UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Teoria dos Operadores Maximais Monotônicos e Aplicações.

João Felipe Fonseca da Silva

Belém
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

João Felipe Fonseca da Silva

Teoria dos Operadores Maximais Monotônicos e Aplicações.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

Belém

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

João Felipe Fonseca da Silva

Teoria dos Operadores Maximais Monotônicos e Aplicações.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obteção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 8 de Março de 2017.

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora:

João Rodrigues dos S. Júnior

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior (Orientador)

Programa de Pós Graduação de Matemática e Estatística - PPGME - UFPA

Prof. Dra. Joelma Morbach

Programa de Pós Graduação de Matemática e Estatística - PPGME - UFPA

Marcos L. M. Carvalho

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho

Universidade de Federal de Goiás - UFG

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central - UFPA

Silva, João Felipe Fonseca da
Teoria dos operadores maximais monotônicos e aplicações / João Felipe Fonseca da Silva. — 2017.

Orientador: João Rodrigues dos Santos Júnior

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2017.

1. Operadores monotônicos. I. Título.

CDD - 23. ed. 515.72

Dedicatória

A minha mãe, Dona Graça
a minha esposa, Edivani
e a minha filha, Eloíse.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela sua infinita misericórdia, e pelas graças que tem me concedido.

Agradeço a minha amada mãe, Maria das Graças Fonseca da Silva, pelos seus ensinamentos, pela dedicação, que com muita luta, amor e fé, sempre estar me apoiando.

Ao meu pai, João Dias pelos valores passados.

A minha esposa Edvani Souza Cavalcante e minha filha Eloíse Cavalcante, por fazerem parte deste momento e pelo apoio.

Ao meu orientador professor Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior, pela sua brilhante orientação, conselhos e extrema paciência.

Aos professores Joelma Morbach e Marcos Leandro Mendes Carvalho por se apresentarem disponível nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

Aos professores do PPGME/UFPA pelos cursos ministrados e que contribuíram para a formação do meu conhecimento.

Aos colegas de curso, em especial, Welber Aires, Alberto Sancho e César Henrique, pela amizade, pelo apoio e os bons momentos.

Aos técnicos do PPGME/UFPA que se empenham diariamente em suas atividades e estão sempre dispostos a nos atender.

Aos professores da Universidade Federal do Amapá, onde destaco o meu orientador de iniciação científica Kelmem da Cruz Barroso, que me direcionou neste ramo da matemática.

Agradeço ainda a minha querida vó Luiza Fonseca da Conceição, pelas histórias e seus ensinamentos.

As minhas irmãs, Maria José, Socorro e Luiza, as quais estiveram sempre me dando apoio.

Ao meu sobrinho Leonardo Roger, pelas conversas e apoio durante o curso.

A todos da família Cavalcante que me receberam muito bem e me deram enorme apoio na estadia em Belém, em especial a Maria de Jesus, Dona Zali (Minha sogra) pela sua parceria e acolhida.

E a todos que contribuíram, em especial, meus amigos de Macapá que sempre me apoiaram.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, baseado no livro do Figueiredo [8], demonstramos alguns dos principais resultados da teoria maximal monotônica e a utilizamos como ferramenta na solução de problemas elípticos não lineares. Grande parte da teoria vista aqui, também pode ser encontrada nos trabalhos de H. Brezis, [3], [4], [5], [6] e [7].

Palavras chave: Maximal Monotônico, Problemas elípticos.

Abstract

In this work, based on the book by Figueiredo [8], we demonstrate some of the main results of monotonic maximal theory and use it as a tool in solving nonlinear elliptic problems. Much of the theory seen here can also be found in the works of H. Brezis [3], [4], [5], [6] and [7].

Key words: Maximal Monotonic, Elliptical Problems.

Sumário

Notações

- $\square$: fim da demonstração.
- q.t.p: quase todo ponto.
- Δu: operador Laplaciano aplicado a função u.
- ∇u: gradiente de u.
- Ω: subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$.
- $|\Omega|$, $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$: medida de Lebesgue, fronteira e fecho do conjunto Ω, respectivamente.
- λ_1: primeiro autovalor do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.
- $(.,.)$: produto escalar.
- $proj_C$: projeção sobre o convexo, fechado $C \subset H$, H espaço de Hilbert.

Introdução

Neste trabalho usaremos a Teoria dos operadores maximais monotônicos para solucionar alguns problemas elípticos não lineares. Esta teoria surgiu por volta de 1962, com o trabalho inicial de Minty [11] e tornou-se uma ferramenta importante no estudo de certas equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares, tendo também H. Brezis e F. Browder como pesquisadores da área de EDPs com contribuições importantes. Por outro lado, R. Rockafellar observou que vários problemas de otimização também poderiam ser tratados do ponto de vista teórico através da Teoria dos Operadores Monotônicos. Tudo isso levou a um grande desenvolvimento da referida teoria em espaços de Hilbert e de Banach reflexivos, motivados principalmente por aplicações em EDPs. A primeira tentativa de tratar espaços mais gerais foi de J. P. Gossez na década de 70, seguido por S. Simons. Posteriormente, surgiram diversos resultados em espaços de Banach gerais, com a colaboração de B.F. Svaiter, O. Bueno e Y. Garcia.

Neste trabalho estudaremos os seguintes problemas elípticos:

O primeiro trata-se de um problema não linear com a condição de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) & \ni & f & \text{em} & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de fronteira $\partial\Omega$ suave, η é o vetor normal unitário exterior à Ω, β é um operador multivalente maximal monotônico dado, $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada e $u \in W^{2,2}(\Omega)$.

O segundo é um problema não linear com a condição de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) & \ni & f & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de fronteira $\partial\Omega$ suave, β é um operador multivalente maximal monotônico dado, $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada e $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

O terceiro é um problema de contorno não linear.

$$\begin{cases} \Delta u &= & 0 \text{ em } \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \eta} + f & \in & \beta(u) \text{ sobre } \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, η é o vetor normal unitário exterior a fronteira de Ω, β é um operador multivalente maximal monotônico dado, $f \in L^2(\partial\Omega)$ é uma função dada e $u \in W^{3/2,2}(\Omega)$.

O último é um problema semilinear.

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u + \beta(u) & \ni & f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto limitado de fronteira $\partial\Omega$ suave, λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$, ϕ é a λ_1 autofunção, com $\phi > 0$ em Ω, β é um operador multivalente maximal monotônico dado, com $0 \in D(\beta)$, $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada e $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Para isto utilizaremos a referência [8] devido a D. G. Figueiredo, a qual estudaremos a teoria dos operadores maximais monotônicos e em seguida, aplicaremos esta teoria na solução de algumas equações diferenciais parciais. O capítulo 1, será dedicado ao desenvolvimento desta teoria. Na primeira seção, faremos um estudo inicial dos operadores maximais monotônicos, passando por teoremas clássicos de ponto fixo e indo até a caracterização dos operadores maximais monotônicos que é o teorema devido a Minty. Na seção seguinte, faremos uma relação entre os operadores contrativos e monotônicos. Posterior a isso, faremos uma breve, porém importante seção, sobre a sobrejetividade dos operadores maximais monotônicos. Na seção 1.5, vamos nos submeter ao estudo da soma de operadores maximais monotônicos e a última seção do capítulo 1, ficará destinada aos resultados devidos a Brezis-Haraux. Excelentes textos desta teoria podem ser encontrados em [4], [5], [6] e [7].

O capítulo 2, destina-se as soluções dos problemas acima propostos. No apêndice A, apresentaremos uma gama de resultados utilizados no decorrer de todo o trabalho. O apêndice B destina-se aos Espaços de Funções relevantes aos problemas. E no apêndice C, apresentaremos um problema linear que nos auxiliará nas aplicações.

Capítulo 1

Teoria dos Operadores Monotônicos

Neste capítulo faremos um estudo sobre a teoria dos operadores maximais monotônicos, dando destaque a alguns dos principais resultados desta teoria. Dentre estes, ressaltamos o Teorema 1.1.4, devido a George J. Minty, o qual nos fornece caracterização dos operadores maximais monotônicos. Podemos citar ainda, o Teorema 1.2.2, que nos dá condições suficientes para que um operador maximal monotônico seja sobrejetivo. Ao final do capítulo, também demonstraremos alguns resultados sobre a soma de operadores maximais monotônicos e resultados devidos a Brezis-Haraux [6]. No que segue, X é um espaço de Banach reflexivo e X^* seu dual. Usaremos o par (x^*, x) para designar a ação do funcional linear contínuo x^* no elemento $x \in X$. Quando X é um espaço de Hilbert usaremos a mesma notação $(.,.)$ para denotar o seu produto interno.

Definição 1.0.1. *Um operador $T : X \to X^*$ é dito monotônico se,*

$$(Tx - Ty, x - y) \geq 0, \quad \forall\, x, y \in X, \tag{1.1}$$

é estritamente monotônico se,

$$(Tx - Ty, x - y) > 0, \quad \forall\, x, y \in X.$$

1.1 Operadores Monotônicos

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar alguns resultados iniciais da teoria maximal monotônica, bem como apresentar alguns teoremas de pontos fixos que serão úteis no decorrer do trabalho.

Teorema 1.1.1. ***(Zarantonello)***

Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador lipschitziano e fortemente monotônico, isto é, existem $k > 0$ e $\alpha > 0$ satisfazendo

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|, \forall x, y \in H, \tag{1.2}$$

e

$$(Tx - Ty, x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2, \forall x, y \in H. \tag{1.3}$$

Então, T é um homeomorfismo.

Demonstração. Devemos mostrar que $T : H \to H$ é uma bijeção contínua, cuja sua inversa $T^{-1} : H \to H$ também é contínua.

