n) - g(u)\right]|.|\phi| dx.
\end{aligned}
$$

Da hipótese (a_3), existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R > R_0$, temos $|x|^2 > R_0^2$ para $|x| > R$ e

$$
|a(x)| = |a(x)|\frac{|x|^2}{|x|^2} \leq \frac{|a(x)|.|x|^2}{R_0^2}.
$$

Podemos então definir

$$
\beta_1 := \sup_{|x|\geq R} |a(x)| \leq \sup_{|x|\geq R} \frac{|a(x)|.|x|^2}{R_0^2} = \frac{1}{R_0^2} \sup_{|x|\geq R} |a(x)|.|x|^2 < \infty.
$$

Por outro lado, para $|x| < R$, da continuidade da função a, existe um número real positivo β_2 tal que $\beta_2 = \max_{x \in B_R(0)} |a(x)|$. Se tomarmos $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ teremos

$$
|\left[DJ_2(u_n) - DJ_2(u)\right]\phi| \leq \lambda\beta \int_\Omega |\left[g(u_n) - g(u)\right]|.|\phi| dx.
$$

Desde que $\phi \in H_0^1(\Omega)$, temos $\phi \in L^q(\Omega)$ com $q \in (4,6)$ como definido na hipótese (g_2) e, sendo q e $\dfrac{q}{q-1}$ expoentes conjugados, da desigualdade de Hölder,

$$
|\left[DJ_2(u_n) - DJ_2(u)\right]\phi| \leq \lambda\beta |g(u_n) - g(u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} |\phi|_{L^q(\Omega)}.
$$

Das Imersões Contínuas de Sobolev (veja Teorema A.7 no Apêndice), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|\,[DJ_2(u_n) - DJ_2(u)]\,\phi| &\leq C|g(u_n) - g(u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}\|\phi\| \\
&\leq C|g(u_n) - g(u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\|DJ_2(u_n) - DJ_2(u)\| := \sup_{\|\phi\|\leq 1} |\,[DJ_2(u_n) - DJ_2(u)]\,\phi| \leq C|g(u_n) - g(u)|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}.$$

Implicando

$$\lim_{n\to\infty} DJ_2(u_n) = DJ_2(u).$$

Mostramos assim que o operador DJ_2 é contínuo e, deste modo, $DJ_2 = J_2' \in C\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$. Portanto, por (1.10), temos

$$J_2'(u)\phi = DJ_2(u)\phi = \lambda \int_\Omega a(x)g(u)\phi dx. \tag{1.11}$$

□

Lema 1.3. *O funcional* $J_3(u) = \dfrac{\gamma}{6}\displaystyle\int_\Omega u_+^6 dx$ *é de classe* C^1 *e* $J_3'(u)\phi = \gamma \displaystyle\int_\Omega u_+^6 \phi dx.$

Demonstração. Calcularemos primeiramente a Derivada de Gateaux DJ_3. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \Omega$ e para cada $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$, consideremos a função $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = (u_+ + st\phi)^6$. Observe que $h'(s) = 6\left(u_+ + st\phi\right)^5 t\phi$, $h(1) = (u_+ + t\phi)^6$ e $h(0) = u_+^6$.

Desde que h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, segue do Teorema do Valor Médio que existe $c \in (0,1)$ tal que $h(1) - h(0) = h'(c)$, o que implica

$$\left|\frac{(u_{+}+t\phi)^{6}-u_{+}^{6}}{t}\right| = |6\left(u_{+}+st\phi\right)^{5}|.|\phi|.$$

Note ainda que, sendo $0<|t|<1$, pela Imersão Contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$ (veja Teorema A.7 no Apêndice) com $2\leq r\leq 6$ e da desigualdade de Hölder,

$$|6\left(u_{+}+t\phi\right)^{5}||\phi| \leq 6\left[2^{5}\left(|u_{+}|^{5}+|\phi|\right)\phi\right] \in L^{1}(\Omega).$$

De fato, sendo $u,\phi\in H_0^1(\Omega)$, temos $u,\phi\in L^r(\Omega)$. Em particular, $u\in L^6(\Omega)$, de modo que $u^5\in L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$ e $\phi\in L^6(\Omega)$. Como $\frac{6}{5}>1$ e 6 são expoentes conjugados, temos $|u|^5|\phi|\in L^1(\Omega)$ e ainda, é imediato que $\phi^6\in L^1(\Omega)$.

Além disso, para uma sequência $|t_n|\to 0$ temos $\left(u_{+}(x)+t_n\phi(x)\right)^6\phi(x)\to u_{+}^6(x)\phi(x)$ pontualmente em Ω. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{J_3\left(u+t_n\phi\right)-J_3(u)}{t_n} &= \frac{\dfrac{\gamma}{6}\displaystyle\int_\Omega\left(u_{+}+t_n\phi\right)^6dx-\dfrac{\gamma}{6}\displaystyle\int_\Omega u_{+}^6dx}{t_n}\\
&= \frac{\gamma}{6}\int_\Omega\frac{\left(u_{+}+t_n\phi\right)^6-u_{+}^6}{t_n}dx\\
&= \frac{\gamma}{6}\int_\Omega 6\left(u_{+}+t_n\phi\right)^5\phi dx\\
&= \gamma\int_\Omega\left(u_{+}+t_n\phi\right)^5\phi dx.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema

A.1), passando o limite na igualdade acima com $t_n \to 0$, teremos:

$$\begin{aligned} DJ_3(u)\phi &= \lim_{t_n \to 0} \frac{J_3\left(u + t_n\phi\right) - J_3(u)}{t_n} \\ &= \lim_{t_n \to 0} \gamma \int_\Omega \left(u_+ + t_n\phi\right)^5 \phi dx \\ &= \gamma \int_\Omega \lim_{t_n \to 0} \left(u_+ + t_n\phi\right)^5 \phi dx. \end{aligned}$$

De onde concluímos

$$DJ_3(u)\phi = \gamma \int_\Omega \left|u_+\right|^5 \phi dx. \tag{1.12}$$

Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Da imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$, com $2 \leq r \leq 6$ no caso $N = 3$ (veja Teorema A.7 no Apêndice), obtemos $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$.

Do Teorema de Vainberg (veja Teorema A.2), existe uma função $h_2 \in L^r(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω e $|u_n(x)| \leq h_2(x)$ quase sempre em Ω, de modo que $(u_n(x))^5 \to (u(x))^5$ quase sempre em Ω.

Da desigualdade triangular e da limitação de $|u_n(x)|$ por $h_2(x)$ quase sempre,

$$\begin{aligned} \left| \left(u_n(x)\right)^5 - \left(u(x)\right)^5 \right|^{\frac{6}{5}} &\leq \left(\left| \left(u_n(x)\right) \right|^5 + \left| \left(u(x)\right) \right|^5\right)^{\frac{6}{5}} \\ &\leq \left(2|h_2(x)|^5\right)^{\frac{6}{5}} \\ &= 64|h_2(x)|^6. \end{aligned}$$

De modo que, novamente pela Desigualdade de Hölder e pelas imersões contínuas (veja Teorema A.7 no Apêndice), $h_2 \in L^r(\Omega)$. Em particular, $h_2 \in L^6(\Omega)$, implicando $h_2^6 \in L^1(\Omega)$. Outra vez pelo Teorema da Convergência

Dominada de Lebesgue (veja Teorema A.1), $(u_n(x))^5 \to (u(x))^5$ em $L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$.

Assim, para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|\phi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |\left[DJ_3(u_n) - DJ_3(u)\right]\phi| &= \left|\gamma \int_\Omega (u_n(x))^5\, \phi dx - \gamma \int_\Omega (u(x))^5\, \phi dx\right| \\ &\leq \gamma \int_\Omega \left|(u_n(x))^5 - (u(x))^5\right| .|\phi| dx. \end{aligned}$$

Desde que $\phi \in H_0^1(\Omega)$ implica $\phi \in L^6(\Omega)$ e sendo 6 e $\dfrac{6}{5}$ expoentes conjugados, da desigualdade de Hölder,

$$|\left[DJ_3(u_n) - DJ_3(u)\right]\phi| \leq \gamma |u_n^5 - u^5|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} |\phi|_{L^6(\Omega)}.$$

Das Imersões Contínuas de Sobolev (veja Teorema A.7 no Apêndice), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\left[DJ_3(u_n) - DJ_3(u)\right]\phi| \leq C|u_n^5 - u^5|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)} \|\phi\| \leq C|u_n^5 - u^5|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|DJ_3(u_n) - DJ_3(u)\| := \sup_{\|\phi\| \leq 1} |\left[DJ_3(u_n) - DJ_3(u)\right]\phi| \leq C|u_n^5 - u^5|_{L^{\frac{6}{5}}(\Omega)}.$$

Implicando

$$\lim_{n\to\infty} DJ_3(u_n) = DJ_3(u).$$

Mostramos assim que o operador DJ_3 é contínuo e, deste modo, $DJ_3 = J_3' \in C\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$. Portanto, por (1.12) temos

$$J_3'(u)\phi = DJ_3(u)\phi = \gamma \int_\Omega u_+^5 \phi dx. \tag{1.13}$$

$\square$

Assim, sendo $I'_{\lambda,\gamma}(u)\phi = J'_1(u)\phi - J'_2(u)\phi - J'_3(u)\phi, \ \forall \ u, \phi \in H_0^1(\Omega)$. Ademais, pelos lemas 1.1, 1.2 e 1.3 concluímos que

$$I'_{\lambda,\gamma}(u)\phi = M(\|u\|^2)\left(\int_\Omega u\phi dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx\right) - \lambda \int_\Omega a(x)g(u)\phi dx - \gamma \int_\Omega u_+^5 \phi dx,$$

para todos $u, \phi \in H_0^1(\Omega)$.

Capítulo 2

Geometria do Passo da Montanha e Condição Palais-Smale

Neste capítulo mostraremos que o funcional $I_{\lambda,\gamma}$ verifica as duas geometrias do passo da montanha. Depois, usaremos o Teorema do Passo da Montanha (ver [2]) o qual nos permitirá mostrar a limitação da sequência $\{u_n\}$ para por fim provar duas convergências qye serão necessárias na demonstração dos casos subcrítico e crítico do teorema principal deste trabalho.

Lema 2.1. *Assuma as condições* (M_1), (g_1), (g_2) *e* (a_1) - (a_3). *Então existem números positivos* ρ *e* α *tais que*

$$I_{\lambda,\gamma}(u) \geq \alpha > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega); \quad \|u\| = \rho.$$

Demonstração. Por (1.7), (1.8) e (1.9) temos $|g(t)| \leq \varepsilon|t|^3 + C_\varepsilon|t|^{q-1}$. Como, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tem $g(t) \leq |g(t)|$, concluímos

$$g(t) \leq \varepsilon|t|^3 + C_\varepsilon|t|^{q-1}. \tag{2.1}$$

Note ainda que Ω^+ é limitado. De fato, seja $x \in \Omega^+$. Então $x \notin \Omega^-$, logo $|x| < R_0$. Portanto $\Omega^+ \subset B_{R_0}$, de onde conclui-se que Ω^+ é limitado. Assim, existe uma constante $C_0 = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega^+}} a(x)$.

Para $u \in H_0^1(\Omega)$, usando (2.1), temos $g(u) \leq \varepsilon|u|^3 + C_\varepsilon|u|^{q-1}$, de modo que

$$\int_\Omega g(u)dx \leq \int_\Omega \left[\varepsilon|u|^3 + C_\varepsilon|u|^{q-1}\right] dx.$$

Implicando

$$G(u) \leq \frac{\varepsilon}{4}|u|^4 + \frac{C_\varepsilon}{q}|u|^q.$$

Como para $x \in \Omega^+$ tem-se $a(x) > 0$, então da desigualdade acima

$$\begin{aligned} a(x)G(u) &\leq a(x)\left[\frac{\varepsilon}{4}|u|^4 + \frac{C_\varepsilon}{q}|u|^q\right] \\ &\leq \sup_{x \in \overline{\Omega^+}} a(x)\left[\frac{\varepsilon}{4}|u|^4 + \frac{C_\varepsilon}{q}|u|^q\right] \\ &= \frac{C_0\varepsilon}{4}|u|^4 + \frac{C_0 C_\varepsilon}{q}|u|^q. \end{aligned}$$

Ao integrar a desigualdade acima, uma vez que $a(x) \leq 0$ em $\Omega \backslash \Omega^+$

encontramos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} a(x)G(u)dx &= \int_{\Omega^+} a(x)G(u)dx + \int_{\Omega\setminus\Omega^+} a(x)G(u)dx \\ &\leq \int_{\Omega^+} a(x)G(u)dx \\ &\leq \int_{\Omega^+} \left[\frac{C_0\varepsilon}{4}|u|^4 + \frac{C_0C_\varepsilon}{q}|u|^q\right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{C_0\varepsilon}{4}|u|^4 + \frac{C_0C_\varepsilon}{q}|u|^q\right] dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega} a(x)G(u)dx \leq \frac{C_0\varepsilon}{4}\int_{\Omega}|u|^4 + \frac{C_0C_\varepsilon}{q}\int_{\Omega}|u|^q dx. \tag{2.2}$$

Note que, por (M_1) e da definição de $\widehat{M}$,

$$\widehat{M}(\|u\|^2) = \int_0^{\|u\|^2} M(s)ds \geq \int_0^{\|u\|^2} m_0 ds = m_0\|u\|^2.$$