Inicialmente, observemos por hipótese que T é lipschitziano, logo T é contínuo. Mostraremos agora que T é sobrejetivo, isto é, para cada $y \in H$ existe um $x \in H$ tal que $Tx = y$, ou equivalentemente, a equação

$$x = x - \lambda(Tx - y) \tag{1.4}$$

tem solução, onde $\lambda \neq 0$. A ideia é escolher um λ de modo que, definindo o operador

$$S : H \to H,$$

dado por

$$Sx = x - \lambda(Tx - y), \quad \lambda > 0, \tag{1.5}$$

seja uma contração, (ver definição 1.0.2, Apêndice A). Para tal, dados $x_1, x_2 \in H$, temos

$$Sx_1 = x_1 - \lambda(Tx_1 - y)$$

e

$$Sx_2 = x_2 - \lambda(Tx_2 - y).$$

Assim,

$$\begin{aligned} Sx_1 - Sx_2 &= x_1 - x_2 - \lambda(Tx_1 - y) + \lambda(Tx_2 - y) \\ &= x_1 - x_2 - \lambda(Tx_1 - y - Tx_2 + y) \\ &= x_1 - x_2 - \lambda(Tx_1 - Tx_2). \end{aligned}$$

Logo, $Sx_1 - Sx_2 = x_1 - x_2 - \lambda(Tx_1 - Tx_2)$. Segue então que

$$\begin{aligned}\|Sx_1 - Sx_2\|^2 &= \|x_1 - x_2 - \lambda(Tx_1 - Tx_2)\|^2 \\ &= \|x_1 - x_2\|^2 - 2\lambda(Tx_1 - Tx_2, x_1 - x_2) + \lambda^2 \|Tx_1 - Tx_2\|^2 .\end{aligned}$$

De (1.2) e (1.3), temos

$$\begin{aligned}\|Sx_1 - Sx_2\|^2 &\leq \|x_1 - x_2\|^2 - 2\alpha\lambda \|x_1 - x_2\|^2 + k^2\lambda^2 \|x_1 - x_2\|^2 \\ &= (1 - 2\alpha\lambda + k^2\lambda^2) \|x_1 - x_2\|^2 .\end{aligned}$$

Assim,

$$\|Sx_1 - Sx_2\|^2 \leq (1 - 2\alpha\lambda + k^2\lambda^2) \|x_1 - x_2\|^2 .$$

Considerando $\gamma^2 = (1 - 2\alpha\lambda + k^2\lambda^2)$, teremos

$$\|Sx_1 - Sx_2\|^2 \leq \gamma^2 \|x_1 - x_2\|^2 .$$

Daí,

$$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| , \ \forall x_1, x_2 \in H. \tag{1.6}$$

Para que o operador S seja uma contração, devemos ter $0 < \gamma < 1$. Isto é,

$$0 < \sqrt{1 - 2\alpha\lambda + k^2\lambda^2} < 1,$$

ou equivalentemente,

$$0 < k^2\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 < 1.$$

De (1.2) e (1.3), segue que $\alpha \leq k$. Assim, se $\alpha = k$, tomamos $1/\alpha < \lambda$. Se $\alpha < k$, a positividade ocorre para qualquer λ, pois $\Delta = 4\alpha^2 - 4k^2 < 0$. Daí,

$$\alpha^2 < k^2$$

Logo,

$$\alpha < k.$$

Por outro lado, temos

$$k^2\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 < 1,$$

ou seja,

$$k^2\lambda^2 - 2\alpha\lambda < 0,$$

equivalentemente,

$$\lambda(k^2\lambda - 2\alpha) < 0.$$

Segue então que, ou $\lambda < 0$, o que não pode ocorrer por (1.5), ou $\lambda < \frac{2\alpha}{k^2}$.

Logo, para que o operador S seja uma contração, escolhemos $0 < \lambda < \frac{2\alpha}{k^2}$. Pelo Teorema 1.0.2 (Ver Apêndice A) existe um único $x \in H$ tal que $Sx = x$. Mostrando que T é sobrejetivo.

Nos resta mostrar que T é injetiva e T^{-1} é contínua. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver Proposição 1.0.1, Apêndice A) em (1.3), temos

$$\alpha \|x - y\|^2 \leq (Tx - Ty, x - y) \leq \|Tx - Ty\| . \|x - y\| .$$

Obtemos assim,

$$\alpha \|x - y\| \leq \|Tx - Ty\| , \quad \alpha > 0.$$

Logo,

$$\|x - y\| \leq 1/\alpha . \|Tx - Ty\| , \quad \alpha > 0. \tag{1.7}$$

Com isso, além da injetividade de T em (1.7) temos que T^{-1} é lipschitziano, logo é contínua. Portanto, T é um homeomorfismo. $\square$

Definição 1.1.1. *Um operador $T : X \to X^*$ é dito coercivo se,*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{(Tx, x)}{\|x\|} \to +\infty. \tag{1.8}$$

Teorema 1.1.2. ***(Ponto Fixo de Schauder)***

Sejam C um subconjunto convexo, limitado, fechado de um espaço de Banach e $T : C \to C$ operador compacto. Então T tem um ponto fixo em C.

Demonstração. Sendo T compacto, segue que $\overline{T(C)}$ é um subconjunto compacto em C. Assim, para cada $\epsilon > 0$ dado, podemos determinar um número finitos de bolas $B_\epsilon(x_k)$, $k = 1, ..., n$, onde $x_1, x_2, ..., x_n \in \overline{T(C)}$ tais que

$$\overline{T(C)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{\epsilon/2}(x_k), \tag{1.9}$$

donde segue do Teorema 1.0.10 (ver Apêndice A).

Seja F_n o subespaço de X gerado por $x_1, x_2, ..., x_n$, isto é, $F_n = Span\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e seja $\phi_1, ..., \phi_n$ uma partição contínua da unidade associada à cobertura (1.9) de $\overline{T(C)}$, (Ver Definição

1.0.15, Apêndice A). O operador $T_n : C \cap F_n \to C \cap F_n$ definido por

$$T_n x = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(Tx) x_k \tag{1.10}$$

é contínuo, pois T e ϕ_k são contínuos.

Note que, $C \cap F_n$ é um subconjunto convexo, limitado e fechado de dimensão finita. Desta forma, podemos usar o Teorema 1.0.6 (ver Apêndice A), e afirmar que, existe $z_n \in C \cap F_n$ tal que $T_n z_n = z_n$.

Notemos agora que, como C é limitado e T é compacta, existe uma subsequência (z_{n_j}), com $z_{n_j} \to z$ em C. Daí, podemos supor

$$\left\| z_{n_j} - z \right\| < \epsilon/2, \tag{1.11}$$

e sendo C fechado $z \in C$. Pela continuidade de T, temos que $T(z_{n_j}) \to T(z)$. Mostraremos que $Tz = z$.

Apartir de (1.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| Tz_{n_j} - z_{n_j} \right\| &= \left\| Tz_{n_j} - T_n z_{n_j} \right\| \\
&= \left\| Tz_{n_j} - \sum_{k=1}^{n} \phi_k(Tz_{n_j}) z_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} \phi_k(Tz_{n_j}) [Tz_{n_j} - z_j] \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \phi_k(Tz_{n_j}) \left\| Tz_{n_j} - z_j \right\| \\
&< \epsilon/2,
\end{aligned}$$

pois $supp\ \phi_k \subset B_{\epsilon/2}(x_k)$. Logo,

$$\left\| Tz_{n_j} - z_{n_j} \right\| < \epsilon/2. \tag{1.12}$$

Desta forma, da desigualdade triangular, de (1.11) e (1.12), segue-se que

$$\begin{aligned}
\left\| Tz_{n_j} - z \right\| &\leq \left\| Tz_{n_j} - z_{n_j} \right\| + \left\| z_{n_j} - z \right\| \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $Tz_{n_j} \to z$, e portanto, $Tz = z$. $\square$

Corolário 1.1.1. ***(Ponto Fixo com a condição de Leray-Schauder)***

Sejam B uma bola fechada (de raio r centrada na origem) de um espaço de Banach X e $T : B \to X$ um operador compacto tal que

$$Tx \neq \lambda x, \quad \forall\ x \in B \text{ com } \|x\| = r \quad e \quad \lambda > 1. \tag{1.13}$$

Então, T tem um ponto fixo.

Demonstração. Consideremos operador $\overline{T} : B \to B$, definido por

$$\overline{T}(x) = \begin{cases} Tx & , \quad se\ \|Tx\| \leq r \\ \frac{r}{\|Tx\|}Tx & , \quad se\ \|Tx\| > r. \end{cases}$$

Observemos que $\overline{T}$ é compacto. De fato, seja $(x_n) \subset B$. Logo, $(T(x_n)) \subset \overline{T(B)}$. Sendo T compacto, passando a uma subsequência (x_{n_k}) temos $Tx_{n_k} \to y$ em X. Se existem infinitos n_k para os quais $\|Tx_{n_k}\| \leq r$, então $\overline{T}x_{n_k} = Tx_{n_k} \to y$ em X. Do contrário, temos que

$$\overline{T}(x_{n_k}) - \frac{r}{\|y\|}y = \frac{r}{\|T(x_{n_k})\|}T(x_{n_k}) - \frac{r}{\|y\|}y \to 0.$$

Logo,

$$\overline{T}(x_{n_k}) \to \frac{r}{\|y\|}y \text{ em } X.$$

Mostrando que $\overline{T}$ é compacto.

Desta forma, $\overline{T}$ leva a bola $B \subset X$ em $\overline{T}(B) \subset B$. Logo, pelo Teorema 1.1.2, existe $x \in B$ tal que $\overline{T}x = x$.

Afirmamos que x é um ponto fixo de T. De fato, se $\|Tx\| \leq r$, então

$$x = \overline{T}x = Tx.$$

Por outro lado, Se $\|Tx\| > r$, temos

$$x = \overline{T}x = \frac{r}{\|Tx\|}Tx.$$

Desde que $\|Tx\|/r > 1$, definindo $\lambda = \|Tx\|/r$, temos $\lambda x = Tx$ com $\|x\| = r$, contradizendo (1.13). Portanto, $Tx = x$. □

O Teorema de Minty-Browder abaixo, tem bastante relevância na teoria dos operadores monotônicos, ele trata da sobrejetividade dos operadores monotônicos definidos num espaço de Banach. Faremos a demonstração para operadores contínuos, muito embora seja válido para operadores mais gerais.

Teorema 1.1.3. ***(Minty-Browder)***

Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $T : X \to X^*$ um operador monotônico, contínuo e coercivo. Então, $Im(T) = X^*$.

Demonstração. Devemos mostrar que T é sobrejetivo, isto é, para cada $y \in X^*$, existe $x \in X$ tal que $Tx = y$. É suficiente provar que $0 \in Im(T_y)$, pois se $y \neq 0$, o operador

$$\begin{aligned} T_y: \quad X &\to X^* \\ x &\mapsto T_y x = Tx - y, \end{aligned}$$

satisfaz as hipóteses do teorema. De fato, a continuidade segue do fato de T ser contínua. Por outro lado, usando a monotonicidade de T, temos

$$\begin{aligned} (T_y x - T_y x', x - x') &= (Tx - y - (Tx' - y), x - x') \\ &= (Tx - Tx', x - x') \geq 0, \quad \forall x, x' \in X. \end{aligned}$$

Finalmente T_y é coercivo, pois

$$\frac{(T_y x, x)}{\|x\|} = \frac{(Tx - y, x)}{\|x\|}.$$

Observemos que $y \in X^*$, logo pelo Teorema 1.0.5 (ver Apêndice A), existe um único $z \in X$ tal que

$$y(x) = (x, z), \quad \forall x \in X.$$

Assim,

$$\frac{(Tx - y, x)}{\|x\|} = \frac{(Tx, x)}{\|x\|} - \frac{(x, z)}{\|x\|}.$$

Pelo Teorema 1.0.4 (ver Apêndice A), temos

$$\frac{(Tx, x)}{\|x\|} - \frac{(x, z)}{\|x\|} \geq \frac{(Tx, x)}{\|x\|} - \|z\|.$$

Logo,

$$\frac{(T_y x, x)}{\|x\|} \to +\infty \text{ quando } \|x\| \to +\infty.$$

Além disso, $0 \in Im(T_y)$ se, e somente se, $y \in Im(T)$.