Assim, da forma como foi definido $I_{\lambda,\gamma}(u)$, utilizando (2.2) e a desigualdade anterior, tem-se

$$\begin{aligned}I_{\lambda,\gamma}(u) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda\int_{\Omega} a(x)G(u)dx - \frac{\gamma}{6}\int_{\Omega} u_+^6 dx \\ &\geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - \lambda C_0\left[\frac{\varepsilon}{4}\int_{\Omega}|u|^4 + \frac{C_\varepsilon}{q}\int_{\Omega}|u|^q dx\right] - \frac{\gamma}{6}\int_{\Omega} u_+^6 dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema das Imersões de Sobolev (veja Teorema A.7 no Apêndice), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\lambda C_0\left[\frac{\varepsilon}{4}\int_{\Omega}|u|^4 + \frac{C_\varepsilon}{q}\int_{\Omega}|u|^q dx\right] + \frac{\gamma}{6}\int_{\Omega} u_+^6 dx \leq C\left(\|u\|^4 + \|u\|^q + \|u\|^6\right).$$

Assim,

$$I_{\lambda,\gamma}(u) \geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - C\left(\|u\|^4 + \|u\|^q + \|u\|^6\right).$$

Desde que $q \in (4,6)$, conforme definido em (g_2), e admitindo $\|u\| = \rho > 0$ suficientemente pequeno, segue que existe α positivo tal que

$$I_{\lambda,\gamma}(u) \geq \frac{1}{2}m_0\rho^2 - C\left(\rho^4 + \rho^q + \rho^6\right) \geq \alpha > 0.$$

$\square$

Lema 2.2. *Assuma as condições (M_1), (M_2), (g_1) - (g_3) e (a_1) - (a_3). Então existe uma função $e \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I_{\lambda,\gamma}(e) < 0$ e $\|e\| > \rho$, sendo ρ o mesmo definido no Lema 2.1.*

Demonstração. Da hipótese (g_3), existe $\theta \in (4,6)$ tal que $0 < \theta G(t) \leq tg(t)$ para todo $|t| > 0$. Logo, para todo $|t| > 0$, obtemos

$$\frac{\theta}{t} \leq \frac{g(t)}{G(t)}.$$

Assim, dado $r \geq 1$, sempre que $|t| > r$, temos

$$\int_r^t \frac{\theta}{s}ds \leq \int_r^t \frac{g(s)}{G(s)}ds.$$

Calculando as integrais acima, obtemos

$$\theta \ln s \mid_r^t \leq \ln G(s) \mid_r^t .$$

De modo que

$$\theta\left[\ln t - \ln r\right] \leq \ln G(t) - \ln G(r).$$

Das propriedades da função ln, encontramos

$$\frac{t^\theta}{r^\theta} \leq \frac{G(t)}{G(r)},$$

isto é,

$$G(t) \geq \frac{t^\theta}{r^\theta} G(r).$$

Assim, existe uma constante $C = \dfrac{G(r)}{r^\theta} > 0$ tal que $G(t) \geq Ct^\theta$. Por outro lado, novamente da hipótese (g_3) tem-se $0 < \theta G(t)$ para todo $|t| > 0$, isto é, existe uma constante $D \geq 0$ tal que $G(t) > 0 \geq -D$. Logo, existem constantes positivas C e D tais que $G(t) \geq Ct^\theta - D$, ou ainda,

$$-G(t) \leq D - C|t|^\theta, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Além disso, por (M_2), temos

$$\frac{M(t)}{t} \leq M(1), \quad \forall\, t \geq 1,$$

de onde concluímos

$$\frac{M(t^2)}{t^2} \leq M(1), \quad \forall\, t \geq 1,$$

isto é, $M(t^2) \leq M(1)t^2$, para todo $t \geq 1$.

Por outro lado, para $0 \leq t \leq 1$ temos $t^2 \leq 1$. Como a função M é crescente, encontramos $M(t^2) \leq M(1)$, portanto,

$$M(t^2) \leq M(1) + M(1)t^2 = M(1)(t^2 + 1). \tag{2.4}$$

Assim, teremos

$$\widehat{M}(t^2) = \int_0^{t^2} M(s)ds \leq \int_0^{t^2} M(1)(s+1)ds = M(1)\left(\frac{t^4}{2} + t^2\right). \tag{2.5}$$

Considere $v_0 \in C_0^\infty(\Omega^+)$, com $v_0 > 0$ em Ω^+ e $\|v_0\| = 1$. Usando (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\gamma}(tv_0) &= \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|tv_0\|^2\right) - \lambda\int_\Omega a(x)G(tv_0)\,dx - \frac{\gamma}{6}\int_\Omega (tv_0)^6\,dx \\
&\le \frac{1}{2}\widehat{M}\left(t^2\|v_0\|^2\right) - \lambda\int_{\mathrm{supp}(v_0)} a(x)G(tv_0)\,dx - \frac{t^6\gamma}{6}\int_\Omega v_0^6 dx \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}\left(t^2\right) - \lambda\int_{\mathrm{supp}(v_0)} a(x)G(tv_0)\,dx - \frac{t^6\gamma}{6}\int_\Omega v_0^6 dx \\
&\le \frac{1}{2}\widehat{M}\left(t^2\right) + \lambda\int_{\mathrm{supp}(v_0)} a(x)\left[D - C|tv_0|^\theta\right]dx - \frac{t^6\gamma}{6}\int_\Omega v_0^6 dx.
\end{aligned}$$

De modo que

$$I_{\lambda,\gamma}(tv_0) \le \frac{1}{2}\widehat{M}\left(t^2\right) - \lambda C t^\theta\int_{\mathrm{supp}(v_0)} a(x)|v_0|^\theta dx + \lambda D\int_{\mathrm{supp}(v_0)} a(x)dx - \frac{t^6\gamma}{6}\int_\Omega v_0^6 dx. \tag{2.6}$$

Aplicando (2.5) em (2.6), obtemos

$$I_{\lambda,\gamma}(tv_0) \le \frac{1}{2}M(1)\left(\frac{t^4}{2} + t^2\right) - \lambda C t^\theta\int_{\mathrm{supp}(v_0)} a(x)|v_0|^\theta dx + \lambda D\int_{\mathrm{supp}(v_0)} a(x)dx - \frac{t^6\gamma}{6}\int_\Omega v_0^6 dx.$$

Usando $C_0 = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega^+}} a(x)$ como no Lema 2.1 e fazendo $|\mathrm{supp}\,(v_0)\,|$ a medida de Lebesgue do suporte de v_0, obtemos

$$I_{\lambda,\gamma}(tv_0) \le \frac{1}{2}M(1)\left(\frac{t^4}{2} + t^2\right) - \lambda C C_0 t^\theta\int_{\mathrm{supp}(v_0)} |v_0|^\theta dx + \lambda D C_0|\mathrm{supp}\,(v_0)\,| - \frac{t^6\gamma}{6}\int_\Omega v_0^6 dx.$$

Portanto, desde que $4 < \theta < 6$, para $e = t_* v_0$, com $t_* > 0$ suficientemente grande, teremos $\|e\| = \|t_* v_0\| = t_*\|v_0\| = t_* > \rho$ (definido no Lema 2.1) e $I_{\lambda,\gamma}(e) < 0$. $\square$

Verificadas as duas geometrias do passo da montanha (Lema 2.1 e Lema 2.2), utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha (de Ambrosetti e Rabinowitz) sem a condição de Palais-Smale na versão de [14] (ver Teorema

A.5 no Apêndice) e, considerando o espaço de Banach $H_0^1(\Omega)$, concluímos que existe uma sequência $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$I_{\lambda,\gamma}(u_n) \to c_{\lambda,\gamma} \ \text{ e } \ I'_{\lambda,\gamma}(u_n) \to 0, \tag{2.7}$$

onde

$$c_{\lambda,\gamma} = \inf_{\eta\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,\gamma}\left(\eta(t)\right) > 0 \tag{2.8}$$

e

$$\Gamma = \{\eta \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega)\right);\ \ \eta(0) = 0 \ \text{ e } \ \eta(1) = e\}. \tag{2.9}$$

Lema 2.3. *Seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência que satisfaça (2.7). Então $\{u_n\}$ é limitada.*

Demonstração. Sejam ζ a função teste cujo supremo $\widetilde{K}$ aparece na hipótese (a_2) e $\{u_n\}$ uma sequência que satisfaça (2.7). Assim, $I_{\lambda,\gamma}(u_n)$ é, por definição, convergente e existe $C > 0$ tal que $\|I_{\lambda,\gamma}(u_n)\| \leq C$.

Por outro lado,

$$-\frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right) \leq \left|\frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right)\right|.$$

Da definição de funcional linear contínuo encontramos

$$\left|\frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right)\right| \leq \frac{1}{\theta}\|I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\|\|\zeta u_n\|.$$

Do modo como foi definido, temos $\zeta(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$. Assim,

$$\left|\frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right)\right| \leq \frac{1}{\theta}\|I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\|\|u_n\|.$$

Observe que $\|I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\| \to 0$, pois $\{u_n\}$ é uma sequência Palais-Smale para o funcional $I_{\lambda,\gamma}$, portanto, das desigualdades acima, teremos (para n

suficientemente grande)

$$-\frac{1}{\theta}I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right) \leq \|u_n\|.$$

Assim, existe uma constante positiva C, tal que

$$I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta}I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right) \leq \|u_n\| + C. \tag{2.10}$$

Por outro lado, obtemos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta}I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda\int_\Omega a(x)G(u_n)dx + \frac{\gamma}{\theta}\int_\Omega (u_n)_+^5\left(\zeta u_n\right)dx \\
&- \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\left(\int_\Omega u_n\left(\zeta u_n\right)dx + \int_\Omega \nabla u_n \nabla\left(\zeta u_n\right)dx\right) - \frac{\gamma}{6}\int_\Omega (u_n)_+^6 dx \\
&+ \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega a(x)g(u_n)\left(\zeta u_n\right)dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a regra do produto do gradiente teremos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta}I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda\int_\Omega a(x)G(u_n)dx + \frac{\gamma}{\theta}\int_\Omega (u_n)_+^5\left(\zeta u_n\right)dx \\
&- \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\left(\int_\Omega \zeta(x)u_n^2 dx + \int_\Omega u_n \nabla\zeta\nabla u_n dx + \int_\Omega \zeta(x)\nabla u_n^2 dx\right) \\
&- \frac{\gamma}{6}\int_\Omega (u_n)_+^6 dx + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega a(x)g(u_n)\left(\zeta u_n\right)dx.
\end{aligned}$$

De modo que encontramos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta}I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\left(\zeta u_n\right) &\geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda\int_\Omega a(x)G(u_n)dx + \frac{\gamma}{\theta}\int_\Omega (u_n)_+^5\left(\zeta u_n\right)dx \\
&- \frac{1}{\theta}M(\|u_n\|^2)\left(\int_\Omega |\zeta(x)||u_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla\zeta||\nabla u_n||u_n| dx + \int_\Omega |\zeta(x)||\nabla u_n|^2 dx\right) \\
&- \frac{\gamma}{6}\int_\Omega (u_n)_+^6 dx + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega a(x)g(u_n)\left(\zeta u_n\right)dx.
\end{aligned}$$

Agrupando a segunda e a última parcelas, temos

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\,(\zeta u_n) \geq\ & \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda \int_\Omega a(x)\left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n)(\zeta u_n)\right] dx \\
& - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2)\left(\int_\Omega |\zeta(x)\|u_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla\zeta\|\nabla u_n\|u_n| dx + \int_\Omega |\zeta(x)\|\nabla u_n|^2 dx\right) \\
& + \frac{\gamma}{\theta}\int_\Omega (u_n)_+^5\,(\zeta u_n)\,dx - \frac{\gamma}{6}\int_\Omega (u_n)_+^6 dx.
\end{aligned}
$$

Sendo por hipótese $\widetilde{K} := \sup\limits_\Omega |\nabla\zeta|$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\,(\zeta u_n) \geq\ & \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda \int_\Omega a(x)\left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n)(\zeta u_n)\right] dx \\
& - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2)\left(\int_\Omega |\zeta(x)\|u_n|^2 dx + \widetilde{K}\int_\Omega |\nabla u_n||u_n| dx + \int_\Omega |\zeta(x)\|\nabla u_n|^2 dx\right) \\
& + \frac{\gamma}{\theta}\int_\Omega (u_n)_+^5\,(\zeta u_n)\,dx - \frac{\gamma}{6}\int_\Omega (u_n)_+^6 dx.
\end{aligned}
$$

Pela hipótese (a_3) e desde que $\zeta(x) = 0$ em Ω^-, temos

$$
\int_\Omega a(x)\left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n)(\zeta u_n)\right] dx = \int_{\Omega^+} a(x)\left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n)(\zeta u_n)\right] dx,
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\,(\zeta u_n) \geq\ & \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda \int_{\Omega^+} a(x)\left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n)(\zeta u_n)\right] dx \\
& - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2)\left(\int_\Omega |\zeta(x)\|u_n|^2 dx + \widetilde{K}\int_\Omega |\nabla u_n||u_n| dx + \int_\Omega |\zeta(x)\|\nabla u_n|^2 dx\right) \\
& + \frac{\gamma}{\theta}\int_\Omega (u_n)_+^5\,(\zeta u_n)\,dx - \frac{\gamma}{6}\int_\Omega (u_n)_+^6 dx.
\end{aligned}
$$

Majorando $\zeta(x)$ por 1, obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\,(\zeta u_n) \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda \int_{\Omega^+} a(x) \left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n) u_n \right] dx \\ - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2) \left(\int_\Omega |u_n|^2 dx + \widetilde{K} \int_\Omega |\nabla u_n||u_n| dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \right) \\ + \frac{\gamma}{\theta} \int_\Omega (u_n)_+^6 dx - \frac{\gamma}{6} \int_\Omega (u_n)_+^6 dx. \end{aligned}$$

De modo que, agrupando as duas últimas parcelas, encontramos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\,(\zeta u_n) \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda \int_{\Omega^+} a(x) \left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n) u_n \right] dx \\ + \frac{6-\theta}{6\theta}\gamma \int_{\Omega^+} (u_n)_+^6 dx - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2) \left(\|u_n\|^2 + \int_\Omega \widetilde{K} |\nabla u_n\|u_n| dx \right). \end{aligned}$$

Note que $4 < \theta < 6$ implica $-6 < -\theta < -4$. Assim, $0 < 6 - \theta < 2$ e, portanto,

$$0 < \frac{6-\theta}{6\theta} < \frac{2}{6\theta}.$$

Aplicando este resultado na desigualdade anterior, tem-se

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\,(\zeta u_n) \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \lambda \int_{\Omega^+} a(x) \left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n) u_n \right] dx \\ - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2) \left(\|u_n\|^2 + \int_\Omega \widetilde{K} |\nabla u_n\|u_n| dx \right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por (g_3), existe $\theta \in (4, 6)$ tal que $0 < \theta G(t) \leq t g(t), \ \ \forall\, t > 0$. Assim

$$\lambda \int_{\Omega^+} a(x) \left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} g(u_n) u_n \right] \leq \lambda \int_{\Omega^+} a(x) \left[G(u_n) - \frac{1}{\theta} \theta G(u_n) \right] = 0.$$

Usando a desigualdade acima em (2.11), temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\,(\zeta u_n) \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\ - \frac{1}{\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2) \int_\Omega |\nabla u_n||u_n| dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Aplicando a desigualdade de Young para o último termo de (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2) \int_\Omega |\nabla u_n||u_n| dx &\leq \frac{1}{\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2) \left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_n|^2 dx\right] \\ &= \frac{1}{2\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2) \left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega |u_n|^2 dx\right] \\ &= \frac{1}{2\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$-\frac{1}{\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2) \int_\Omega |\nabla u_n||u_n| dx \geq -\frac{1}{2\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2.$$

Substituindo esta desigualdade em (2.12), obtemos

$$I_{\lambda,\gamma}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{\lambda,\gamma}(u_n)\,(\zeta u_n) \geq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \frac{1}{2\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2. \tag{2.13}$$

Por (2.10) e (2.13) encontramos

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\theta} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \frac{1}{2\theta}\widetilde{K} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \leq \|u_n\| + C. \tag{2.14}$$

Da definição de $\widehat{M}$ e da hipótese (M_2), temos

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds = \int_0^t \frac{M(s)}{s} s ds \geq \int_0^t \frac{M(t)}{t} s ds = \frac{t}{2} M(t). \tag{2.15}$$

E novamente por (M_1),

$$\widehat{M}(\|u_n\|^2) = \int_0^{\|u_n\|^2} M(s)ds \geq \int_0^{\|u_n\|^2} m_0 ds = m_0\|u_n\|^2. \tag{2.16}$$

Assim, por (2.14), (2.15) e (2.16) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\theta}\widetilde{K}\right) &\geq \frac{1}{4}M(\|u_n\|^2) - M(\|u_n\|^2)\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\theta}\widetilde{K}\right) \\
&= M(\|u_n\|^2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2\theta}\widetilde{K}\right)\|u_n\|^2 \\
&\geq m_0\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2\theta}\widetilde{K}\right)\|u_n\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$m_0\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2\theta}\widetilde{K}\right)\|u_n\|^2 \leq \|u_n\| + C.$$

Desde que δ é o que aparece em (a_2), concluímos que

$$K_0 = m_0\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2\theta}\widetilde{K}\right)$$

é positivo, implicando que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço Banach reflexivo, existe ainda $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \tag{2.17}$$

e

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^s_{\text{loc}}(\Omega) \tag{2.18}$$

para $2 \leq s < 6$.

Podemos agora enunciar e demonstrar o próximo lema.

Lema 2.4. *Seja* $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ *uma sequência que verifica (2.17) e (2.18). Então*

$$\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n dx \to \int_\Omega a(x)g(u)udx \tag{2.19}$$

e

$$\int_\Omega a(x)g(u_n)udx \to \int_\Omega a(x)g(u)udx. \tag{2.20}$$

Demonstração. Seja R_0 a constante positiva que aparece na hipótese (a_3), de modo que $a(x) < 0$ se $|x| \geq R_0$ e $\sup\limits_{|x|\geq R} |a(x)||x|^2 < \infty$ para todo $R \geq R_0$.

Se $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ verifica (2.17) e (2.18), existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, com $2 \leq s < 6$.

Note que podemos escrever

$$\Omega = (\Omega \cap B_R) \cup (\Omega \backslash B_R),$$

onde $\Omega \cap B_R$ é um conjunto limitado. Assim, de (2.18) e pelo Teorema da Vainberg (veja Teorema A.2), existe $h_1 \in L^s(\Omega \cap B_R)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em $\Omega \cap B_R$ e $|u_n(x)| \leq h_1(x)$ em $\Omega \cap B_R$ quase sempre.

Assim, da continuidade da função g, obtemos

$$g(u_n(x))\, u_n(x) \to g(u(x))\, u(x) \quad \text{em} \quad \Omega \cap B_R$$

e

$$\begin{aligned} |g(u_n(x))\, u_n(x)| &\leq \left| \left(\varepsilon |u_n(x)|^3 + C_\varepsilon |u_n(x)|^{q-1}\right) u_n(x) \right| \\ &\leq \left| \varepsilon |u_n(x)|^4 + C_\varepsilon |u_n(x)|^q \right|. \end{aligned}$$

Deste modo, $|g(u_n(x))\,u_n(x)| \leq \varepsilon h_1^4(x) + C_\varepsilon h_1^q(x)$ quase sempre em $\Omega \cap B_R$. Desde que $h_1^4, h_1^q \in L^1(\Omega \cap B_R)$, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema A.1), temos

$$\int_{\Omega \cap B_R} a(x) g(u_n) u_n dx \to \int_{\Omega \cap B_R} a(x) g(u) u dx. \tag{2.21}$$

Resta mostrar que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Omega \backslash B_R} a(x) g(u_n) u_n dx = 0$$

uniformemente em n.

Por (2.1) segue que $g(u_n) \leq \varepsilon |u_n|^3 + C_\varepsilon |u_n|^{q-1}$, logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \backslash B_R} a(x) g(u_n) u_n dx &= \int_{\Omega \backslash B_R} a(x)|x|^2 \left[\frac{g(u_n)u_n}{|x|^2}\right] dx \\
&\leq \sup_{|x| \geq R} |a(x)| |x|^2 \int_{\Omega \backslash B_R} \frac{\left[\varepsilon |u_n|^3 + C_\varepsilon |u_n|^{q-1}\right] u_n}{|x|^2} dx \\
&\leq C \int_{\Omega \backslash B_R} \frac{\varepsilon |u_n|^4 + C_\varepsilon |u_n|^q}{|x|^2} dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega \backslash B_R} a(x) g(u_n) u_n dx \leq C\varepsilon \int_{\Omega \backslash B_R} \frac{|u_n|^4}{|x|^2} dx + CC_\varepsilon \int_{\Omega \backslash B_R} \frac{|u_n|^q}{|x|^2} dx. \tag{2.22}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder no último termo da desigualdade acima, obtemos

$$\int_{\Omega \backslash B_R} \frac{|u_n|^q}{|x|^2} dx = \int_{\Omega \backslash B_R} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^q dx \leq \left(\int_{\Omega \backslash B_R} \frac{1}{|x|^{2r}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega \backslash B_R} |u_n|^{qs} dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Note que

$$\left(\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\Omega\backslash B_R}|u_n|^{qs}dx\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\Omega\backslash B_R}|u_n|^{qs}dx\right)^{\frac{q}{qs}}$$
$$= \left(\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{r}}|u_n|^q_{L^{qs}(\Omega\backslash B_R)}.$$

Logo, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{|u_n|^q}{|x|^2}dx \leq \alpha\left(\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{2.23}$$

Por uma mudança de variável, tomando $|x| = \rho$, teremos

$$\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx = \int_R^\infty \frac{1}{\rho^{2r}}\rho^3 d\rho = \int_R^\infty \rho^{3-2r}d\rho.$$

Observe que a função será integrável apenas se $3 - 2r < 0$. Assim, adotando convenientemente $r = \dfrac{6}{6-q}$, onde $q \in (4,6)$ como definido na hipótese (g_2), teremos $\dfrac{3}{2} < r < \infty$ de modo que

$$\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx < \infty,$$

portanto, $\dfrac{1}{|x|^{2r}} \in L^1(\Omega\backslash B_R)$.

Considerando uma sequência $\{R_n\}$ de raios, obtemos

$$\int_{\Omega\backslash B_{R_n}}\frac{1}{|x|^{2r}}dx = \int_\Omega \frac{1}{|x|^{2r}}\mathcal{X}_{\Omega\backslash B_{R_n}}(x)dx,$$

onde $\dfrac{1}{|x|^{2r}}\mathcal{X}_{\Omega\backslash B_{R_n}}(x) \to 0$ quase sempre quando $R_n \to \infty$, em que $\dfrac{1}{|x|^{2r}}\mathcal{X}_{\Omega\backslash B_{R_n}}$ é a função característica de $\dfrac{1}{|x|^{2r}}$ sobre $\Omega\backslash B_{R_n}$. Assim, pelo

Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema A.1),

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx = 0,$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\varepsilon) \geq R_0$ tal que

$$\left(\int_{\Omega\backslash B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx\right)^{1/r} < \varepsilon. \tag{2.24}$$

Numa análise semelhante para o primeiro termo de (2.22), teremos $r = \dfrac{6}{6-q}$ implicando $\dfrac{3}{2} < r$ para $q = 4$, de modo que as estimativas acima continuarão válidas. Assim, usando (2.24) em (2.23) e aplicando (2.23) em (2.22), encontramos

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Omega\backslash B_R} a(x)g(u_n)u_n dx = 0. \tag{2.25}$$

Lembrando que $\Omega = (\Omega\cap B_R)\cup(\Omega\backslash B_R)$ para todo R, podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} a(x)g(u_n)u_n dx = \lim_{n\to\infty}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{\Omega\backslash B_R} a(x)g(u_n)u_n dx + \int_{\Omega\cap B_R} a(x)g(u_n)u_n dx\right].$$

Observe que por (2.25) o limite acima reduz-se a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} a(x)g(u_n)u_n dx = \lim_{n\to\infty}\lim_{R\to\infty}\int_{\Omega\cap B_R} a(x)g(u_n)u_n dx.$$

Como a convergência (2.25) é uniforme em n, podemos fazer

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} a(x)g(u_n)u_n dx = \lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\cap B_R} a(x)g(u_n)u_n dx.$$

Assim, por (2.21)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} a(x)g(u_n)u_n dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\Omega\cap B_R} a(x)g(u)udx = \int_{\Omega} a(x)g(u)udx,$$

o que prova (2.19).

A demonstração de (2.20) seguirá um raciocínio análogo. Tomando novamente a constante positiva que aparece na hipótese (a_3) e $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência que verifica (2.17) e (2.18), existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^s_{\text{loc}}(\Omega)$, com $2 \leq s < 6$.

Iremos escrever outra vez $\Omega = (\Omega \cap B_R) \cup (\Omega \backslash B_R)$. Sendo $\Omega \cap B_R$ um conjunto limitado, de (2.18) e pelo Teorema da Vainberg (veja Teorema A.2), existe $h_2 \in L^s(\Omega \cap B_R)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em $\Omega \cap B_R$ e $|u_n(x)| \leq h_2(x)$ em $\Omega \cap B_R$ quase sempre.

Assim, da continuidade da função g, obtemos

$$g(u_n(x))\, u(x) \to g(u(x))\, u(x) \quad \text{em} \quad \Omega \cap B_R$$

e

$$\begin{aligned} |g(u_n(x))\, u(x)| &\leq \left|\left(\varepsilon |u_n(x)|^3 + C_\varepsilon |u_n(x)|^{q-1}\right) u(x)\right| \\ &\leq \left|\left(\varepsilon h_2^3(x) + C_\varepsilon h_2^{q-1}(x)\right) h_2(x)\right|. \end{aligned}$$

Deste modo, $|g(u_n(x))\, u(x)| \leq \varepsilon h_2^4(x) + C_\varepsilon h_2^q(x)$ quase sempre em $\Omega \cap B_R$. Desde que $h_2^4, h_2^q \in L^1(\Omega \cap B_R)$, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema A.1), temos

$$\int_{\Omega\cap B_R} a(x)g(u_n)udx \to \int_{\Omega\cap B_R} a(x)g(u)udx. \qquad (2.26)$$

Resta mostrar que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Omega\setminus B_R} a(x)g(u_n)udx = 0$$

uniformemente em n.

Por (2.1) segue que $g(u_n) \leq \varepsilon|u_n|^3 + C_\varepsilon|u_n|^{q-1}$, logo,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B_R} a(x)g(u_n)udx &= \int_{\Omega\setminus B_R} a(x)|x|^2\left[\frac{g(u_n)u}{|x|^2}\right]dx\\ &\leq \sup_{|x|\geq R}|a(x)\|x|^2\int_{\Omega\setminus B_R}\frac{\left[\varepsilon|u_n|^3 + C_\varepsilon|u_n|^{q-1}\right]u}{|x|^2}dx\\ &\leq C\int_{\Omega\setminus B_R}\frac{\left[\varepsilon|u_n|^3 + C_\varepsilon|u_n|^{q-1}\right]u}{|x|^2}dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega\setminus B_R} a(x)g(u_n)udx \leq C\varepsilon\int_{\Omega\setminus B_R}\frac{|u_n|^3u}{|x|^2}dx + CC_\varepsilon\int_{\Omega\setminus B_R}\frac{|u_n|^{q-1}u}{|x|^2}dx. \quad (2.27)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder no último termo da desigualdade anterior, obtemos

$$\int_{\Omega\setminus B_R}\frac{|u_n|^{q-1}u}{|x|^2}dx \leq \left(\int_{\Omega\setminus B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx\right)^{1/r}\left(\int_{\Omega\setminus B_R} u^s|u_n|^{(q-1)s}dx\right)^{(q-1)/(q-1)s}.$$

Como mostrado na demonstração de (2.19), a função $\dfrac{1}{|x|^{2r}}$ será integrável apenas se $3-2r<0$. Assim, adotando novamente $r = \dfrac{6}{6-q}$, onde $q \in (4,6)$ como definido na hipótese (g_2), teremos $\dfrac{3}{2} < r < \infty$ de modo que

$$\int_{\Omega\setminus B_R}\frac{1}{|x|^{2r}}dx < \infty,$$

portanto, $\dfrac{1}{|x|^{2r}} \in L^1(\Omega \backslash B_R)$.