Para provar este Teorema vamos considerar dois casos:

1º caso: $dim X < +\infty$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $X = X^* = \mathbb{R}^n$. Sendo T_y coercivo, existe $r > 0$ tal que

$$(T_y x, x) > 0 \quad \text{para} \quad \|x\| = r. \tag{1.14}$$

Mostraremos que o operador

$$\begin{aligned} S: \ B_r(0) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Sx = x - T_y x, \end{aligned}$$

tem um ponto fixo $x_0 \in B_r(0)$, o que implica $T_y x_0 = 0$. Para mostrar isto, usaremos o Corolário 1.1.1. Suponha, por contradição que, existem $\|x_0\| = r$ e $\lambda \geq 1$ tais que $Sx_0 = \lambda x_0$. Então,

$$\begin{aligned} (x_0, x_0) \leq (\lambda x_0, x_0) = (Sx_0, x_0) &= (x_o - T_y x_0, x_0) \\ &= (x_0, x_0) - (T_y x_0, x_0) \\ &< (x_0, x_0). \end{aligned}$$

Contradição. Isto prova que o operador S tem um ponto fixo $x_0 \in B_r(0)$. Portanto, $0 \in Im(T_y)$ e, consequentemente, T é sobrejetivo.

2º caso: $dim X = +\infty$.

Seja $\mathscr{F}$ a família de todos os subespaços F de dimensão finita de X. Sejam $J_F : F \to X$ o operador de inclusão e $J_F^* : X^* \to F^*$, seu adjunto (ver Definição 1.0.3, Apêndice A). Considere o operador

$$T_F = J_F^* \circ T_y \circ J_F : F \to F^*.$$

Observe que o operador T_F satisfaz as hipóteses do teorema, isto é, T_F é contínuo, pois é composição de aplicações continuas.

O operador T_F é monotônico, pois sendo T monotônico, segue-se que

$$\begin{aligned} (T_F x - T_F x', x - x') &= ((J_F^* \circ T_y \circ J_F)(x) - (J_F^* \circ T_y \circ J_F)(x'), x - x') \\ &= (T_y(J_F(x)) - T_y(J_F(x')), J_F(x) - J_F(x')) \geq 0, \quad \forall x, x' \in X. \end{aligned}$$

Além disso, T_F é coercivo, visto que

$$\frac{(T_F x, x)}{\|x\|} = \frac{((J_F^* \circ T_y \circ J_F)(x), x)}{\|x\|} = \frac{(T_y(J_F)(x), J_F(x))}{\|x\|} = \frac{(T_y x, x)}{\|x\|}.$$

Logo, pelo 1º caso, T_F é sobrejetivo e portanto existe $x_F \in F$ tal que

$$T_F(x_F) = 0. \tag{1.15}$$

Usando a coercividade de T_y e (1.15), obtemos uma constante $K > 0$ tal que

$$\|x_F\| \leq K, \quad \forall F \in \mathscr{F}. \tag{1.16}$$

Agora, para cada $F_0 \in \mathscr{F}$, defina o conjunto

$$V_{F_0} = \overline{\bigcup_{F \supset F_0} \{x_F\}}^{\sigma(X,X^*)}.$$

Sendo X é reflexivo, segue do Teorema 1.0.4 (ver Apêndice A), temos que a bola $\overline{B_K(0)}$ é fracamente compacta. Logo, por (1.16), V_{F_0} é fracamente compacta.

Observe que cada conjunto da família $\{V_{F_0}; F_0 \in \mathscr{F}\}$ está contido em uma interseção finita de conjuntos da família. De fato, seja $F_0 \in \mathscr{F}$. Assim, existem

$$F_1, F_2, ..., F_p \in \mathscr{F}$$

tais que

$$F_0 = Span\{F_1, F_2, ..., F_p\}.$$

Seja $x_{F_0} \in F_0$ tal que $T_{F_0}(x_{F_0}) = 0$. Desde que,

$$F_j \subset F_0, j = 1, 2, ..., p,$$

teremos

$$x_{F_0} \in V_{F_j}, \quad j = 1, 2, ..., p.$$

Logo,

$$x_{F_0} \in \bigcap_{j=1}^{p} V_{F_j}.$$

Mostrando que $V_{F_0} \subset \bigcap_{j=1}^{p} V_{F_j}$. Observe que existe $x_0 \in X$ tal que

$$x_0 \in \bigcap_{F_0 \subset \mathscr{F}} V_{F_0}.$$

Com efeito, se $V_{F_1} \cap V_{F_2} = \emptyset$ para alguns $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$. Então, definindo $F = Span\{F_1, F_2\}$ temos $F \in \mathscr{F}$ e $x_F \in V_{F_1} \cap V_{F_2}$. Contradição.

A ideia agora é mostrar que $T_F x_0 = 0$. Dado $y \in X$ arbitrário, seja $F_0 \in \mathscr{F}$ tal que $y \in F_0$. Assim, para $F \supset F_0$, $F \in \mathscr{F}$, temos

$$(T_F y - T_F(x_F), y - x_F) \geq 0.$$

Daí, por (1.15), segue que

$$(T_F y, y - x_F) \geq 0.$$

Desde que $x_0 \in V_{F_0}$, existe $(x_{F_n}) \in \bigcup_{F \supset F_0} \{x_F\}$ tal que

$$x_{F_n} \rightharpoonup x_0.$$

Logo,

$$(T_F y, y - x_0) \geq 0. \tag{1.17}$$

Fazendo, $y = x_0 + tz$, $z \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, em (1.17), obtemos

$$t(T_F(x_0 + tz), z) \geq 0, \ \forall t \geq 0, \ \forall \ z \in X, \tag{1.18}$$

e

$$t(T_F(x_0 + tz), z) \leq 0, \ \forall t \leq 0, \ \forall \ z \in X. \tag{1.19}$$

Assim, se $t \to 0^+$, segue de (1.18) que

$$(T_F x_0, z) \leq 0, \quad \forall z \in X, \tag{1.20}$$

e se $t \to 0^-$, segue de (1.19) que

$$(T_F x_0, z) \leq 0, \quad \forall z \in X. \tag{1.21}$$

Portanto, de (1.20) e (1.21), concluímos que $T_F x_0 = 0$, o que nos dá também a sobrejetividade de T. $\square$

Definição 1.1.2. *Seja H um espaço de Hilbert real. Um operador multivalente é uma aplicação $T : H \to \mathscr{P}(H)$, dada por*

$$Tx = \{y \in H : [x, y] \in H \times H\},$$

onde $\mathscr{P}(H)$ é o conjunto das partes de H. Neste caso, o domínio de T é o conjunto

$$D(T) = \{x \in H; Tx \neq \emptyset\}$$

e a imagem de T é o conjunto

$$Im(T) = \bigcup_{x \in H} Tx.$$

Sejam $T, S : H \to \mathscr{P}(H)$ operadores multivalentes. Definimos

$$(T+S)x = \{u_1 + u_2 : u_1 \in Tx \text{ e } u_2 \in Sx\}$$

e para, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(\lambda T + \mu S)x = \{\lambda u + \mu v : u \in Tx \text{ e } v \in Sx\}.$$

Quando, para cada $x \in D(T)$, o conjunto Tx é unitário, T é chamado de operador univalente.

Definição 1.1.3. *Um operador multivalente $T : D(T) \subseteq H \to H$ é monotônico se, seu gráfico, denotado por $G(T)$ e definido por*

$$G(T) = \{[x, u] \in H \times H : u \in Tx\},$$

for monotônico, isto é,

$$(u_1 - u_2, x_1 - x_2) \geq 0,\ u_1 \in Tx_1, u_2 \in Tx_2. \tag{1.22}$$

Se o gráfico $G(T)$ do operador monotônico T não é subconjunto próprio de outro gráfico monotônico, então T é chamado de maximal monotônico.

Observação 1.1.1. *Sejam $T : D(T) \to H$, $x_0 \in D(T)$ e $y_0 \in Tx_0$. Podemos definir o seguinte operador*

$$\overline{T} : D(\overline{T}) = D(T) - x_0 \to H$$

por

$$\overline{T}(z) = T(z + x_0) - y_0.$$

Note que $0 \in D(\overline{T})$, $\overline{T}(0) \ni 0$ e $\overline{T}$ é maximal monotônico. De fato, sejam $y \in \overline{T}x$ e $w \in \overline{T}v$. Assim,

$$(y - w, x - v) = (y - y_0 - (w - y_0), x - x_0 - (v - x_0)) \geq 0,$$

pois $y + y_0 \in T(x + x_0)$ e $w + y_0 \in T(v + x_0)$.

Definição 1.1.4. *Definimos o operador T^* como sendo o operador conjugado de T da seguinte forma*

$$T^*y = \{w \in H : \textit{para todo } x \in D(T) \textit{ e } u \in Tx; (x, w) = (u, y)\}.$$

Isto nos diz que T^*y é a união dos conjuntos de soluções das equações

$$(x, .) = (u, y),\ \forall x \in D(T) \text{ e } u \in Tx.$$

Lema 1.1.1. *Se T é monotônico, então os operadores T^{-1} e λT dados respectivamente por*

$$T^{-1}u = \{x \in H : u \in Tx\}$$

e

$$\lambda Tx = \{\lambda u : u \in Tx\}$$

também são monotônicos.