Considerando novamente uma sequência $\{R_n\}$ de raios, obtemos

$$\int_{\Omega \backslash B_{R_n}} \frac{1}{|x|^{2r}} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{2r}} \mathcal{X}_{\Omega \backslash B_{R_n}}(x) dx,$$

onde $\dfrac{1}{|x|^{2r}} \mathcal{X}_{\Omega \backslash B_{R_n}}(x) \to 0$ quase sempre quando $R_n \to \infty$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema A.1),

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Omega \backslash B_R} \frac{1}{|x|^{2r}} dx = 0,$$

isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\varepsilon) \geq R_0$ tal que

$$\left(\int_{\Omega \backslash B_R} \frac{1}{|x|^{2r}} dx \right)^{1/r} < \varepsilon. \tag{2.28}$$

Ademais, sendo r e s expoentes conjugados, teremos nas condições acima $s = 6/q$. Aplicando a desigualdade de Hölder generalizada,

$$\left(\int_{\Omega \backslash B_R} u^s |u_n|^{(q-1)s} dx \right)^{(q-1)/(q-1)s} \leq \left(\int_{\Omega \backslash B_R} u^{m_1} dx \right)^{1/m_1} \left(\int_{\Omega \backslash B_R} |u_n|^{(q-1)m_2} dx \right)^{1/m_2},$$

com $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} = \dfrac{1}{s} = \dfrac{q}{6}$.

Sendo por hipótese $u \in H_0^1(\Omega)$, pelas Imersões Contínuas de Sobolev (veja Teorema A.7 no Apêndice) $u \in L^6(\Omega)$, isto é, existe $\beta_1 > 0$ tal que, para $m_1 = 6$,

$$\left(\int_{\Omega \backslash B_R} u^{m_1} dx \right)^{1/m_1} \leq \left(\int_{\Omega} u^{m_1} dx \right)^{1/m_1} \leq \beta_1. \tag{2.29}$$

Analogamente, sendo $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, pelas Imersões Contínuas de Sobolev (veja Teorema A.7 no Apêndice) $\{u_n\} \subset L^{m_2(q-1)}(\Omega)$ se, e somente se, $2 \leq m_2\,(q-1) \leq 6$. Note, porém, que para $m_1 = 6$ como adotado acima teremos

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{m_2} = \frac{q}{6},$$

de modo que $m_2\,(q-1) = 6$. Logo, $\{u_n\} \subset L^{m_2(q-1)}(\Omega)$, implicando $(u_n)^{q-1} \subset L^{m_2}(\Omega)$, isto é, existe $\beta_2 > 0$ tal que, para $m_2 = 6$,

$$\left(\int_{\Omega \backslash B_R} |u_n|^{(q-1)m_2} dx \right)^{1/m_2} \leq \left(\int_{\Omega} |u_n|^{(q-1)m_2} dx \right)^{1/m_2} \leq \beta_2. \tag{2.30}$$

Numa análise semelhante para o primeiro termo de (2.27), teremos $r = \dfrac{6}{6-q}$ implicando $\dfrac{3}{2} < r$ para $q = 4$, de modo que as estimativas acima continuarão válidas. Assim, usando (2.28), (2.29) e (2.30) em (2.27), encontramos

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Omega \backslash B_R} a(x) g(u_n) u dx = 0. \tag{2.31}$$

Lembrando que $\Omega = (\Omega \cap B_R) \cup (\Omega \backslash B_R)$ para todo R, podemos escrever

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} a(x) g(u_n) u dx = \lim_{n \to \infty} \lim_{R \to \infty} \left[\int_{\Omega \backslash B_R} a(x) g(u_n) u dx + \int_{\Omega \cap B_R} a(x) g(u_n) u dx \right].$$

Observe que por (2.31) o limite acima reduz-se a

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} a(x) g(u_n) u dx = \lim_{n \to \infty} \lim_{R \to \infty} \int_{\Omega \cap B_R} a(x) g(u_n) u dx.$$

Como a convergência (2.31) é uniforme em n, podemos fazer

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} a(x) g(u_n) u dx = \lim_{R \to \infty} \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega \cap B_R} a(x) g(u_n) u dx.$$

Assim, por (2.26)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} a(x)g(u_n)udx = \lim_{R\to\infty}\int_{\Omega\cap B_R} a(x)g(u)udx = \int_{\Omega} a(x)g(u)udx,$$

o que prova (2.20), concluindo a demonstração do lema. $\square$

Capítulo 3

Demonstração do Teorema Principal - Caso Subcrítico

Neste capítulo, provaremos o Teorema 1.1 no caso subcrítico e para tal consideraremos $\gamma = 0$ sem qualquer restrição sobre o parâmetro λ.

Sem perda de generalidade, tomaremos $\lambda = 1$. Assim, o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ se reduz a

$$(P_{1,0}) \quad \begin{cases} M(\|u\|^2)[-\Delta u + u] = a(x)g(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cujo funcional associado é dado por

$$I_0(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega a(x)G(u)dx.$$

Seja $\{u_n\} \in H_0^1(\Omega)$ uma sequência que satisfaz (2.7). Pelo Lema 2.3, concluímos que $\{u_n\}$ é limitada e, sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço Banach reflexivo, a menos de subsequência $\{u_n\}$ converge fracamente para algum $u \in H_0^1(\Omega)$ [ver [4], p.69]. Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert, se $\{u_n\}$ converge fraco para u, então

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|. \tag{3.1}$$

De fato, se $u = 0$ o resultado é imediato. Já para $u \neq 0$, temos pela convergência fraca $\langle u_n, u\rangle \to \langle u, u\rangle = \|u\|^2$ e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\langle u_n, u\rangle \leq \|u_n\|.\|u\|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite com $n \to \infty$, temos

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.\|u\| \geq \liminf_{n\to\infty} \langle u_n, u\rangle = \|u\|^2$$

que implica

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

O que prova (3.1). Além disso, pela desigualdade triangular, teremos

$$\|u_n - u\| \leq \|u_n\| + \|u\| \leq k_1 + \|u\|, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

sendo k_1 uma constante real positiva.

Mostramos então que $(u_n - u)$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$. Logo, por (2.7), teremos $I_0'(u_n)\,(u_n - u) \to 0$, isto é, para todo n suficientemente grande, existe $o_n(1)$ tal que

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I_0'(u_n)u_n - I_0'(u_n)u \\ &= M\left(\|u_n\|^2\right)\left[\int_\Omega |u_n|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\right] - \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n dx \\ &- M\left(\|u_n\|^2\right)\left[\int_\Omega |u_n|.|u| dx + \int_\Omega |\nabla u_n|.|\nabla u| dx\right] + \int_\Omega a(x)g(u_n)u dx. \end{aligned}$$

Considerando a convergência fraca de $\{u_n\}$ e as convergências (2.19) e

(2.20) demonstradas no Lema 2.4, encontramos

$$o_n(1) = M\left(\|u_n\|^2\right)\left[\|u_n\|^2 - \|u\|^2\right].$$

Pela hipótese (M_1), $\|u_n\| \geq 0$ implica $M\left(\|u_n\|^2\right) \geq m_0$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u\|,$$

o que implica a convergência

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0,$$

pois $\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2 < u_n, u > + \|u\|^2$.

Sendo I_0 um funcional de classe C^1, considerando (2.7) e as convergências acima, segue que $I_0'(u) = 0$, portanto, u é solução fraca do problema $(P_{1,0})$. Além disso, se u é solução fraca para o problema $(P_{1,0})$, então $I_0'(u)u_- = 0$, onde $u_- := \max\{-u, 0\}$. Portanto,

$$M\left(\|u\|^2\right)\left[\int_\Omega \nabla u \nabla u_- dx + \int_\Omega u u_- dx\right] - \int_\Omega a(x)g(u)u_- dx = 0,$$

isto é,

$$M\left(\|u\|^2\right)\left[\int_\Omega \nabla u \nabla u_- dx + \int_\Omega u u_- dx\right] = \int_\Omega a(x)g(u)u_- dx. \tag{3.2}$$

Observe que $u = u_+ - u_-$, logo, podemos escrever (3.2) na forma

$$M\left(\|u\|^2\right)\left[\int_\Omega \nabla\left(u_+ - u_-\right)\nabla u_- dx + \int_\Omega \left(u_+ - u_-\right)u_- dx\right] = \int_\Omega a(x)g\left(u_+ - u_-\right)u_- dx. \tag{3.3}$$

Recordemos que u_+ e u_- possuem suportes disjuntos, então

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\left(u_+ - u_-\right)\nabla u_- dx + \int_\Omega \left(u_+ - u_-\right)u_- dx &= \int_\Omega \nabla u_+ \nabla u_- dx - \int_\Omega |\nabla u_-|^2 dx \\
&\quad + \int_\Omega u_+ u_- dx - \int_\Omega |u_-|^2 dx \\
&= -\left[\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dx + \int_\Omega |u_-|^2 dx\right] \\
&= -\|u_-\|^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo este resultado em (3.3), temos

$$
-M\left(\|u\|^2\right)\|u_-\|^2 = \int_\Omega a(x)g\left(-u_-\right)u_- dx.
$$

Como $g(t) = 0$ para todo $t \leq 0$, concluímos que $-\|u_-\|^2 = 0$, o que implica $u_- \equiv 0$. Portanto, $u \equiv u_+ \geq 0$ quase sempre em Ω.

Capítulo 4

Demonstração do Teorema Principal - Caso Crítico

No caso crítico consideramos $\gamma = 1$, de modo que o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ toma a forma

$$(P_{\lambda,1}) \quad \begin{cases} M(\|u\|^2)[-\Delta u + u] = \lambda a(x)g(u) + |u|^4 u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cujo funcional associado é dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega a(x)G(u)dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6 dx.$$

Para provar o Teorema 1.1 no caso $\gamma = 1$, lembremos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (veja Teorema A.7 no Apêndice). Considerando S a melhor constante de Sobolev para a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, então S é a maior constante tal que

$$S|u|_{L^6(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$S := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^6 dx\right)^{1/3}}. \tag{4.1}$$

Sabemos ainda que S não depende do conjunto Ω e nunca é atingido, exceto quando $\Omega = \mathbb{R}^3$. Neste caso,

$$S := \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla U|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |U|^6 dx\right)^{1/3}}, \tag{4.2}$$

onde $U(x) = \dfrac{C_3}{|x|^2+1}$, sendo C_3 a constante tal que $-\Delta U = U^5$ em $\mathbb{R}^3$.

A partir de agora, provaremos uma estimativa para $c_{\lambda,1}$ como definido em (2.8). Para simplificar a notação, adotaremos $c_{\lambda,1} := c_\lambda$.

Lema 4.1. *Supondo válidas as hipóteses* (M_1), (M_2), (a_1) - (a_3) *e* (g_1) - (g_3) *para o problema* $(P_{\lambda,1})$, *então*

$$\lim_{\lambda\to\infty} c_\lambda = 0.$$

Demonstração. Seja $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ a função dada na demonstração do Lema 2.2, isto é, $v_0 \geq 0$ em Ω^+ e $\|v_0\| = 1$. Desde que o funcional I_λ verifica as duas geometrias do Teorema do Passo da Montanha (como mostrado no Lema 2.1 e no Lema 2.2), existe t_λ tal que

$$I_\lambda(t_\lambda v_0) = \max_{t\geq 0} I_\lambda(tv_0) \quad \text{e} \quad I'_\lambda(t_\lambda v_0) = 0.$$

Sendo v_0 normalizado, temos

$$
\begin{aligned}
I_\lambda'\left(t_\lambda v_0\right)t_\lambda v_0 &= M\left(\|t_\lambda v_0\|^2\right)\left(\int_\Omega \left(t_\lambda v_0\right)\left(t_\lambda v_0\right)dx + \int_\Omega \nabla\left(t_\lambda v_0\right)\nabla\left(t_\lambda v_0\right)dx\right)\\
&- \int_\Omega \left(t_\lambda v_0\right)_+^5 t_\lambda v_0 dx - \lambda\int_\Omega a(x)g\left(t_\lambda v_0\right)t_\lambda v_0 dx\\
&= M\left(t_\lambda^2\|v_0\|^2\right)\left(\int_\Omega |t_\lambda v_0|^2dx + \int_\Omega |\nabla\left(t_\lambda v_0\right)|^2 dx\right) - \int_\Omega \left(t_\lambda v_0\right)^6 dx\\
&- \lambda\int_\Omega a(x)g\left(t_\lambda v_0\right)t_\lambda v_0 dx\\
&= t_\lambda^2 M\left(t_\lambda^2\right) - t_\lambda^6\int_\Omega (v_0)^6dx - \lambda\int_\Omega a(x)g\left(t_\lambda v_0\right)t_\lambda v_0 dx.
\end{aligned}
$$

Desde que $I_\lambda'\left(t_\lambda v_0\right)t_\lambda v_0 = 0$, obtemos

$$
t_\lambda^2 M\left(t_\lambda^2\right) = t_\lambda^6\int_\Omega (v_0)^6dx + \lambda\int_\Omega a(x)g\left(t_\lambda v_0\right)t_\lambda v_0 dx. \tag{4.3}
$$

Assim,

$$
t_\lambda^2 M\left(t_\lambda^2\right) \geq t_\lambda^6\int_\Omega (v_0)^6dx.
$$

Da desigualdade (2.4)

$$
t_\lambda^2\left(t_\lambda^2+1\right)M(1) \geq t_\lambda^2 M\left(t_\lambda^2\right) \geq t_\lambda^6\int_\Omega (v_0)^6dx.
$$

Portanto, para qualquer sequência $\lambda_n \to \infty$, existe uma sequência $t_{\lambda_n} \to t_0$ para algum número real $t_0 \geq 0$, caso contrário, teríamos $M(1) \geq \infty$, um absurdo. Mostraremos agora que $t_0 = 0$. Se $t_0 > 0$, teríamos uma contradição. De fato, a equação (4.3) implica que a expressão

$$
t_{\lambda_n}^6\int_\Omega (v_0)^6dx + \lambda_n\int_\Omega a(x)g\left(t_{\lambda_n}v_0\right)t_{\lambda_n}v_0 dx
$$

é limitada, o que por sua vez nos remete a afirmar que

$$\lambda_n \int_\Omega a(x)g\left(t_{\lambda_n}v_0\right)t_{\lambda_n}v_0dx \leq t_{\lambda_n}^6\left|-\int_\Omega (v_0)^6dx\right| + t_{\lambda_n}^2 M\left(t_{\lambda_n}^2\right)$$

é também limitada, o que não pode acontecer, uma vez que

$$\lim_{\lambda_n\to\infty}\lambda_n \int_\Omega a(x)g\left(t_{\lambda_n}v_0\right)t_{\lambda_n}v_0dx = \infty.$$

Portanto, $t_0 = 0$.