Demonstração. Suponha que T seja monotônico. Primeiramente mostraremos que T^{-1} é monotônico. Sejam $x_1, x_2 \in H$ tais que

$$x_1 \in T^{-1}u_1 \ \text{ e } \ x_2 \in T^{-1}u_2.$$

Então,

$$u_1 \in Tx_1 \ \text{ e } \ u_2 \in Tx_2.$$

Segue que

$$(x_1 - x_2, u_1 - u_2) = (u_1 - u_2, x_1 - x_2) \geq 0,\ \forall u_1 \in Tx_1,\ \forall u_2 \in Tx_2 \text{ e } \lambda > 0.$$

Mostraremos agora que o operador λT é monotônico. Sejam $x_1, x_2 \in H$, então

$$(\lambda u_1 - \lambda u_2, x_1 - x_2) = (\lambda(u_1 - u_2), x_1 - x_2) = \lambda((u_1 - u_2), x_1 - x_2) \geq 0,$$

$\forall u_1 \in Tx_1, u_2 \in Tx_2,\ \ \forall \lambda > 0.$ □

Definição 1.1.5. *Um operador $S : D(S) \subset H \to H$ é dito contrativo se,*

$$\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|,\ \forall x, y \in D(T).$$

Proposição 1.1.1. *Seja $T : H \to H$ um operador monotônico. Então, a aplicação $I + \lambda T$, para $\lambda > 0$, é injetiva, isto é,*

$$(I + \lambda T)x \cap (I + \lambda T)y = \emptyset,\ \ \textit{para}\ \ x \neq y.$$

Além disso, $(I + \lambda T)^{-1}$ é uma aplicação contrativa de $Im(I + \lambda T)$ em H.

Demonstração. Por definição de produto interno temos

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y), \ \ \forall x, y \in H. \tag{1.23}$$

Sendo T monotônico, para $u \in Tx$ e $v \in Ty$, tem-se

$$(u-v, x-y) \geq 0, \ \forall x, y \in H.$$

Segue então de (1.23) que,

$$\|x-y\|^2 \leq (x + \lambda u - (y + \lambda v), x - y), \forall \lambda > 0, \forall x, y \in H.$$

Da pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$(x + \lambda u - (y + \lambda v), x - y) \leq \|x + \lambda u - (y + \lambda v)\| . \|x - y\| .$$

Logo,

$$\|x-y\| \leq \|x + \lambda u - (y + \lambda v)\| . \tag{1.24}$$

Portanto, T é injetiva, pois do contrário,

$$W = (I + \lambda T)x \cap (I + \lambda T)y \neq \emptyset, \ \ \text{para} \ \ x \neq y,$$

ou seja, existe $z \in W$ tal que

$$z = x + \lambda u = y + \lambda v,$$

o que contradiz (1.24). Além disso, a desigualdade (1.24) nos diz que o operador $(I + \lambda T)^{-1}$ é contrativo. $\square$

O teorema abaixo é uma caracterização dos operadores maximais monotônicos. Este resultado será utilizado com bastante frequência no decorrer deste trabalho.

Teorema 1.1.4. *Seja T um operador em H. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *T é maximal monotônico;*

(ii) *T é monotônico e $Im(I + T) = H$;*

(iii) *Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda T)^{-1}$ é uma contração sobre todo H.*

Demonstração. Mostraremos primeiramente que $(iii) \Rightarrow (ii)$. Suponhamos que para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda T)^{-1}$ é uma contração sobre H. Queremos mostrar que T é monotônico e $Im(I + T) = H$.

Sejam $x_1, x_2 \in D(T)$, $\lambda > 0$ e sejam $u_1 \in Tx_1$ e $u_2 \in Tx_2$. Considere

$$y_1 = x_1 + \lambda u_1 \in (I + \lambda T)x_1$$

e

$$y_2 = x_2 + \lambda u_2 \in (I + \lambda T)x_2.$$

Então, $x_1 = (I + \lambda T)^{-1} y_1$ e $x_2 = (I + \lambda T)^{-1} y_2$. Assim,

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \left\|(I + \lambda T)^{-1} y_1 - (I + \lambda T)^{-1} y_2\right\| \\ &\leq \|x_1 + \lambda u_1 - (x_2 + \lambda u_2)\| \\ &= \|x_1 - x_2 + \lambda(u_1 - u_2)\| . \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &\leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(u_1 - u_2)\|^2 \\ &= \|(x_1 - x_2)\|^2 + 2\lambda(u_1 - u_2, x_1 - x_2) + \|u_1 - u_2\|^2 , \end{aligned}$$

para todo $u_1 \in Tx_1$ e $u_2 \in Tx_2$ e qualquer que seja $\lambda > 0$. Assim, dividindo por λ,

$$0 \leq \lambda \|u_1 - u_2\|^2 + 2(u_1 - u_2, x_1 - x_2)$$

para todo $\lambda > 0$. Portanto,

$$(u_1 - u_2, x_1 - x_2) \geq 0.$$

Logo, T é monotônico. Além disso, como $(I + \lambda T)^{-1}$ está definido em todo H e para todo $\lambda > 0$, e em particular para $\lambda = 1$, temos $Im(I + T) = H$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Seja $[y, v] \in H \times H$ monotonicamente relacionado com $G(T)$, isto é,

$$(v - u, y - x) \geq 0, \ \forall u \in Tx. \tag{1.25}$$

Mostraremos que $v \in Ty$. Existe $z \in H$ tal que $y + v \in z + Tz$, ou seja,

$$v + y - z \in Tz,$$

e usando em (1.25), obtemos

$$(v - (v + y - z), y - z) \geq 0,$$

donde implica que $y = z$. Assim, $v \in Ty$. Logo, T é maximal monotônico, pois se T não fosse maximal monotônico existiria um operador $S : H \to H$ tal que $G(T)$ seria subconjunto próprio de G(S), ou seja, existiria $v \in Sz$ tal que

$$[y, v] \notin G(T). \tag{1.26}$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Suponha que T é maximal monotônico. Provaremos que para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda T)^{-1}$ é uma contração definida em H. Se T é maximal monotônico, então para todo $\lambda > 0$ temos que λT é maximal monotônico e portanto $Im(I + \lambda T) = H$. Além disso, para todo $\lambda > 0$ e quaisquer que sejam $y_1, y_2 \in Im(I + \lambda T)$ temos que existem $x_1, x_2 \in D(T)$ e $u_1 \in Tx_1$ e $u_2 \in Tx_2$ tais que $y_1 = x_1 + \lambda u_1$ e $y_2 = x_2 + \lambda u_2$. Assim,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(u_1 - u_2)\| = \|y_1 - y_2\|$$

para todo $y_1, y_2 \in Im(I + \lambda T) = H$. Portanto, $(I + \lambda T)^{-1}$ é uma contração definida em H. $\square$

Definição 1.1.6. *Seja T um operador maximal monotônico. Para cada $\lambda > 0$, definimos os operadores*

$$J_\lambda = (I + \lambda T)^{-1}, \tag{1.27}$$

chamado resolvente de T, e,

$$T_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda), \tag{1.28}$$

chamado a aproximação de Yosida (ou regularização) de T.

Observação 1.1.2. *O operador $J_\lambda = (I + \lambda T)^{-1}$ é univalente, pois segue da Proposição 1.1.1 que o operador J_λ é contrativo. Uma vez sendo um operador contrativo, segue que J_λ é univalente. Diante disto, segue que o operador T_λ também é univalente.*

Lema 1.1.2. *Seja T um operador maximal monotônico. Então, $T_\lambda v = T(J_\lambda v)$, para todo $v \in H$ e para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Para cada $v \in H, \lambda > 0$ temos $v \in (I + \lambda T)(J_\lambda v)$. Daí,

$$v \in J_\lambda v + \lambda T(J_\lambda v).$$

Assim,

$$1/\lambda(v - J_\lambda v) = T(J_\lambda v).$$

Logo, por (1.28), obtemos

$$T_\lambda v = T(J_\lambda v), \;\; \forall v \in H \;\text{ e }\; \lambda > 0. \tag{1.29}$$

$\square$

Lema 1.1.3. *Se T é monotônico, então*

$$J_\lambda = (I + \lambda T)^{-1} \;\; e \;\; T_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda),$$

também o são.

Demonstração. Sejam $u_1, u_2 \in H$. Defina $x_1 = J_\lambda u_1$ e $u_2 = J_\lambda u_2$.

$$u_2 \in J_\lambda^{-1} x_2 = (I + \lambda T)x_2$$

e

$$u_1 \in J^{-1} x_1 = (I + \lambda T)x_1.$$

Logo, existem $v_1 \in Tx_1$ e $v_2 \in Tx_2$ tais que

$$u_1 = x_1 + \lambda v_1$$

e

$$u_2 = x_2 + \lambda v_2.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(J_\lambda u_1 - J_\lambda u_2, u_1 - u_2) &= (x_1 - x_2, x_1 + \lambda v_1 - x_2 + \lambda v_2) \\
&= (x_1 - x_2, x_1 - x_2 + \lambda(v_1 - v_2)) \\
&= \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda(x_1 - x_2, v_1 - v_2) \\
&\geq (v_1 - v_2, x_1 - x_2) \geq 0, \;\; \forall x_1, x_2 \in H, \lambda > 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(J_\lambda u_1 - J_\lambda u_2, u_1 - u_2) \geq 0, \;\; \forall u_1, u_2 \in H, \lambda > 0.$$

Portanto, J_λ é monotônico.

Agora, mostraremos que T_λ é monotônico. Do do Lema 1.1.2, temos que, para todo $x \in H$, $\lambda > 0$ temos $T_\lambda x = T(J_\lambda x)$, então

$$\begin{aligned}(T_\lambda x - T_\lambda y, x - y) &= (T_\lambda x - T_\lambda y, \lambda T_\lambda x - \lambda T_\lambda y + J_\lambda x - J_\lambda y) \\ &= (T_\lambda x - T_\lambda y, \lambda T_\lambda x - T_\lambda y) + (T_\lambda x - T_\lambda y, J_\lambda x - J_\lambda y) \\ &\geq \lambda \|T_\lambda x - T_\lambda y\|^2 \geq 0, \ \ \forall x, y \in H.\end{aligned}$$

Logo,

$$(T_\lambda x - T_\lambda y, x - y) \geq 0, \ \ \forall x, y \in H, \lambda > 0.$$

Portanto, T_λ é monotônico. □

Proposição 1.1.2. *Seja* $(x_n, y_n) \in G(T)$ *tal que* $x_n \to x$*,* $y_n \to y$ *e* $\limsup(y_n, x_n) \leq (y, x)$*. Então,* $(x, y) \in G(T)$ *e* $(y_n, x_n) \to (y, x)$*.*

Demonstração. Ver [4], página 27, Proposição 2.5. □

Agora temos o seguinte resultado sobre a convexidade sobre $D(T)$.