Usando as notações e resultados do Lema 2.2, definiremos o caminho $t(t_*v_0) = te := \eta_*(t)$, de modo que $\eta_*(0) = 0$ e $I_\lambda(e) = I_\lambda\left(\eta_*(1)\right) < 0$ e, consequentemente, $\eta_*(t) \in \Gamma$, como definido em (2.9). Finalmente, de (2.8) e da definição de c_λ, temos

$$0 < c_\lambda = \inf_{\eta\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\lambda\left(\eta(t)\right) \leq \max_{t\in[0,1]} I_\lambda\left(\eta_*(t)\right) = I_\lambda\left(t_\lambda v_0\right) \leq \frac{1}{2}\widehat{M}(t_\lambda^2).$$

Pela continuidade da função $\widehat{M}$ junto com o limite $t_{\lambda_n} \to t_0 = 0$ temos $\frac{1}{2}\widehat{M}(t_\lambda^2) \to 0$ o que implica (pelo Teorema do Confronto)

$$\lim_{\lambda\to\infty} c_\lambda = 0.$$

□

Demonstração do Teorema 1.1 no caso crítico ($\gamma = 1$)

Mostraremos que a sequência Palais-Smale $\{u_n\}$ que satisfaz (2.7) possui uma subsequência (que continuaremos denotando por $\{u_n\}$) tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^6dx = \int_\Omega |u|^6dx. \tag{4.4}$$

e ainda

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 = \|u\|^2. \tag{4.5}$$

Sendo $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$, então, se necessário estendendo por zero as funções fora de Ω, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ tem-se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

Assim, a fim de provar (4.4), a menos de subsequência, podemos supor $|u_n|^6 \rightharpoonup |u|^6 + \nu$ e $|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup |\nabla u|^2 + \mu$ no sentido das medidas de Radon. Assim, pelo Lema de Concentração e Compacidade de Lions (veja Lema A.6 no Apêndice), existe um conjunto Λ de índices, no máximo enumerável, duas famílias de números reais não negativos $\{\nu_i\}_{i\in\Lambda}$ e $\{\mu_i\}_{i\in\Lambda}$ e sequências $\{x_i\}_{i\in\Lambda} \subset \mathbb{R}^3$ tais que

$$\nu = \sum_{i\in\Lambda}\nu_i\delta_{x_i}, \quad \mu \geq \sum_{i\in\Lambda}\mu_i\delta_{x_i} \quad \text{e} \quad S\nu_i^{\frac{1}{3}} \leq \mu_i,$$

para todo $i \in \Lambda$ onde $\langle\delta_{x_i}, \phi\rangle = \phi(x_i)$ é a chamada Medida de Dirac de massa 1 em $x_i \in \Omega$.

Afirmamos agora que $\Lambda = \emptyset$. Argumentando por contradição, assuma $\Lambda \neq \emptyset$. Considere uma função $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, [0,1])$, tal que $\phi \equiv 1$ sobre $B_1(0)$, $\phi \equiv 0$ sobre $\mathbb{R}^3\backslash B_2(0)$ e $|\nabla\phi|_\infty \leq 2$.

Como $\{u_n\}$ é, por hipótese, uma sequência Palais-Smale que verifica (2.7), então pelo Lema 2.3 $\{u_n\}$ é limitada. Além disso, fixando $i \in \Lambda$, definamos uma função $\psi_\varrho(x) := \phi\left(\dfrac{x - x_i}{\varrho}\right)$, onde $\varrho > 0$, então ψ_ϱ também é teste e restrita ao intervalo $[0,1]$.

Mostraremos que $\{u_n\psi_\varrho\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato,

$$\|u_n\psi_\varrho\|^2 = \int_\Omega |\nabla(u_n\psi_\varrho)|^2 dx + \int_\Omega |u_n\psi_\varrho|^2 dx.$$

Como $\psi_\varrho(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$, temos

$$\|u_n\psi_\varrho\|^2 \leq \int_\Omega |\nabla\left(u_n\psi_\varrho\right)|^2 dx + \int_\Omega |u_n|^2 dx.$$

Desenvolvendo $|\nabla\left(u_n\psi_\varrho\right)|^2$ encontramos

$$\|u_n\psi_\varrho\|^2 \leq \int_\Omega |u_n\nabla\psi_\varrho + \psi_\varrho\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega |u_n|^2 dx.$$

Recordemos que para quaisquer α, β, existe $C > 0$ tal que $(\alpha+\beta)^2 \leq C\left(\alpha^2+\beta^2\right)$. Assim,

$$\|u_n\psi_\varrho\|^2 \leq C\left[\int_\Omega |u_n\nabla\psi_\varrho|^2 dx + \int_\Omega |\psi_\varrho\nabla u_n|^2 dx\right] + \int_\Omega |u_n|^2 dx,$$

e novamente de $\psi_\varrho(x) \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_n\psi_\varrho\|^2 &\leq C\left[\int_\Omega |u_n\nabla\psi_\varrho|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\right] + \int_\Omega |u_n|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega |u_n\nabla\psi_\varrho|^2 dx + C\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Omega |u_n|^2 dx.\end{aligned}$$

Tomando $\overline{C} = \max\{C, 1\}$ na desigualdade anterior,

$$\|u_n\psi_\varrho\|^2 \leq \int_\Omega |u_n|^2|\nabla\psi_\varrho|^2 dx + \overline{C}\|u_n\|^2.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes 3 e $3/2$, temos

$$\begin{aligned}\|u_n\psi_\varrho\|^2 &\leq \left[\int_\Omega \left(|u_n|^2\right)^3\right]^{1/3}\left[\int_\Omega \left(|\nabla\psi_\varrho|^2\right)^{3/2} dx\right]^{2/3} \\ &= |u_n|^2_{L^6(\Omega)}|\nabla\psi_\varrho|^2_{L^3(\Omega)} + C\|u_n\|^2.\end{aligned}$$

Da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ (veja Teorema A.7 no Apêndice),

$$\|u_n\psi_\varrho\|^2 \leq C_1\|u_n\|^2|\nabla\psi_\varrho|^2_{L^3(\Omega)} + C\|u_n\|^2.$$

Observe que, da forma como foi definida, fixado $x_i \in \Omega$, temos $\psi_\varrho \equiv 1$ em $B_\varrho(x_i)$ e supp$\psi_\varrho \subset B_{2\varrho}(x_i)$. Assim,

$$|\nabla\psi_\varrho|^2_{L^3(\Omega)} = \left[\left(\int_\Omega |\nabla\psi_\varrho|^3\right)^{1/3}\right]^2 = \left[\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\setminus B_\varrho(x_i)} |\nabla\psi_\varrho|^3\right)^{1/3}\right]^2.$$

Usando mudança de variáveis, obtemos

$$|\nabla\psi_\varrho|^2_{L^3(\Omega)} = \left[\left(\int_{B_2(0)} |\nabla\phi|^3\right)^{1/3}\right]^2 = \left[\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^3\right)^{1/3}\right]^2 = |\nabla\phi|^2_{L^3(\Omega)}.$$

Deste modo,

$$\|u_n\psi_\varrho\|^2 \leq C_1\|u_n\|^2|\nabla\phi|^2_{L^3(\Omega)} + C\|u_n\|^2.$$

Desde que $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ é limitado e $|\nabla\phi|_\infty \leq 2$, concluímos que existe uma constante real $k > 0$ tal que $\|u_n\psi_\varrho\|^2 \leq k$, provando que $\{u_n\psi_\varrho\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Deste modo, teremos novamente de (2.7) $I_1'(u_n)\,(u_n\psi_\varrho) \to 0$, isto é,

$$\begin{aligned} o_n(1) = {} & M\left(\|u_n\|^2\right)\left[\int_\Omega \nabla u_n\nabla\left(u_n\psi_\varrho\right)dx + \int_\Omega u_n\left(u_n\psi_\varrho\right)dx\right] - \int_\Omega (u_n)_+^5\, u_n\psi_\varrho dx \\ & - \lambda\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n\psi_\varrho dx \\ & = M\left(\|u_n\|^2\right)\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2\nabla\psi_\varrho dx + \int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx + \int_\Omega |u_n|^2\psi_\varrho dx\right] \\ & - \int_\Omega (u_n)^6\,\psi_\varrho dx - \lambda\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n\psi_\varrho dx. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$M\left(\|u_n\|^2\right)\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx+M\left(\|u_n\|^2\right)\left[\int_\Omega|\nabla u_n|^2\nabla\psi_\varrho dx+\int_\Omega|u_n|^2\psi_\varrho dx\right]=$$
$$+\lambda\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n\psi_\varrho dx+\int_\Omega (u_n)^6\,\psi_\varrho dx+o_n(1). \tag{4.6}$$

Provaremos que

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right]=0, \tag{4.7}$$

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^2\psi_\varrho dx\right]=0 \tag{4.8}$$

e

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n\psi_\varrho dx\right]=0. \tag{4.9}$$

Note que

$$\left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\leq\int_\Omega|\nabla u_n|.|u_n\nabla\psi_\varrho|dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes 2, temos

$$\left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\leq\left(\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|u_n\nabla\psi_\varrho|^2dx\right)^{1/2},$$

e desde que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\leq C\left(\int_\Omega|u_n\nabla\psi_\varrho|^2dx\right)^{1/2}.$$

Observe ainda que, da forma como foi definida, fixado $x_i\in\Omega$, $\psi_\varrho(x)\equiv 1$ sobre $B_\varrho(x_i)$ e $\mathrm{supp}\psi_\varrho\subset B_{2\varrho}(x_i)$. Assim,

$$\left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\psi_\varrho dx\right|\leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\setminus B_\varrho(x_i)}|u_n|^2|\nabla\psi_\varrho|^2dx\right)^{1/2}.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, temos $u_n \to u$ em $L^2_{loc}(\Omega)$, portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \psi_\varrho dx\right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\backslash B_\varrho(x_i)} |u|^2|\nabla\psi_\varrho|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder, agora com expoentes 3 e 3/2, encontramos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \psi_\varrho dx\right| \leq C\left[\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\backslash B_\varrho(x_i)} \left(|u|^2\right)^3 dx\right)^{1/3}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\backslash B_\varrho(x_i)} \left(|\nabla\psi_\varrho|^2\right)^{3/2} dx\right)^{2/3}\right]^{1/2},$$

ou ainda

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \psi_\varrho dx\right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\backslash B_\varrho(x_i)} |u|^6 dx\right)^{1/6}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\backslash B_\varrho(x_i)} |\nabla\psi_\varrho|^3 dx\right)^{1/3}.$$

Por mudança de variável, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \psi_\varrho dx\right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)\backslash B_\varrho(x_i)} |u|^6 dx\right)^{1/6}\left(\int_{B_2(0)} |\nabla\phi|^3 dx\right)^{1/3}.$$

Desde que $\lim_{\varrho\to 0}\int_\Omega |u|^6 \mathcal{X}_{B_{2\varrho}(x_i)\backslash B_\varrho(x_i)} dx = 0$, então

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \psi_\varrho dx\right] = 0,$$

o que prova (4.7).