Teorema 1.1.5. *Para* T *maximal monotônico,* $\overline{D(T)}$ *é convexo, e, para todo* $x \in H$*, tem-se*

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = proj_{\overline{D(T)}}\, x. \tag{1.30}$$

Demonstração. Seja $C = \overline{co\ D(T)}$. Sejam $x \in H$ e $x_\lambda = J_\lambda x$, então

$$\left(x_\lambda, \frac{x - x_\lambda}{\lambda}\right) \in G(T).$$

Como T é monotônico e $\lambda > 0$, para todo $(\xi, \eta) \in G(T)$, temos

$$(x - x_\lambda - \lambda\eta, x_\lambda - \xi) \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|x_\lambda\|^2 &\leq (x - x_\lambda - \lambda\eta, x_\lambda - \xi) + (x_\lambda, \eta) && (1.31)\\ &\leq \frac{1}{2}\|x - \lambda\eta\|^2 + \frac{1}{2}\|x_\lambda - \xi\|^2 && (1.32)\\ &+ \ \frac{1}{2}\|x_\lambda\|^2 \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + \frac{1}{2}\|x_\lambda \xi\|^2. && (1.33)\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|x_\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x-\lambda\eta\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi\|^2.$$

Fazendo $\lambda \to 0$, temos

$$\|x_\lambda\|^2 \leq \|x\|^2 \|\xi\|^2.$$

Portanto, x_λ é limitado quando $\lambda \to 0$.

Como (x_n) é uma sequência limitada em H. Pelo Teorema 1.0.5 (ver Apêndice A), existe uma (x_{n_k}) que converge fracamente. Assim, quando $\lambda_n \to 0$, x_{λ_n} com $x_0 \in C$. Uma vez que $x_{\lambda_n} \to x_0$, então pela Proposição 1.0.2 (ver Apêndice A). Logo, de (1.31) segue que

$$\begin{aligned}
\|x_0\|^2 &\leq \liminf_{\lambda_n \to 0} \|x_{\lambda_n}\|^2 \\
&\leq (x, x_0-\xi) + (x_0, \xi), \ \forall \xi \in D(T).
\end{aligned}$$

Temos então,

$$(x_0, x_0) \leq (x, x_0-\xi) + (x_0, \xi)$$

o que implica

$$(x-x_0, \xi-x_0) \leq 0, \ \forall \xi \in D(T).$$

Diante disto, sendo $C = \overline{co\ D(T)}$, temos que

$$(x-x_0, \xi-x_0) \leq 0, \ \forall \xi \in C.$$

Portanto, $x_0 = proj_C x$.

Sendo a projeção em um convexo fechado de um espaço de Hilbert unicamente determinada, logo o limite independe da subsequência (x_{λ_n}) tomada. Portanto,

$$x_\lambda \rightharpoonup proj_C x \text{ quando } \lambda \to 0.$$

Concluímos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{\lambda \to 0} \|x_\lambda\|^2 &\leq \limsup_{\lambda \to 0}((x, x_\lambda - \xi) + (x_\lambda, \xi) - \lambda(\eta, x_\lambda - \eta)) \\
&= (x, x_0-\xi) + (x_0, \xi), \ \forall \xi \in C.
\end{aligned}$$

Em particular, tomando $\xi = x_0$, temos

$$\limsup_{\lambda \to 0} \|x_\lambda\|^2 \leq \|x_0\|^2.$$

Segue então que

$$\lim_{\lambda \to 0} \|x_\lambda\| = \|x_0\| .$$

Portanto, $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = proj_C x$.

Sendo $J_\lambda x = x_\lambda$, $x_\lambda \in D(T)$ e para todo $x \in H$ e para todo $z \in C$, $proj_C z = z$, segue que

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda z = z,$$

logo, temos $z \in \overline{D(T)}$. Portanto, $C = \overline{D(T)}$.

Concluímos daí, que $\overline{D(T)}$ é convexo e

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = proj_{\overline{D(T)}} x, \ \forall x \in H.$$

□

Corolário 1.1.2. *Seja T um operador maximal monotônico, então $\overline{Im(T)}$ é convexo.*

Demonstração. Segue do Lema 1.1.1 que, se T é maximal monotônico, então T^{-1} é maximal monotônico. Uma vez que $Im(T) = D(T^{-1})$ então Teorema 1.1.5, temos que $\overline{Im(T)}$ é convexo. □

1.2 Relação entre operadores contrativos e monotônicos

O interesse por operadores contrativos e teoremas de ponto fixo surgiu quando se verificou seu íntimo relacionamento com os operadores monotônicos.

Proposição 1.2.1. *$S : D \subseteq H \to H$ é contrativo, então $I \pm S$ é monotônico.*

Faremos agora o caso $I - S$. Sejam $x, y \in H$, então

$$\begin{aligned} ((I-S)x - (I-S)y, x-y) &= (x - Sx - (y - Sy), x - y) \\ &= (x - y - (Sx - Sy), x - y) \\ &= \|x-y\|^2 - (Sx - Sy, x - y). \end{aligned}$$

Note que

$$\|Sx - Sy - (x-y)\|^2 = \|Sx - Sy\|^2 - 2(Sx - Sy, x - y) + \|x - y\|^2 .$$

Sendo S contrativo, então

$$\|Sx - Sy - (x-y)\|^2 \leq 2\|x-y\|^2 - 2(Sx - Sy, x - y).$$

Assim,

$$-(Sx - Sy, x - y) \geq \frac{1}{2}\|Sx - Sy - (x-y)\|^2 - \|x-y\|^2 ,$$

Segue então que,

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 - (Sx - Sy, x - y) &\geq \|x-y\|^2 + \frac{1}{2}\|Sx - Sy - (x-y)\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|Sx - Sy - (x-y)\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$((I-S)x - (I-S)y, x - y) \geq 0, \;\; \forall x, y \in H.$$

O caso do operador $(I + S)$ segue de modo análogo.

Teorema 1.2.1. *(Ponto fixo de Browder)*

Seja $S : B_r \to B_r$ uma aplicação contrativa da bola B_r de raio r centrada na origem do espaço de Hilbert nela própria. Então, S tem um ponto fixo.

Demonstração. Seja $0 \leq \lambda_n < 1$ tal que $\lambda_n \to 1$ quando $n \to +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $S_n : \overline{B_r} \to \overline{B_r}$ por $S_n = \lambda_n S$. Assim,

$$\|S_n x - S_n y\| = \|\lambda_n Sx - \lambda_n Sx\| = \lambda_n \|Sx - Sy\| \leq \lambda_n \|x - y\|, \ \ \forall x, y \in \overline{B_r}.$$

Logo, S_n é uma contração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe, pelo Teorema 1.0.2 (ver Apêndice A) um único $x_n \in \overline{B_r}$ tal que

$$S_n x_n = x_n.$$

Equivalentemente,

$$\lambda_n S x_n = x_n.$$

Assim,

$$\|Sx_n - x_n\| = \|Sx_n - \lambda_n Sx_n\| = (1 - \lambda_n) \|Sx_n\|.$$

Como $Sx_n \in B_r$, então $\|Sx_n\| \leq r$, segue-se que

$$|\lambda_n - 1| . \|Sx_n\| \leq (1 - \lambda_n) r.$$

Assim,

$$\|x_n - Sx_n\| \leq (1 - \lambda_n) r. \tag{1.34}$$

Sendo $x_n \in \overline{B_r}$ limitada, podemos passar a uma subsequência, de modo que

$$x_n \rightharpoonup x \ \ \text{e} \ \ (1 - S)x_n \to 0.$$

A aplicação S pode ser estendida a uma aplicação $S \circ R$, onde $R : H \to B_r$, é definida por

$$R(x) = \begin{cases} x & , \ \ se \ \|x\| \leq r \\ \frac{r}{\|x\|} x & , \ \ se \ \|x\| > r. \end{cases}$$

Considerando a extensão $\overline{S} = S \circ R$, tem-se que $\overline{S}$ é contrativa. De fato, se $x, y \in B_r$, temos

$$\begin{aligned} \left\|\overline{S}x - \overline{S}y\right\| &= \|S(Rx) - S(Ry)\| \\ &= \|Sx - Sy\| \\ &\leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\|\overline{S}x - \overline{S}y\right\| \leq \|x - y\|, \ \ \forall x, y \in B_r.$$

Agora, se $x, y \notin B_r$, segue que

$$\begin{aligned}\left\|\overline{S}x - \overline{S}y\right\| &= \|S(Rx) - S(Ry)\| \\ &= \|S(rx/\|x\|) - S(ry/\|y\|)\| \\ &\leq \|rx/\|x\| - ry/\|y\|\| \,.\end{aligned}$$

Para concluir este caso devemos mostrar que

$$\|rx/\|x\| - ry/\|y\|\| \leq \|x - y\| \,.$$

Note que,

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 \,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|rx/\|x\| - ry/\|y\|\|^2 &= 2r^2 - (2r^2/\|x\| \,.\, \|y\|)(x, y) \\ &= (1 - (x, y)/\|x\| \, \|y\|)2r^2 \\ &= (1 - (x, y)/\|x\| \, \|y\|)2\|x\| \,.\, \|y\| \\ &= 2 \, \|x\| \,.\, \|y\| - 2(x, y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x, y) \\ &= \|x - y\|^2 \,.\end{aligned}$$

Mostrando que,

$$\left\|\overline{S}x - \overline{S}y\right\| \leq \|x - y\| \,, \;\; \forall x, y \in H \backslash \overline{B_r}.$$

Por fim, se $x \in \overline{B_r}$ e $y \notin \overline{B_r}$, então

$$\left\|\overline{S}x - \overline{S}y\right\| = \|Sx - S(ry/\|y\|)\| \leq \|x - ry/\|y\|\| \leq \|x - y\| \,.$$

Logo,

$$\left\|\overline{S}x - \overline{S}y\right\| \leq \|x - y\| \,, \;\; \forall x, y \in H.$$

Vamos manter a notação S para a extensão. Como S é contrativo, vimos da Proposição 1.2.1 que o operador $I - S$ é monotônico. Feito isto, temos

$$((I - S)y - (I - S)x_n, y - x_n) \geq 0, \;\; \forall y \in H, n \in \mathbb{N}. \tag{1.35}$$

Uma vez que $x_n \rightharpoonup x$ e $(I-S)x_n \to 0$, da Proposição 1.0.2 (Ver Apêndice A) que podemos passar ao limite em (1.35) quando $n \to +\infty$, e obtemos

$$((I-S)y, y-x) \geq 0, \quad \forall y \in H.$$

Considerando $y = x + tz$, $t > 0$ e $z \in H$ arbitrário. Logo,

$$((I-S)(x+tz), tz) \geq 0,$$

ou seja,

$$t((I-S)(x+tz), z) \geq 0,$$

ou ainda,

$$((I-S)(x+tz), z) \geq 0,$$

e passando ao limite quanto $t \to 0$, obtemos

$$((I-S)x, z) = 0, \quad \forall z \in H.$$

Tomando $z = (I-S)x$ tem-se que, $(I-S)x = 0$. Portanto, $Sx = x$. $\square$

Corolário 1.2.1. *Seja $S : \overline{B_r} \to H$ uma aplicação contrativa definida em uma bola $\overline{B_r}$ de raio r e centrada na origem de um espaço de Hilbert H. Suponha que*

$$Sx \neq \lambda x, \;\; \forall \lambda > 1 \;\; e \; \|x\| = r. \tag{1.36}$$

Então, S tem um ponto fixo.

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.1 a aplicação $\overline{S} = R \circ S$ tem um ponto fixo, onde

$$\overline{S}(x) = \begin{cases} Sx & , \;\; se \; \|Sx\| \leq r \\ \frac{r}{\|Sx\|} Sx & , \;\; se \; \|Sx\| > r. \end{cases}$$

Seja $\bar{x}$ o ponto fixo de $\bar{S}$. Afirmamos que $\bar{x}$ também é ponto fixo de S. Primeiramente temos que, se $\|S\bar{x}\| \leq r$, então $\bar{x}$ é ponto fixo de S. Suponha, por contradição, que $\|S\bar{x}\| > r$, segue que

$$\bar{x} = \overline{S}\bar{x} = \frac{r}{\|S\bar{x}\|} S\bar{x}.$$

Assim,

$$S\bar{x} = \frac{\|Sx\|}{r} \bar{x}. \tag{1.37}$$

Definindo $\lambda = \frac{\|S\bar{x}\|}{r} > 1$, como por 1.37 $\|\bar{x}\| = r$, segue-se que

$$S\bar{x} = \lambda \bar{x}, \ \lambda > 1 \ \text{ e } \ \|\bar{x}\| = r,$$

o que contradiz (1.36). Assim, $\|S\bar{x}\| \leq r$, e consequentemente,

$$\bar{x} = \overline{S}\bar{x} = S\bar{x}.$$

Portanto, $S\bar{x} = \bar{x}$. □

Definição 1.2.1. *Um operador multivalente T é dito coercivo se,*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{(u, x)}{\|x\|} \to +\infty, \ \forall \ u \in Tx. \tag{1.38}$$

Proposição 1.2.2. *Um operador $T : D(T) \to H$ é coercivo se, e somente se,*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{(u, x - y)}{\|x\|} \to +\infty, \ \forall y \in D(T), \ \forall u \in Tx. \tag{1.39}$$

Demonstração. Suponha que T seja , então para todo $y \in D(T)$, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{(u, x - y)}{\|x\|} &= \frac{(u, x)}{\|x\|} - \frac{(u, y)}{\|x\|} \\ &= \frac{(u, x)}{\|x\|} - \frac{(x, w)}{\|x\|}, \end{aligned}$$

para algum $w \in T^{*}y$. Assim, por Cauchy-Schwarz, temos

$$\frac{(u, x - y)}{\|x\|} \geq \frac{(u, x)}{\|x\|} - \|w\|.$$

Passando ao limite de $\|x\| \to +\infty$, e usando a coercividade de T, obtemos

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{(x, w)}{\|x\|} = +\infty,$$

uma vez que $w \in T^{*}y$ está fixado.

Reciprocamente, temos que

$$\frac{(u, x)}{\|x\|} = \frac{(u, x - y)}{\|x\|} + \frac{(u, y)}{\|x\|}.$$

Notemos que

$$\frac{(u, x)}{\|x\|} = \frac{|(x, w)|}{\|x\|} \geq -\frac{|(x, w)|}{\|x\|},$$

para algum $w \in T^*y$. Então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\frac{|(x,y)|}{\|x\|} \geq -\|w\|.$$

Assim,

$$\frac{(u,x)}{\|x\|} \geq \frac{(u,x-y)}{\|x\|} - \|w\|.$$

Passando ao limite de $\|x\| \to +\infty$, concluímos que T é coercivo. $\square$

Teorema 1.2.2. *Seja $T : D(T) \subseteq H \to H$ operador maximal monotônico. Suponha que T seja coercivo, então $Im(T) = H$.*

Demonstração. A inclusão $Im(T) \subset H$ ocorre de maneira natural. Então, resta-nos mostrar que $H \subset Im(T)$. Para isto, é suficiente provar que $0 \in Im(T)$. De fato, suponha que, para todo operador maximal monotônico e coercivo, tenhamos provado que $0 \in Im(T)$. Assim, para todo $y \in H$, com $y \neq 0$, definimos

$$T_y = T - y.$$

Mostraremos que T_y satisfaz as hipóteses do Teorema, isto é, T_y maximal monotônico e coercivo.

Provaremos primeiramente que T é coercivo. Com efeito, seja $u_y \in T_y x$, então

$$\frac{(u_y,x)}{\|x\|} = \frac{(u-y,x)}{\|x\|} = \frac{(u,x)}{\|x\|} - \frac{(y,x)}{\|x\|} \to +\infty,$$

quando $\|x\| \to +\infty$, pois T é coercivo, onde $u \in Tx$.

Vejamos que T_y é maximal monotônico.

De fato, sejam $u_y \in T_y x, v_y \in T_y z$, então

$$\begin{aligned} (u_y - v_z, x - z) &= (u - y - (v - y), x - z) \\ &= (u - v, x - z) \geq 0, \ \forall u \in Tx, v \in Ty. \end{aligned}$$

Logo, $(u_y - v_y, x - z) \geq 0, \ \forall u_y \in Tx, \ \forall\, v_y \in Tz$.

Finalmente, mostraremos que

$$0 \in Im(T_y) \text{ se, e somente se, } y \in Im(T).$$

De fato, se $0 \in Im(T_y)$, existe $u \in D(T_y)$ tal que

$$0 \in T_y u = Tu - y.$$

Logo, existe $z \in Tu$ tal que

$$0 = z - y, \text{ou seja}, z = y \in Tu.$$

Mostrando que $y \in Im(T)$.

Reciprocamente, se $y \in Im(T)$ então, existe $u \in D(T)$ tal que

$$v \in Tu, \text{ isto é}, y = v,$$

ou seja,

$$0 = v - y \in Tu - y = T_y u.$$

Donde $0 \in Im(T_y)$.

Resta-nos mostrar que $0 \in Im(T)$, isto é, existe $x \in H$ tal que

$$0 \in Tx. \tag{1.40}$$

Note que (1.40) é equivalente a existência de ponto fixo do operador $(I + T)^{-1} : H \to H$.

Com efeito,

$$(I + T^{-1})x = x$$

se, e somente se,

$$x \in (I + T)x,$$

equivalentemente,

$$x \in x + Tx$$

Logo,

$$0 \in Tx.$$

Para provar a existência de ponto fixo usaremos o Corolário 1.2.1. Como o operador $(I + T)^{-1}$ é contrativo, afirmamos que existe uma bola B_r, na fronteira da qual $(I + T)^{-1}$ satisfaz a condição (1.36) do Corolário 1.2.1. Suponha, por contradição, que isto não ocorra. Então existe uma sequência $\{x_m\}_n \subset H$ com $\|x\| \to +\infty$ tal que

$$(I + T)^{-1}x_n = \lambda_n x_n, \text{ com } \lambda_n \geq 1.$$

Então,

$$x_n \in (I + T)\lambda_n x_n,$$

ou seja,

$$x_n \in \lambda_n x_n + T\lambda_n x_n,$$

ou ainda,

$$(1-\lambda_n)x_n \in T\lambda_n x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela coercividade de T, segue que

$$\frac{(u_n, \lambda_n x_n)}{\|\lambda_n x_n\|} \to +\infty \ \forall u_n \in T_{\lambda_n} x_n.$$

Tal fato contradiz a desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{((1-\lambda_n)x_n, \lambda_n x_n)}{\|\lambda_n x_n\|} &= \frac{(1-\lambda_n)\|x_n\|^2}{\|x_n\|} \\ &= (1-\lambda_n)\|x_n\| \leq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo, $(I+T)^{-1}$ tem um ponto fixo e $0 \in Im(T)$. Mostrando que, $Im(T) = H$. $\square$

1.3 Alguns exemplos de Operadores Monotônicos

Nesta seção, mostraremos que alguns operadores são monotônicos, os quais desempenharão um papel importante nas aplicações do próximo capítulo.

Exemplo 1.3.1. *O operador proj$_C : H \to C$ é monotônico. Além disso, $proj_C$ é uma aplicação contrativa.*

Com efeito, seja C um subconjunto convexo fechado de um espaço de Hilbert H. Assim

$$(x - \text{proj}_C x, u - \text{proj}_C x) \leq 0, \forall u \in C. \tag{1.41}$$

Se y for outro ponto de H tem-se

$$(y - \text{proj}_C y, v - \text{proj}_C y) \leq 0, \forall v \in C. \tag{1.42}$$

Tomando $u = \text{proj}_C y$ em (1.41) e $v = \text{proj}_C x$ em (1.42), segue-se que

$$(x - \text{proj}_C x, \text{proj}_C y - \text{proj}_C x) \leq 0 \tag{1.43}$$

e

$$(y - \text{proj}_C y, \text{proj}_C x - \text{proj}_C y) \leq 0,$$

ou equivalentemente,

$$(\text{proj}_C y - \text{proj}_C x, x - \text{proj}_C x) \leq 0 \tag{1.44}$$

e

$$(\text{proj}_C x - \text{proj}_C y, y - \text{proj}_C y) \leq 0. \tag{1.45}$$

Daí,

$$(\text{proj}_C y - \text{proj}_C x, \text{proj}_C y - y) \leq 0.$$

Somando (1.43) e (1.45), obtemos

$$(\text{proj}_C y - \text{proj}_C x, x - y + \text{proj}_C y - \text{proj}_C x) \leq 0.$$

Segue-se que

$$-(\text{proj}_C y - \text{proj}_C x, y - x - (\text{proj}_C y - \text{proj}_C x)) \leq 0,$$

ou seja,

$$(\text{proj}_C y - \text{proj}_C x, y - x - (\text{proj}_C y - \text{proj}_C x)) \geq 0.$$

Assim,

$$(proj_C y - proj_C x, y - x) - \|proj_C y - proj_C x\|^2 \geq 0.$$

Temos então que

$$(proj_C y - proj_C x, y - x) \geq \|proj_C y - proj_C x\|^2, \ \forall x, y \in H. \tag{1.46}$$

Logo,

$$(proj_C y - proj_C x, y - x) \geq 0, \ \forall x, y \in H.$$

Portanto, $proj_C$ é monotônico. Além disso, usando Cauchy-Schwarz em (1.46), obtemos

$$\begin{aligned} \|proj_C y - proj_C x\|^2 &\leq (proj_C y - proj_C x, y - x) \\ &\leq \|proj_C y - proj_C x\| . \|y - x\| . \end{aligned}$$

Assim,

$$\|proj_C y - proj_C x\| \leq \|y - x\|, \ \forall x, y \in H.$$

Logo, $proj_C$ é uma aplicação contrativa.