Observe ainda que

$$\left|\int_\Omega u_n^2 \psi_\varrho dx\right| \leq \int_\Omega |u_n|.|u_n\psi_\varrho| dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes 2, temos

$$\left|\int_\Omega u_n^2\psi_\varrho dx\right| \leq \left(\int_\Omega |u_n|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |u_n\psi_\varrho|^2 dx\right)^{1/2},$$

e desde que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega u_n^2\psi_\varrho dx\right| \leq C\left(\int_\Omega |u_n\psi_\varrho|^2 dx\right)^{1/2},$$

Novamente, da forma como foi definida, fixado $x_i \in \Omega$, temos $\psi_\varrho(x) \equiv 1$ sobre $B_\varrho(x_i)$ e $\text{supp}\psi_\varrho \subset B_{2\varrho}(x_i)$. Assim,

$$\left|\int_\Omega u_n^2\psi_\varrho dx\right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u_n\psi_\varrho|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, temos $u_n \to u$ em $L^2_{loc}(\Omega)$, portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n^2\psi_\varrho dx\right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u\psi_\varrho|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder, agora com expoentes 3 e 3/2, encontramos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n^2\psi_\varrho dx\right| \leq C\left[\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} \left(|u|^2\right)^3 dx\right)^{1/3}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} \left(|\psi_\varrho|^2\right)^{3/2} dx\right)^{2/3}\right]^{1/2},$$

ou ainda

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega u_n^2\psi_\varrho dx\right| \leq C\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^6 dx\right)^{1/6}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\psi_\varrho|^3 dx\right)^{1/3}.$$

Sendo $\psi_\varrho(x) \equiv 1$ em $B_\varrho(x_i)$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega u_n^2 \psi_\varrho dx \right| \leq C \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^6 dx \right)^{1/6} |B_\varrho(x_i)|^{1/3},$$

onde $|B_\varrho(x_i)|$ é a medida de Lebesgue do conjunto $B_\varrho(x_i)$.

Desde que

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_\Omega |u|^6 \mathcal{X}_{B_{2\varrho}(x_i)} dx = 0,$$

então

$$\lim_{\varrho\to 0} \left[\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n^2 \psi_\varrho dx \right] = 0,$$

o que prova (4.8).

Por fim, observe que

$$\left| \int_\Omega a(x) g(u_n) u_n \psi_\varrho dx \right| \leq \int_\Omega |a(x) g(u_n)|.|u_n \psi_\varrho| dx.$$

Novamente, da forma como foi definida, fixado $x_i \in \Omega$, temos $\psi_\varrho(x) \equiv 1$ sobre $B_\varrho(x_i)$ e supp$\psi_\varrho \subset B_{2\varrho}(x_i)$, de modo que

$$\left| \int_\Omega a(x) g(u_n) u_n \psi_\varrho dx \right| \leq \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |a(x) g(u_n)|.|u_n \psi_\varrho| dx.$$

Sendo a uma função contínua e $B_{2\varrho}(x_i)$ limitado, existe uma constante positiva k tal que $|a(x)| \leq k$ em $B_{2\varrho}(x_i)$. Assim,

$$\left| \int_\Omega a(x) g(u_n) u_n \psi_\varrho dx \right| \leq k \int_{B_{2\varrho}(x_i)} |g(u_n)|.|u_n \psi_\varrho| dx.$$

Da condição de crescimento da função g, temos

$$\left| \int_\Omega a(x) g(u_n) u_n \psi_\varrho dx \right| \leq k \int_{B_{2\varrho}(x_i)} \left(\varepsilon |u_n|^3 + C_\varepsilon |u_n|^{q-1} \right) |u_n \psi_\varrho| dx,$$

ou ainda

$$\left|\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n\psi_\varrho dx\right| \leq k\int_{B_{2\varrho}(x_i)}\left(\varepsilon|u_n|^4 + C_\varepsilon|u_n|^q\right)|\psi_\varrho|dx.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, temos $u_n \to u$ em $L^s_{loc}(\Omega)$, com $2 \leq s < 6$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n\psi_\varrho dx\right| \leq k\varepsilon\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^4|\psi_\varrho|dx + kC_\varepsilon\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^q|\psi_\varrho|dx. \quad (4.10)$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes 3/2 e 3 na primeira parcela do segundo membro de (4.10), temos

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^4|\psi_\varrho|dx \leq \left[\int_{B_{2\varrho}(x_i)}\left(|u|^4\right)^{3/2}dx\right]^{2/3}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|\psi_\varrho|^3dx\right)^{1/3},$$

ou ainda,

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^4|\psi_\varrho|dx \leq \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^6dx\right)^{2/3}\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|\psi_\varrho|^3dx\right)^{1/3}.$$

Sendo $\psi_\varrho \equiv 1$ em $B_\varrho(x_i)$, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^4|\psi_\varrho|dx &\leq \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^6dx\right)^{2/3}\left(\int_{B_\varrho(x_i)}|\psi_\varrho|^3dx\right)^{1/3}\\ &= \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)}|u|^6dx\right)^{2/3}|B_\varrho(x_i)|^{1/3},\end{aligned}$$

onde $|B_\varrho(x_i)|$ é a medida de Lebesgue do conjunto $B_\varrho(x_i)$.

Analogamente, usando a desigualdade de Hölder com expoentes $6/q$ e

$6/(6-q)$ na segunda parcela do segundo membro de (4.10), temos

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^q|\psi_\varrho|dx \leq \left[\int_{B_{2\varrho}(x_i)} (|u|^q)^{\frac{6}{q}}\, dx\right]^{q/6} \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\psi_\varrho|^{\frac{6}{6-q}} dx\right)^{(6-q)/6},$$

ou ainda,

$$\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^q|\psi_\varrho|dx \leq \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^6 dx\right)^{q/6} \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |\psi_\varrho|^{\frac{6}{6-q}} dx\right)^{(6-q)/6} dx.$$

Sendo $\psi_\varrho \equiv 1$ em $B_\varrho(x_i)$, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^q|\psi_\varrho|dx &\leq \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^6 dx\right)^{q/6} \left(\int_{B_\varrho(x_i)} |\psi_\varrho|^{\frac{6}{6-q}} dx\right)^{(6-q)/6} \\ &= \left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^6 dx\right)^{q/6} |B_\varrho(x_i)|^{(6-q)/6},\end{aligned}$$

onde $|B_\varrho(x_i)|$ é a medida de Lebesgue do conjunto $B_\varrho(x_i)$.

Assim, substituindo as desigualdades anteriores em (4.10), encontramos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n\psi_\varrho dx\right| &\leq k\varepsilon\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^6 dx\right)^{2/3} |B_\varrho(x_i)|^{1/3} \\ &\quad + kC_\varepsilon\left(\int_{B_{2\varrho}(x_i)} |u|^6 dx\right)^{q/6} |B_\varrho(x_i)|^{(6-q/6}.\end{aligned}$$

Desde que

$$\lim_{\varrho\to 0}\int_\Omega |u|^6\mathcal{X}_{B_{2\varrho}(x_i)}dx = 0,$$

então

$$\lim_{\varrho\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n\psi_\varrho dx\right] = 0,$$

o que prova (4.9).

Substituindo (4.7), (4.8) e (4.9) em (4.6) e usando o Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (veja Lema A.6 no Apêndice), obtemos

$$M\left(\|u\|^2\right)\int_\Omega \psi_\varrho \mu dx \leq \int_\Omega \psi_\varrho \nu dx + o_\varrho(1).$$

Sendo M crescente, temos

$$m_0\int_\Omega \psi_\varrho \mu dx \leq M\left(\|u\|^2\right)\int_\Omega \psi_\varrho \mu dx \leq \int_\Omega \psi_\varrho \nu dx + o_\varrho(1).$$

Assim,

$$m_0\int_\Omega \psi_\varrho d\mu \leq \int_\Omega \psi_\varrho d\nu + o_\varrho(1).$$

Fazendo $\varrho \to 0$ concluímos que $m_0\mu_i \leq \nu_i$ para todo i fixado. Utilizando a teoria das medidas de Radon, segue que $m_0 S\nu_i \leq m_0\mu_i \leq \nu_i$, logo, $m_0 S \leq \nu_i^{\frac{2}{3}}$. Deste modo,

$$\nu_i \geq (m_0 S)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.11}$$

Devemos mostrar agora que a desigualdade acima não pode ocorrer, o que provará que o conjunto Λ é vazio. Argumentando por contradição, suponha $\nu_i \geq (m_0 S)^{\frac{3}{2}}$ para algum $i \in \Lambda$. Assim, desde que que $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_{c_\lambda}$, temos

$$I(u_n) - \frac{1}{\theta}I'(u_n)u_n \to c_\lambda,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
c_\lambda + o_n(1) &= I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n)u_n \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \frac{1}{\theta} M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 - \lambda \int_\Omega a(x)G(u_n)dx \\
&+ \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega a(x)g(u_n)u_n dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega u_n^6 dx \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \frac{1}{\theta} M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega a(x)\left[u_n g(u_n) - \theta G(u_n)\right]dx \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega u_n^6 dx.
\end{aligned}$$

Observe que por (a_3), existe $R_0 > 0$ tal que $a(x) < 0$ para $|x| \geq R_0$ e por (g_3) segue que $tg(t) - \theta G(t) \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)\left[u_n g(u_n) - \theta G(u_n)\right]dx &= \int_{|x|<R_0} a(x)\left[u_n g(u_n) - \theta G(u_n)\right]dx \\
&+ \int_{|x|\geq R_0} a(x)\left[u_n g(u_n) - \theta G(u_n)\right]dx \\
&\geq \int_{|x|\geq R_0} a(x)\left[u_n g(u_n) - \theta G(u_n)\right]dx,
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
c_\lambda + o_n(1) \geq{}& \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \frac{1}{\theta} M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega u_n^6 dx \\
&+ \frac{\lambda}{\theta}\int_{|x|\geq R_0} a(x)\left[u_n g(u_n) - \theta G(u_n)\right]dx,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
c_\lambda + o_n(1) \geq{}& \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \frac{1}{\theta} M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega u_n^6 dx \\
&+ \frac{\lambda}{\theta}\int_{|x|\geq R_0} a(x)g(u_n)u_n dx - \lambda \int_{|x|\geq R_0} a(x)G(u_n)dx.
\end{aligned}$$

Observe que

$$-\lambda \int_{|x|\geq R_0} a(x)G(u_n)dx \geq 0,$$

portanto,

$$\begin{aligned} c_\lambda + o_n(1) \geq \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \frac{1}{\theta}M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 + \frac{\lambda}{\theta}\int_{|x|\geq R_0} a(x)g(u_n)u_n dx \\ + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega u_n^6 dx. \end{aligned}$$

Além disso, como $\widehat{M}(t) \geq (1/2)M(t)t$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\|u_n\|^2\right) - \frac{1}{\theta}M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 &\geq \frac{1}{4}M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\theta}M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)m_0\|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Assim, encontramos

$$c_\lambda + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)m_0\|u_n\|^2 + \frac{\lambda}{\theta}\int_{|x|\geq R_0} a(x)g(u_n)u_n dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega u_n^6 dx.$$

Como $\theta > 2$, temos $1/4 - 1/\theta > 0$, logo

$$\begin{aligned} c_\lambda + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}\right)\int_\Omega u_n^6 dx + \frac{\lambda}{\theta}\int_{|x|\geq R_0} a(x)g(u_n)u_n dx \\ &= \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega u_n^6 dx + \frac{\lambda}{\theta}\int_{|x|\geq R_0} a(x)g(u_n)u_n dx. \end{aligned}$$

Assim, sendo $\psi_\varrho \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} c_\lambda + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega u_n^6 dx + \int_{|x|\geq R_0} a(x)g(u_n)u_n dx \\ &\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega \psi_\varrho u_n^6 dx + \int_{|x|\geq R_0} a(x)g(u_n)u_n dx. \end{aligned}$$

Tomando $R \geq R_0$ com $R \to \infty$ na desigualdade anterior e pela convergência (2.25), encontramos

$$c_\lambda + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega \psi_\varrho u_n^6 dx.$$

Por fim, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$c_\lambda \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\sum_{i\in\Lambda}\psi_\varrho(x_i)\nu_i = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\sum_{i\in\Lambda}\nu_i \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\sum_{i\in\Lambda}(m_0 S)^{3/2}.$$

Portanto, temos

$$c_\lambda \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)(m_0 S)^{\frac{3}{2}}. \tag{4.12}$$

Pelo Lema 4.1, existe $\lambda_* > 0$ tal que $c_\lambda < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)(m_0 S)^{3/2}$ para todo $\lambda \geq \lambda_*$, o que contradiz (4.12), portanto, o conjunto Λ de índices é vazio.

Recordemos que $|u_n|^6 \rightharpoonup |u|^6 + \nu$, isto é,

$$|u_n|^6 \rightharpoonup |u|^6 + \sum_{i\in\Lambda}\nu_i\delta_{x_i}.$$

Assim, como o conjunto Λ de índices é vazio, $\nu = 0$ e teremos $|u_n|^6 \rightharpoonup |u|^6$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, isto é, para todo $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ obtemos $< u_n^6, \varphi > \to < u^6, \varphi >$, ou ainda

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^6 \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^6 \varphi dx,$$

sendo $\varphi \equiv 1$ em Ω.

Deste modo,

$$\int_\Omega |u_n|^6 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} |u_n|^6 \varphi dx \to \int_\Omega |u|^6 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} |u|^6 \varphi dx,$$

implicando

$$\int_\Omega |u_n|^6 \varphi dx \to \int_\Omega |u|^6 \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in C_0(\Omega)$, o que prova (4.4).

Para provar (4.5), utilizaremos o Lema 2.3 novamente partindo para uma subsequência de modo a assumir $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = A$ para algum número real $A \geq 0$. Sendo $\{u_n\}$ uma sequência limitada e que verifica (2.7), temos

$$I'(u_n)u_n = M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 - \lambda \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n dx - \int_\Omega |u_n|^6 dx \to 0$$

e

$$I'(u_n)\phi = M\left(\|u_n\|^2\right) < u_n, \phi > -\lambda \int_\Omega a(x)g(u_n)\phi dx - \int_\Omega |u_n|^5 \phi dx \to 0. \tag{4.13}$$

Assim, por (4.4) e pelo Lema 2.4, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\|u_n\|^2\right)\|u_n\|^2 = \lambda \int_\Omega a(x)g(u)udx + \int_\Omega |u|^6 dx. \tag{4.14}$$

Usando (M_1), para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$, obtemos a igualdade (4.13) de modo que

$$M(A)\left[\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx + \int_\Omega u\phi dx\right] = \lambda \int_\Omega a(x)g(u)\phi dx + \int_\Omega |u|^4 u\phi dx. \tag{4.15}$$

Tomando em particular $\phi = u$ em (4.15),

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\|u_n\|^2\right)\|u\|^2 = \lambda\int_\Omega a(x)g(u)udx + \int_\Omega |u|^6dx = M(A)\|u\|^2,$$

assim,

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 = \|u\|^2.$$

Portanto, (4.5) é válido.