Definição 1.3.1. *Seja $\phi : H \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, fracamente semicontínua inferiormente e própria. Define-se o domínio essencial ϕ, designado por $D(\phi)$, como sendo*

$$D(\phi) = \{x \in H; \phi(x) < +\infty\}.$$

A subdiferencial de ϕ é um operador multivalente em H, assim definido

$$\partial\phi(x) = \{u \in H; \phi(y) \geq \phi(x) + (u, y - x), \ \forall y \in H\}.$$

Exemplo 1.3.2. *Seja $\phi : H \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, fracamente semicontínua inferiormente e própria. Então, $\partial\phi : H \to H$ é um operador monotônico.*

Com efeito, seja $u \in \partial\phi(x)$ e $v \in \partial\phi(y)$, temos

$$\phi(y) \geq \phi(x) + (u, y - x)$$

e

$$\phi(x) \geq \phi(y) + (v, x - y).$$

Segue-se que somando as desigualdades acima, obtemos

$$\phi(y) + \phi(x) \geq \phi(x) + \phi(y) + (u, y - x) + (v, x - y).$$

Assim,

$$(u, x - y) + (v, y - x) \leq 0.$$

Logo,

$$(v - u, y - x) \geq 0, \;\; \forall \;\; u \in \partial\phi(x), \; \forall \, v \in \partial\phi(y).$$

Portanto, $\partial\phi$ é monotônico.

Observação 1.3.1. *Observe que se $\phi : H \to \mathbb{R}$ é uma função convexa que é Gateaux diferenciável, denotamos por ϕ', então $\phi' = \partial\phi$.*

De fato, mostraremos que $\phi' \in \partial\phi, \; \forall \; x \in H$. Por definição tem-se que

$$(\phi', h) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t}, \; \forall \, h \in H.$$

Então,

$$(\phi', y - x) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(x + t(y-x)) - \phi(x)}{t}, \; \forall \, y \in H.$$

Como ϕ é convexa, tem-se que

$$\begin{aligned}
(\phi(x), y - x) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\phi((1-t)x + ty) - \phi(x)}{t} \\
&\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{(1-t)\phi(x) + t\phi(y) - \phi(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t}\phi(y) - \phi(x) = \phi(y) - \phi(x).
\end{aligned}$$

Logo, $(\phi'(x), y - x) + \phi(x) \leq \phi(y), \; \forall \; y \in H.$

Mostraremos agora que $\phi'(x)$ é o único elemento de $\partial\phi'(x)$, isto é, $\partial\phi$ é univalente. Seja $u \in \partial\phi(x)$, então

$$(u, y - x) \leq \phi(y) - \phi(x), \; \forall \, y \in H.$$

Tomando $y = x + th$, temos

$$(u, th) \leq \phi(x + th) - \phi(x), \; \forall \, h \in H. \tag{1.47}$$

Se $t > 0$, então

$$(u, h) \leq \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t}, \; \forall \, h \in H.$$

Passando ao limite com $t \to 0^+$ temos

$$(u,h) \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t}, \ \forall \, h \in H. \tag{1.48}$$

Se $t < 0$, então de (1.47) temos

$$\frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t} \leq (u,h), \ \forall \, h \in H.$$

E passando ao limite com $t \to 0^-$ temos

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t} \leq (u,h), \ \forall \, h \in H. \tag{1.49}$$

Assim, de (1.48) e (1.49), obtemos

$$(u,h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t}, \ \forall \, h \in H.$$

Portanto, $u = \phi'$.

Exemplo 1.3.3. *∂I_C é monotônico, onde C é um convexo, fechado em H.*

Seja C um conjunto convexo fechado em H, definimos a função indicadora de C, $I_C : H \to$ $\mathbb{R}$dada por

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & , \quad se \; x \in C \\ +\infty & , \quad se \; x \in C. \end{cases}$$

Mostraremos que I_C é convexa, fracamente semicontínua inferiormente e própria e que ∂I_C é maximal monotônica, cujo seu domínio é igual a C. Primeiramente mostraremos que I_C é convexa, ou seja, para todo $x, y \in H$ temos

$$I_C(tx + (1-t)y) \leq tI_C(x) + (1-t)I_C(y), t \in [0,1], \ \forall \, x, y \in H. \tag{1.50}$$

Observe que, se $x, y \in C$, tem-se que $I_C(x) = 0$ e $I_C(y) = 0$ e como C é convexo $tx + (1-t)y \in C$, então $I_C(tx + (1-t)y) = 0, \ t \in [0,1]$. Logo, (1.50) é satisfeita, para todo $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$.

E, se $x, y \notin C$, tem-se que $I_C(x) = I_C(y) = \infty$, temos ainda que $tx + (1-t)y \in C, t \in [0,1]$. Então, $I_C(tx + (1-t)y) = +\infty$. Assim, satisfazendo (1.50), para todo $x, y \notin C$ e $t \in [0,1]$. Agora, se $x \in C$ e $y \in C$, tem-se que $I_C(x) = 0$ e $I_C(y) = +\infty$, note que, ou

$$tx + (1-t)y \in C, t \in [0,1]$$

ou,

$$tx + (1-t)y \notin C, t \in [0,1].$$

Suponha que o primeiro caso ocorra, ou seja, $tx + (1-t)y \in C$, então

$$I_C(tx + (1-t)y) = 0.$$

Caso contrário,

$$I_C(tx + (1-t)y) = +\infty.$$

Em quaisquer caso, (1.50) será satisfeito, e portanto I_C é conxeva.

Para mostrar que I_C é fracamente semicontínua inferiormente devemos provar que $I_C^{-1}((-\infty, \alpha])$ é um fechado fraco em H, $\alpha \in \mathbb{R}$. Desse modo, segue-se que

$$I_C^{-1}(x) = \begin{cases} \emptyset & , \quad se\ \alpha < 0 \\ C & , \quad se\ \alpha \geq 0. \end{cases}$$

Assim, $\emptyset$ e C são fechados fracos em H, por serem convexos e fechados em H.

Por fim, I_C é própria, pois se $x \in C$, temos então

$$I_C(x) = 0,\ \forall x \in C$$

e portanto diferente do vazio.

Calculemos agora $\partial I_C(x)$. Seja $u \in I_C(x)$, então $\partial I_C(x)$ é definida da seguinte forma: Se $x \notin C$, tem-se que $I_C(x) = +\infty$, daí

$$I_C(y) \geq +\infty,\ \forall y \in H.$$

Absurdo, pois se $y \in C, I_C(y) = 0$. Logo, $\partial I_C(x) = \emptyset$.
Se $x \in C$, tem-se que $I_C(x) = 0$, então

$$I_C(y) \geq (u, y - x),\ \forall y \in H.$$

Então, consideremos dois casos:
i) Se $y \notin C$, obtemos

$$(u, y - x) \leq +\infty.$$

ii) Se $y \in C$

$$(u, y - x) \leq 0.$$

Portanto,

$$\partial I_C(x) = \begin{cases} \{u \in H; (u, y - x) \leq 0,\ \forall y \in C\} & , \quad sex \in C \\ \emptyset & , \quad sex \notin C. \end{cases}$$

Do exemplo acima tem-se que ∂I_C é monotônico.

Note que $D(\partial I_C) \subset D(I_C) \subset C$. E se, $0 \in \partial I_C(x),\ \forall x \in C$, então $C \subset D(\partial I_C)$. Portanto, $D(\partial I_C) = C$.

Exemplo 1.3.4. *Seja (S, β, μ) um espaço de medida positiva. Dado um operador $A : H \to H$, podemos definir $\mathscr{A} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, onde $\mathscr{H} = L^2(S, H)$ por*

$$v \in \mathscr{A}u \ \text{ se, e somente se } v(t) \in Au(t) \ \text{ q.t.p. em } S.$$

Se A é monotônico, então $\mathscr{A}$ também o é.

De fato, seja A monotônico, então mostraremos que

$$(\mathscr{A}u - \mathscr{A}v, u - v) \geq 0, \forall u, v \in \mathscr{H},$$

ou mais precisamente,

$$(u' - v', u - v) \geq 0, \forall u' \in \mathscr{A}u \text{ e } \forall v' \in \mathscr{A}v$$

Então,

$$(u' - v', u - v) = \int_S (u'(t) - v'(t), u(t) - v(t)) d\mu(t) \geq 0.$$

Logo,

$$(u' - v', u - v) \geq 0, \forall u' \in \mathscr{A} \text{ e } \forall' \in \mathscr{A}.$$

Portanto, $\mathscr{A}$ é monotônico.

Lema 1.3.1. *Sejam $\phi : H \to (-infty, +infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente e própria em H e $\beta > 0$. Dado $u \in H$, a função convexa*

$$\psi(x) = \phi(x) + \beta/2 \left\| x - u \right\|^2$$

atinge seu mínimo em x_0 se, e somente se, $\beta(u - x_0) \in \partial\phi(x_0)$.

Demonstração. Suponhamos que $\beta(u - X_0) \in \partial\phi(x_0)$, então para todo $y \in H$ temos

$$\begin{aligned}
\phi(y) - \phi(x_0) &\geq (\beta(u - x_0), y - x_0) \\
&= \beta(u - x_0, u - u + y - x_0) \\
&= \beta(u - x_0, u - x_0 + y - u) \\
&= \beta \left\| x_0 - u \right\|^2 + \beta(u - x_0, y - u) \\
&\geq \beta \left\| x_0 - u \right\|^2 - \beta(-1/2 \left\| x_0 u \right\|^2 - 1/2 \left\| y - u \right\|^2) \\
&= \beta/2 \left\| x_0 - u \right\|^2 - \beta/2 \left\| u - y \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\phi(y) - \phi(x_0) \geq \beta/2 \left\| x_0 - u \right\|^2 - \beta/2 \left\| u - y \right\|^2 .$$

Logo,

$$\phi(y) + \frac{\beta}{2} \left\| u - y \right\|^2 \geq \phi(x_0) + \frac{\beta}{2} \left\| x_0 - u \right\|^2 , \; \forall y \in H.$$

Portanto, a função

$$\psi(x) = \phi(x_0) + \frac{\beta}{2} \left\| x - u \right\|^2$$

atinge seu mínimo em x_0.