Para $\lambda \geq \lambda_*$, sendo I_λ um funcional de classe C^1, considerando (2.7) e as convergências acima, segue que $I'_\lambda(u) = 0$, portanto, u é solução fraca do problema $(P_{\lambda,1})$. Além disso, se u é solução fraca para o problema $(P_{\lambda,1})$, então $I'_\lambda(u)u_- = 0$, onde $u_- := \max\{-u, 0\}$. Portanto,

$$M\left(\|u\|^2\right)\left[\int_\Omega \nabla u\nabla u_-dx + \int_\Omega uu_-dx\right] - \lambda\int_\Omega a(x)g(u)u_-dx - \int_\Omega |u_+|^5u_-dx = 0,$$

isto é,

$$M\left(\|u\|^2\right)\left[\int_\Omega \nabla u\nabla u_-dx + \int_\Omega uu_-dx\right] = \lambda\int_\Omega a(x)g(u)u_-dx + \int_\Omega |u_+|^5u_-dx. \tag{4.16}$$

Observe que $u = u_+ - u_-$, logo, podemos escrever (4.16) na forma

$$\begin{aligned} M\left(\|u\|^2\right)\left[\int_\Omega \nabla\left(u_+ - u_-\right)\nabla u_-dx + \int_\Omega \left(u_+ - u_-\right)u_-dx\right] &= \int_\Omega |u_+|^5u_-dx \\ &+ \lambda\int_\Omega a(x)g\left(u_+ - u_-\right)u_-dx. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Recordemos que u_+ e u_- possuem suportes disjuntos, então

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\left(u_+ - u_-\right)\nabla u_- dx + \int_\Omega \left(u_+ - u_-\right)u_- dx &= \int_\Omega \nabla u_+ \nabla u_- dx - \int_\Omega |\nabla u_-|^2 dx \\ &\quad + \int_\Omega u_+ u_- dx - \int_\Omega |u_-|^2 dx \\ &= -\left[\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dx + \int_\Omega |u_-|^2 dx\right] \\ &= -\|u_-\|^2,\end{aligned}$$

e ainda, $|u_+|^5 u_- = 0$. Substituindo estes resultados em (4.17), temos

$$-M\left(\|u\|^2\right)\|u_-\|^2 = \lambda \int_\Omega a(x) g\left(-u_-\right) u_- dx.$$

Como $g(t) = 0$ para todo $t \leq 0$, concluímos que $-\|u_-\|^2 = 0$, o que implica $u_- \equiv 0$. Portanto, $u \equiv u_+ \geq 0$ quase sempre em Ω.

Apêndice A

Alguns Resultados Utilizados

Aqui, exibiremos alguns dos resultados utilizados no decorrer deste trabalho, bem como algumas definições importantes que serão necessárias para a demonstração de parte dos mesmos.

Teorema A.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para uma função mensurável de valores reais f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [3] p.44. □

Teorema A.2 (Teorema de Vainberg)**.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e seja $f$tal que $|f_n - f|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então existe uma subsequência f_{n_k} e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que*
(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$, quase sempre em Ω;
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$, quase sempre em Ω.

Demonstração. Veja [4] p.94. $\square$

Definição: Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $F\colon X \to X$ é dita uma contração sobre X se existe um número real positivo $\alpha < 1$ tal que para todos $x, y \in X$, $d\,(Fx, Fy) \le d\,(x, y)$.

Teorema A.3 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Sejam (X, d) um espaço métrico não vazio. Suponha X completo e seja $T\colon X \to X$ uma contração sobre X. Então T possui precisamente um único ponto fixo.*

Demonstração. Veja [8] p.300. $\square$

Definição: Sejam X_1, X_2, X_3 espaços de Banach. Uma aplicação $f\colon U \subset X_1 \times X_2 \to X_3$ (não necessariamente contínua) é lipschitziana (ou Lipschitz) em relação à segunda variável se existir $C > 0$ tal que $|f\,(z, y) - f\,(z, x)\,| \le C|x - y|, \;\; \forall\,(z, x)\,, (z, y) \in U$. (Observe que C é o mesmo para todo z).

A seguir, demonstraremos o Teorema de Picard, em uma adaptação da demonstração de [8]. Este teorema será importante para a demonstração do Lema da Deformação, o qual será enunciado em seguida.

Teorema A.4 (Teorema de Picard)**.** *Seja (X, d) um espaço de Banach e $f\colon\; [t_0 - a, t_0 + a] \times B\,(x_0, b) \;\subset\; \mathbb{R} \times X \;\to\; X$ uma aplicação limitada, contínua, lipschitziana em relação à segunda variável. Então, existe uma única solução do problema de Cauchy correspondente a f com valores iniciais $x(t_0) = x_0$, definida no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$ e $M = \sup\{|f\,(t, x)\,|; (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B\,(x_0, b)}\}$.*

Demonstração. Considere o espaço vetorial $C^0 = C^0\,([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,, X)$ dotado da norma uniforme $(\|\psi\| := \sup|\psi(x)|, x \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$. Temos da análise funcional que C^0 é um espaço de Banach. Seja $\mathcal{C}$ o subconjunto de C^0 dado por $\mathcal{C} := C^0\left([t_0-\alpha, t_0+\alpha], \overline{B(x_0,b)}\right)$, isto é, o conjunto das aplicações contínuas cujo domínio é $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ e cujas imagens estão contidas em $\overline{B(x_0,b)}$. Note ainda que $\mathcal{C}$ é um fechado de C^0. Em particular, como C^0 é espaço de Banach, conclui-se que $\mathcal{C}$ é um espaço métrico completo.

Definamos a aplicação $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dada por:

$$F(\psi(t)) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))\,ds.$$

Temos, portanto:

- F está bem definida. De fato, $F(\psi)$ é uma aplicação contínua desde que ψ também seja contínua. Além disso, se $\psi \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}
|F(\psi(t)) - x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))\,ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\psi(s))|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M dt \\
&= M|t-t_0| \leq M\alpha \leq b,
\end{aligned}$$

  o que significa que a imagem da aplicação $F(\psi)$ está contida em $\overline{B(x_0,b)}$ se $\psi \in \mathcal{C}$. Logo, F leva aplicações de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$.

- Os eventuais pontos fixos de F são soluções do problema de Cauchy com domínio $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

- Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F^m é contração para todo $m > n_0$. De fato, seja c a constante de Lipschitz de f em relação à segunda variável. Por indução, provaremos que para todo $m \in \mathbb{N}$, todo $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, e para todas $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}$

$$|F^m(\varphi_1)(t) - F^m(\varphi_2)(t)| \leq \frac{c^m}{m!}|t - t_0|^m d(\varphi_1, \varphi_2).$$

De fato, para $m = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|F(\varphi_1)(t) - F(\varphi_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] \, ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} c.d(\varphi_1, \varphi_2) \, ds \\
&\leq c|t - t_0| d(\varphi_1, \varphi_2).
\end{aligned}$$

Assumindo a hipótese de indução válida para $m \geq 1$, e sendo f de Lipschitz em relação à segunda variável, temos:

$$\begin{aligned}
\left|F^{m+1}(\varphi_1)(t) - F^{m+1}(\varphi_2)(t)\right| &= |F[F^m(\varphi_1)(t) - F^m(\varphi_2)(t)]| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, F^m(\varphi_1(s))) - f(s, F^m(\varphi_2(s)))] \, ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |[f(s, F^m(\varphi_1(s))) - f(s, F^m(\varphi_2(s)))]| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} c|F^m(\varphi_1(s)) - F^m(\varphi_2(s))| ds \\
&\leq c \int_{t_0}^{t} \frac{c^m}{m!}|s - t_0|^m d(\varphi_1, \varphi_2) \, ds \\
&\leq \frac{c^{m+1}}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2) \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^m ds \\
&= \frac{c^{m+1}}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2) \frac{|s - t_0|^{m+1}}{m+1} \Big|_{t_0}^{t} \\
&= \frac{c^{m+1}}{(m+1)!} |t - t_0|^{m+1} d(\varphi_1, \varphi_2).
\end{aligned}$$

o que conclui a indução.

Visto que $|t - t_0| \leq \alpha$, temos que

$$d\left(F^m\left(\varphi_1(t)\right), F^m\left(\varphi_2(t)\right)\right) \leq \frac{c^m \alpha^m}{m!} d\left(\varphi_1, \varphi_2\right).$$

Observe que o fatorial domina qualquer exponencial, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

De fato, se fizermos $n \to \infty$ em $\dfrac{a^n}{n!}$ teremos uma indeterminação. Aplicando L'Hospital, temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \ln a}{(n-1)! + n\left[(n-1)!\right]'}.$$

Sendo $\ln a$ constante, prova-se a afirmação. Portanto, para todo $m \geq n_0$, temos que F^m é uma contração, como queríamos mostrar.

Como $\mathcal{C}$ é um espaço métrico completo e $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, segue do Teorema do Ponto Fixo que F^m possui um único ponto fixo. Seja p o único ponto fixo de F^m, p é também o único ponto fixo de F, pois $F^m(p) = p$ implica $F\left(F^m(p)\right) = F(p)$ se, e somente se, $F^m\left(F(p)\right) = F(p)$.

Conclui-se assim que $F(p)$ é também ponto fixo de F^m, e como este é único, $F(p) = p$. Como todo ponto fixo de F é também ponto fixo de F^m, segue-se que F só possui este ponto fixo. Como vimos no início desta demonstração, isto equivale a existência de uma única solução para o problema de Cauchy. $\square$

Definição: Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\widetilde{X} = \{u \in X : I'(u) \neq 0\}$ o conjunto dos pontos regulares de I. Dizemos que a função

$\varphi\colon \widetilde{X} \to X$ é um campo pseudo-gradiente para I quando φ é localmente lipschitziana satisfazendo

(a) $\|\varphi(u)\|_X \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$ e

(b) $I'(u)\varphi(u) \geq \|I'(u)\|_{X'}^2$.

O Lema da Deformação é parte importante da demonstração do Teorema do Passo da Montanha, o qual será enunciado e demonstrado em seguida. A demonstração abaixo pode ser encontrada em [13].

Lema A.1 (Lema da Deformação)**.** *Sejam X um Espaço de Banach, $c \in \mathbb{R}$, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Se*

$$\|I'(u)\| \geq 4\varepsilon \tag{A.1}$$

para todo $u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$, então existe $\eta \in C^1(X, X)$ tal que:

(A) $\eta(u) = u, \quad \forall u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$ e

(B) $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$, onde $I^d := I^{-1}(]-\infty, d])$.

Demonstração. Definamos a função $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) = \frac{\operatorname{dist}(u, X\backslash A)}{\operatorname{dist}(u, X\backslash A) + \operatorname{dist}(u, B)},$$

onde $A := I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$ e $B := I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$.

Para mostrar que a função ψ está bem definida, mostraremos que a soma das distâncias $\operatorname{dist}(u, X\backslash A) + \operatorname{dist}(u, B) > 0$. Suponha, por contradição, que exista $u \in X$ tal que $\operatorname{dist}(u, X\backslash A) + \operatorname{dist}(u, B) = 0$, isto é, que $\operatorname{dist}(u, X\backslash A) = 0$ e $\operatorname{dist}(u, B) = 0$.

Como I é por hipótese contínuo e sendo $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ fechado, temos que $B := I^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ é fechado em X (Banach) o que implica que B é fechado. Desde que B é fechado e $\operatorname{dist}(u, B) = 0$ segue que $u \in \overline{B} \Rightarrow u \in B$,

isto é,

$$c - \varepsilon \leq I(u) \leq c + \varepsilon. \tag{A.2}$$

Por outro lado, sendo I é por hipótese contínuo e $[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$ fechado, então $A := I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$ é fechado em X (Banach), o que implica A fechado e $X \backslash A$ aberto. Assim, $\operatorname{dist}(u, X \backslash A) = 0$ implica que $u \in \overline{X \backslash A}$, então existe uma sequência $\{u_n\} \subset X \backslash A$ tal que $u_n \to u$, ou seja,

$$I(u_n) < c - 2\varepsilon \ \text{ ou } \ I(u_n) > c + 2\varepsilon.$$

Passando o limite com $n \to \infty$ nestas últimas desigualdades e da continuidade do funcional I, encontraremos

$$I(u) \leq c - 2\varepsilon \ \text{ ou } \ I(u) \geq c + 2\varepsilon.$$

O que contradiz (A.2).

Note que a distância é lipschitziana. De fato, definindo $d \colon X \to \mathbb{R}$ de modo que $x \mapsto d(x, Y) = \inf_{y \in Y} |x - y|$. Aplicando a desigualdade triangular, temos para $x_1, x_2 \in X$:

$$|d(x_1, Y) - d(x_1, Y)| = \left| \inf_{y \in Y} |x_1 - y| - \inf_{y \in Y} |x_2 - y| \right|,$$

e pelas propriedades de ínfimo,

$$|d(x_1, Y) - d(x_1, Y)| = \left| \inf_{y \in Y} \left[|x_1 - y| - |x_2 - y| \right] \right|.$$

Observe que, $|x_1 - y| - |x_2 - y| = |x_1 - x_2 + x_2 - y| - |x_2 - y|$ e da desigualdade triangular obtém-se $|x_1 - y| - |x_2 - y| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - y| - |x_2 - y| = |x_1 - x_2|$.

Assim,

$$|d(x_1, Y) - d(x_1, Y)| \leq \left| \inf_{y \in Y} |x_1 - x_2| \right| = |x_1 - x_2|.$$

Mostramos então que existe uma constante $L > 0$ (em particular, $L = 1$) tal que

$$|d(x_1, Y) - d(x_1, Y)| \leq |x_1 - x_2|,$$

provando que a distância é lipschitziana.

Desde que a distância é lipschitziana, a função ψ é contínua e localmente lipschitziana. Observemos ainda que $\psi = 0$ em $X \backslash A$ e $\psi = 1$ em B.

Seja $\varphi \colon \widetilde{X} \to X$ um campo pseudo-gradiente para I e definamos

$$W(u) := \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|}, & \text{se } \ u \in A, \\ 0, & \text{se } \ u \in X \backslash A. \end{cases}$$

Notemos que W é localmente lipschtiziana (pois é definido como o produto de duas funções localmente lipschitzianas) e $\|W(u)\| \leq 1$ para todo $u \in X$. De fato, para $u \in X \backslash A$, este resultado é imediato uma vez que $\|W(u)\| = 0 < 1$. Já para $u \in A$, temos pela definição de ψ que $\|\psi\| \leq 1$ e ainda:

$$\|W(u)\| = \left\| -\psi(u)\frac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|} \right\| = \|\psi(u)\| . \left\| \frac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|} \right\| = \|\psi(u)\| \leq 1.$$

Assim, do Teorema de Picard-Lindelöf, para cada $u \in X$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t, u) = W(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u \end{cases}$$

possui uma única solução $\sigma(\cdot, u)$ definida em $\mathbb{R}$ com $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X, X)$.

Consideremos a função η definida em X por $\eta(u) := \sigma(1, u)$. Desde que

$W(u) = 0$ para todo $u \in X \backslash A$, então $\sigma(t, u)$ é constante para cada $u \in X \backslash A$. Desde que $\sigma(0, u) = u$, temos que η satisfaz (A).

Notemos ainda que

$$\frac{d}{dt} I(\sigma(t, u)) = I'(\sigma(t, u)) \frac{d}{dt} \sigma(t, u) = I'(\sigma(t, u)) W(\sigma(t, u)) = 0, \quad \text{(A.3)}$$

para todo $\sigma(t, u) \in X \backslash A$.

Para todo $\sigma(t, u) \in A$, encontramos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} I(\sigma(t, u)) &= I'(\sigma(t, u)) \frac{d}{dt} \sigma(t, u) \\ &= I'(\sigma(t, u)) W(\sigma(t, u)) \\ &= -I'(\sigma(t, u)) \varphi(\sigma(t, u)) \frac{\psi(\sigma(t, u))}{\|\varphi(\sigma(t, u))\|_{X'}}.\end{aligned}$$

Desde que φ é um Campo Pseudo-Gradiente, por (b)

$$\frac{d}{dt} I(\sigma(t, u)) \leq -\psi(\sigma(t, u)) \frac{\|I'(\sigma(t, u))\|_{X'}^2}{\|\varphi(\sigma(t, u))\|_{X'}} \leq 0. \quad \text{(A.4)}$$

Por (A.3) e (A.4), temos que $I(\sigma(t, u))$ é não-crescente em t.

Considerando $u \in I^{c+\varepsilon}$, se existir $\bar{t} \in [0, 1]$ tal que $I\big(\sigma\big(\bar{t}, u\big)\big) < c - \varepsilon$, então

$$I(\eta(u)) = I(\sigma(1, u)) \leq I\big(\sigma\big(\bar{t}, u\big)\big) < c - \varepsilon.$$

Logo, (B) ocorre. Se $u \in I^{c+\varepsilon}$ e $c - \varepsilon \leq I(\sigma(t, u))$ para todo $t \in [0, 1]$, temos

$$c - \varepsilon \leq I(\sigma(t, u)) \leq I(\sigma(0, u)) = I(u) \leq c + \varepsilon.$$

Dessas desigualdades, inferimos que $\sigma(t, u) \in B$ e $\psi(\sigma(t, u)) = 1$ para todo $t \in [0,1]$. Assim, de (A.4),

$$\begin{aligned}
I\left(\eta(u)\right) &= I\left(\sigma\left(1,u\right)\right) - I\left(\sigma\left(0,u\right)\right) + I\left(\sigma\left(0,u\right)\right) \\
&= I(u) + \int_0^1 \frac{d}{dt} I\left(\sigma\left(t,u\right)\right) dt \\
&\leq I(u) - \int_0^1 \psi\left(\sigma\left(t,u\right)\right) \frac{\|I'\left(\sigma\left(t,u\right)\right)\|_{X'}^2}{\|\varphi\left(\sigma\left(t,u\right)\right)\|_{X'}} dt \\
&= I(u) - \int_0^1 \frac{\|I'\left(\sigma\left(t,u\right)\right)\|_{X'}^2}{\|\varphi\left(\sigma\left(t,u\right)\right)\|_{X'}} dt.
\end{aligned}$$

Do item (a) da definição de Campo Pseudo-Gradiente, temos:

$$\|\varphi(u)\|_X \leq 2\|I'(u)\|_{X'} \Rightarrow -\frac{1}{\|\varphi(u)\|_X} \leq -\frac{1}{2\|I'(u)\|_{X'}}.$$

Assim,

$$I\left(\eta(u)\right) \leq c + \varepsilon - \frac{1}{2}\int_0^1 \|I'\left(\sigma\left(t,u\right)\right)\| dt.$$

Da hipótese (A.1) e sendo $u \in I^{c+\varepsilon}$, encontramos

$$I\left(\eta(u)\right) \leq c + \varepsilon - \frac{1}{2}\int_0^1 4\varepsilon dt = c + \varepsilon - 2\varepsilon.$$

Portanto, $I\left(\eta(u)\right) \leq c - \varepsilon$ e (B) também é satisfeita. $\square$

O último teorema que demonstraremos será o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz. Esta versão da demonstração, porém, não faz uso da condição Palais-Smale e pode ser encontrada em [14].

Teorema A.5 (Teorema do Passo da Montanha). *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1\left(X, \mathbb{R}\right)$, $\rho > 0$ e $e \in X$ satisfazendo $\|e\| > \rho$ e*

$$b = \inf_{\|u\|=\rho} I(u) > I(0) = 0 \geq I(e)$$

Então para cada $\varepsilon \in \left(0, \frac{c}{2}\right)$, *existe* $u_\varepsilon \in X$ *tal que:*

(A) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$,

(B) $\|I'(u_\varepsilon)\| < 2\varepsilon$,

onde

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I\left(g(t)\right)$$

e

$$\Gamma = \{g \in C\left([0,1], X\right); \quad g(0) = 0 \ \text{ e } \ g(1) = e\}.$$

Demonstração. Pela definição de b, temos $b \leq I(u)$, para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = \rho$. Considerando a função $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \|g(t)\|$, temos que h é a composição de duas funções contínuas ($\|\cdot\|$ e g), portanto, h é contínua.

Note que $h(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$ e por outro lado, $h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho$, de onde concluímos que $h(0) < \rho < h(1)$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = \|g(t_0)\| = \rho$, isto é, existe $u_0 = g(t_0) \in X$ de modo que $\|u_0\| = \rho$. Assim, $b \leq I(u_0)$, portanto,

$$0 < b \leq I(u_0) = I\left(g(t_0)\right) \leq \max_{t \in [0,1]} I\left(g(t_0)\right).$$

Sendo $g \in \Gamma$ arbitrário, temos da definição de ínfimo $b \leq c \leq \max_{t \in [0,1]} I\left(g(t)\right)$.

Além disso, pela definição de c (ínfimo), existe um caminho $g_0 \in \Gamma$ tal que, para $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\max_{t \in [0,1]} I\left(g_0(t)\right) \leq c + \varepsilon.$$

Por outro lado, $c \leq \max_{t \in [0,1]} I\left(g(t)\right)$. Em particular,

$$c - \varepsilon < c \leq \max_{t \in [0,1]} I\left(g_0(t)\right) \leq c + \varepsilon.$$

Note que $I \circ g$ é um aplicação contínua definida num compacto cuja imagem está em $\mathbb{R}$, portanto, o máximo é atingido, logo, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$c - 2\varepsilon < c \leq I\left(g_0(t_0)\right) \leq c + \varepsilon < c + 2\varepsilon.$$

Portanto, para cada $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$, existe $u_\varepsilon = g_0(t_0) \in X$ de modo que $c - 2\varepsilon < I\left(u_\varepsilon\right) < c + 2\varepsilon$, o que prova (A).

Suponha agora que (B) não aconteça, isto é que existe $\delta \in \left(0, \dfrac{c}{2}\right)$ tal que $\|I'(u)\| \geq 2\delta$ para todo $u \in I^{-1}\left([c - 2\delta, c + 2\delta]\right)$. Observe que, desde que $c > 0$ e diminuindo δ se necessário, temos

$$I(e) \leq I(0) = 0 < c - 2\delta.$$

Pelo Lema da Deformação, existe $\eta \in C\left(X, X\right)$ tal que:

(C) $\eta(u) = u, \quad \forall\, u \notin I^{-1}\left([c - 2\delta, c + 2\delta]\right)$ e

(D) $\eta\left(I^{c+\delta}\right) \subset I^{c-\delta}$, onde $I^d := I^{-1}\left(]-\infty, d\,]\right)$.

Considere $h^*(t) = \eta\left(g_0(t)\right)$. Mostraremos que $h^* \in \Gamma$.

Sendo $\eta \in C\left(X, X\right)$ e $g_0 \in C\left([0,1], X\right)$, então $h^* \in C\left([0,1], X\right)$, e ainda, $h^*(0) = \eta\left(g_0(0)\right) = \eta(0)$. Mas temos $0 \notin I^{-1}\left([c - 2\delta, c + 2\delta]\right)$. Segue de (C) que $h^*(0) = \eta(0) = 0$.

Analogamente, $h^*(1) = \eta\left(g_0(1)\right) = \eta(e)$ e temos $e \notin I^{-1}\left([c - 2\delta, c + 2\delta]\right)$. Assim, segue por (C) que $h^*(1) = \eta(e) = e$.

Portanto, $h^* \in C\left([0,1], X\right)$, com $h^*(0) = 0$ e $h^*(1) = e$, o que implica $h^* \in \Gamma$, logo $c \leq \max\limits_{t \in [0,1]} I\left(h^*(t)\right)$.

Note que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I\left(h^*(t)\right) \Rightarrow g_0(t) \in I^{c+\delta} \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Assim, por (D), $h^*(t) \in I^{c-\delta}$, isto é, $I(h^*(t)) \leq c - \delta$ para todo $t \in [0,1]$, ou seja, temos

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h^*(t)) \leq c - \delta < c,$$

o que é um absurdo. Conclui-se então que, dado $\delta \in \left(0, \frac{c}{2}\right)$, existe $u_n \in I^{-1}([c-2\delta, c+2\delta])$ que verifica $\|I'(u_n)\| < 2\delta$. $\square$

Teorema A.6 (Princípio da Concentração e Compacidade de Lions - Caso Limite)**.** *Seja* (u_n) *uma sequência em* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, *onde* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$. *Suponha que*

$$\nu_n = |u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu \ \text{ e } \ \mu_n = |\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \mu,$$

no sentido das medidas de Radon. Então

(i) Existe um conjunto Γ *de índices, no máximo enumerável, duas famílias de números reais não negativos* $(\nu_i)_{i\in\Gamma}$ *e* $(\mu_i)_{i\in\Gamma}$ *e uma família* $(x_i)_{i\in\Gamma}$ *tais que*

$$\nu = |u|^{2^*} + \sum_{i\in\Gamma} \nu_i \delta_{x_i} \ \text{ e } \ \mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{i\in\Gamma} \mu_i \delta_{x_i},$$

onde $< \delta_{x_i}, \phi >= \phi(x_i)$, *para toda* $\phi \in C_0(\Omega)$ *é a chamada Medida de Dirac de massa 1.*

(ii) $S\nu_i^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_i$ e $\sum_{i\in\Gamma} \nu_i^{\frac{2}{2^*}} < \infty$, *onde*

$$S = \inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), u\neq 0} \frac{\|u\|^2}{|u|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}}.$$

Demonstração. Veja [10]. $\square$

Teorema A.7 (Sobolev)**.** *Sejam* $1 \leq p < \infty$, $mp < n$ *e* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$. *Então*

$W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^q(\mathbb{R}^n)$ e se verifica

$$|u|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, onde $C_0 = \dfrac{(n-1)p}{n-p}$.

Demonstração. Veja [11], p. 44. □

Referências Bibliográficas

[1] C. Alves, F. J. S. A. Corrêa e T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), 85-93.

[2] A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and apllications*, J. Functional Analysis, vol 14, (1973) 349-381.

[3] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Willey Classics Library, New York, 1995.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, (2010).

[5] G. M. Figueiredo e J. R. dos Santos Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, DIE-Diff. Int. Equations, 25 (2012), 853- 868.

[6] G.M. Figueiredo e D.C. de Morais Filho, *Existence of positive solution for indfinite Kirchhff equation in exterior domain with subcritical or critical growth*, to appear in J. Australian Math, Soc., 2017.

[7] X. He e W. Zou *Infinitely many positive solutions for Kirchhoff-type problems, Nonlinear* Anal. 70 (2009), 1407-1414.

[8] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley. Canadá, 1989.

[9] G. Kirchhoff, *Mechanik, Teubner, Leipzig*, 1883.

[10] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I.*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), 145-201.

[11] L.A.J. Medeiros, *Espaços de Sobolev: Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*, Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[12] K. Perera e Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index*, J. Differential Equations 221 (2006), 246-255.

[13] W. Willem, *Lectures on critical point theory*, Trabalho de Math. 199, Fundação Univ. Brasilia, 1983.

[14] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.