Note que ψ é convexa por hipótese e $\varphi(x) = \left\| x \right\|^2$ é convexa. Agora, suponha que a função

$$\psi(x) = \phi(x) + \beta/2 \left\| x - u \right\|^2$$

atinge seu mínimo em x_0. Mostraremos que $\beta(u - x_0) \in \partial\phi(x_0)$.

Seja $\eta \in H$ e defina $y_t = (1 - t)x_0 + t\eta$, para $t \in [0, 1]$. Como ψ atinge seu mínimo em x_0, tem-se que

$$\phi(y_t) - \phi(x_0) \leq \beta/2 \left\| x_0 - u \right\|^2 - \beta/2 \left\| y_t - u \right\|^2$$

$$= \beta/2[(x_0 - u, x_0 - u) - (x_0 - u, y_t - u) + (x_0 - u, y_t - u) - (y_t - u, y_t - u)]$$

$$= \beta/2[(x_0 - u, x_0 - u - (y_t - u)) + (x_0 - u - (y_t - u), y_t - u)]$$

$$= \beta/2[(x_0 - u, x_0 - u - (y_t - u)) + (y_t - u, x_0 - u - (y_t - u))]$$

$$= \beta/2(x_0 - u + y_t - u, x_0 - y_t) = \beta/2(x_0 + y_t - 2u, x_o - y_t).$$

Logo,

$$\phi(y_t) - \phi(x_0) \leq \beta/2(x_0 + y_t - 2u, x_0 - y_t). \tag{1.51}$$

Pela convexidade de ϕ, tem-se que

$$\begin{aligned} \phi(y_t) = \phi((1-t)x_0 + t\eta) &\leq (1-t)\phi(x_0)t(\eta) \\ &= \phi(x_0) - t\phi(x_0) + t\phi(\eta). \end{aligned}$$

segue-se que

$$t(\phi(\eta) - \phi(x_0)) \geq \phi(y_t) - \phi(x_0)$$

então, por (1.51), temos

$$\begin{aligned} \phi(y) - \phi(x_0) &\geq \beta/2(x_0 + y_t - 2u, x_0 - y_t) \\ &= \beta/2(x_0 + (x_0 - tx_0 + t\eta) - 2u, x_0 - (x_0 - tx_0 + t\eta)) \\ &= \beta/2(2x_0 - 2u - (tx_0 - t\eta), tx_0 - t\eta) \\ &= \beta/2(2x_0 - 2u - (tx_0 - t\eta) - \beta/2 \left\|tx_0 - t\eta\right\|^2 \\ &\geq \beta/2(2x_0 - 2u, tx_0 - t\eta) = \beta(x_0 - u, tx_0 - t\eta) \end{aligned}$$

ou seja,

$$t(\phi(\eta) - \phi(x_0)) \geq \beta(x_0 - u, tx_0 - t\eta).$$

Fazendo $t \to 1$, obtemos

$$\phi(\eta) - \phi(x_0) \geq \beta(x_0 - u, x_0 - \eta)$$

daí,

$$\phi(\eta) - \phi(x_0) \geq \beta(\beta(u - x_0), \eta - x_0),\ \forall \eta \in H.$$

Portanto, $\beta(u - x_0) \in \partial\phi(x_0)$. □

Proposição 1.3.1. *O operador $\partial\phi$ é maximal monotônico.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.4 é suficiente mostrar que $Im(I + \partial\phi) = H$. Desta forma, devemos provar que

$$u \in x + \partial\phi(x)$$

tem solução $x \in H$, para cada $u \in H$. Para isto, utilizaremos o Lema 1.3.1, uma vez que para cada $\beta > 0$ a aplicação ψ convexa, s.c.i. e própria, atinge seu mínimo em $x_0 \in H$, (ver Teorema

1.0.8, ver Apêndice A). Do Lema 1.3.1 tem-se que $\beta(u - x_0) \in \partial\phi(x_0)$, isto é, existe $x_0 \in H$ tal que

$$u \in x_0 + \partial\phi(x_0),$$

ou seja,

$$u \in (I + \partial\phi(x_0)).$$

Logo, $Im(I + \partial\phi) = H$ e portanto, $\partial\phi$ é maximal monotônico. $\square$

Proposição 1.3.2. *Seja $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um operador maximal monotônico. Então, existe uma função $j : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ convexa, semicontínua inferiormente e própria tal que $\partial j = \beta$, ou seja, β é necessariamente uma subdiferencial.*

Demonstração. Ver [8], página 144, Proposição 4.3. $\square$

Proposição 1.3.3. *Seja $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um operador maximal monotônico, então o operador*

$$\begin{aligned} B : L^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ u &\mapsto B(u) \end{aligned}$$

onde $Bu = \{v \in L^2(\Omega) : v \in \beta(u)$ q.t.p. em $\Omega\}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, é maximal monotônico. Além disso, B é uma subdiferencial.

Demonstração. Ver [5], página 47, Proposição 2.16. $\square$

1.4 Sobrejetividade dos Operadores Maximais Monotônicos

Definição 1.4.1. *(Operador Localmente Limitado)*
Um operador localmente limitado $T : D(T) \subseteq H \to H$ se todo $x \in D(T)$ tem uma vizinhança $V \subset H$ tal que

$$T(V \cap D(T)) = \bigcup_{y \in V \cap D(T)} Ty$$

é limitado ou vazio.

Teorema 1.4.1. *Seja $T : H \to H$ um operador maximal monotônico. Então, T é localmente limitado em cada ponto $x \in int\ coD(T)$.*

Demonstração. Seja $x \in int\ coD(T)$ e $x_n \in B_\rho(x) \subset \overline{co}D(T)$. Suponha, por contradição, que existam $x_n \in B_\rho(x)$, $x_n \to x$ tais que para $u_n \in Tx_n$, $\|u_n\| \to +\infty$. Logo, pelo Lema 1.0.1, existe $z \in H$, $\|z\| \leq \rho$ tal que

$$\liminf(u_n, x_n - x - z) = -\infty.$$

Como $x + z \in coD(T)$, então podemos escrever a seguinte combinação conxeva

$$x + z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i, \text{ com } y_i \in D(T), \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Sendo T maximal monotônico por hipótese, tem-se que

$$(u_n - v_i, x_n - y_i) \geq 0, \text{ com } v_i \in Ty_i.$$

Então,

$$(u_n, x_n - y_i) - (v_i, x_n - y_i) \geq 0,$$

ou seja,

$$(u_n, x_n - y_i) \geq (v_i, x_n - y_i).$$

E multiplicando por λ_i e tomando o somatório de $i = 1$ até n, obtemos

$$(u_n, \sum_{i=1}^{n}(x_n\lambda_i - \lambda_i y_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v_i, x_n - y_i),$$

assim,

$$(u_n, (x_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v_i, x_n - y_i),$$

ou seja,

$$(u_n, x_n - x - z) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, x_n - y_i).$$

Tomando limite,

$$\liminf (u_n, x_n - x - z) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, x - y_i) > -\infty.$$

Contradição, portanto $\|u_n\|$ é limitado e assim segue o resultado. $\square$

Temos a seguinte caracterização de sobrejetividade de operador maximal monotônico.

Teorema 1.4.2. *Um operador maximal monotônico T é sobrejetivo se, e somente se, T^{-1} é localmente limitado.*

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que se T^{-1} é localmente limitado, então $Im(T) = H$. Para isto é suficiente mostrar que $Im(T)$ é aberto e fechado simultaneamente, pois se isso ocorre então $Im(T) \cup Im(T)^c = H$ é uma cisão para H. Sendo H conexo então $Im(T) = H$ ou $Im(T) = \emptyset$, uma vez que o segundo caso não ocorre concluímos que T é sobrejetivo. Então, mostraremos primeiro que $Im(T)$ é fechado. De fato, sejam $u_n \in Im(T)$, $u_n \in Tx_n$ tais que $u_n \to u$. Como T^{-1} localmente limitado, ou seja, existe um aberto V_n em H tal que $u \in V_n$,

$$\bigcup_{y \in V_n \cap D(T)} T^{-1}(y)$$

é limitado, uma vez que $u_n \to u$ em H, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(u_n) \subset V_n, \ \forall n \geq n_0.$$

Logo, $(x_n) \subset \cup T^{-1}(u_n)$, então $\|x_n\|$ é limitado. Passando a uma subsequência tem-se que $x_n \rightharpoonup x$. Temos assim,

$$(v - u_n, y - x_n) \geq 0, \ \forall [y, v] \in G(T).$$

Passando ao limite quando $n \to +\infty$ tem-se que

$$(v - u_n, y - x_n) \to (v - u, y - x) \geq 0, \ \forall [x, u] \in G(T).$$

Assim, $u \in Tx$.

Logo, $Im(T)$ é fechado.

$Im(T)$ é aberto. Com efeito, Seja $u_0 \in Im(T)$, $u_0 \in Tx_0$ e seja B_r a bola de raio r em torno de u_0 tal que T^{-1} é limitado. Tomando $\|h\| \leq r/4$, mostraremos que $u_0 + h \in Im(T)$. Seja x_ϵ a solução de

$$u_0 + h + \epsilon x_0 \in \epsilon x_\epsilon + Tx_\epsilon$$

ou seja,

$$u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon x_0 \in Tx_\epsilon.$$

Assim,

$$[x_\epsilon, u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon x_\epsilon] \in G(T).$$

Logo,

$$(u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon x_\epsilon - u_0, x_\epsilon - x_0) \geq 0,$$

o que nos dá

$$(h + \epsilon x_0 - \epsilon x_\epsilon, x_\epsilon - x_0) \geq 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\epsilon \|x_\epsilon - x_0\|^2 + (h, x_\epsilon - x_0) \\ &\leq -\epsilon \|x_\epsilon - x_0\|^2 + \|h\| . \|x_\epsilon - x_0\| . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\epsilon \|x\epsilon - x_0\| \geq \|h\| .$$

Então,

$$\epsilon \|x_\epsilon\| - \epsilon \|x_0\| \leq \|h\| .$$

Logo,

$$\epsilon \|x_\epsilon\| \leq \|h\| + \epsilon \|x_0\| .$$

E portanto, dado $\epsilon > 0$ for tal que $\epsilon \|x_0\| < r/4$, obtém-se que

$$u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon x_\epsilon \in B_r,$$

uma vez que

$$x_\epsilon \in T^{-1}(u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon x_\epsilon).$$

E assim, temos que $\|x_\epsilon\|$ é limitado, pois T^{-1} é localmente limitado. Indo para a subsequência, se necessário, $x_\epsilon \rightharpoonup \overline{x}$. Como,

$$u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon x_\epsilon \to u_0 + h$$

quando $\epsilon \to 0$, segue que $u_0 + h \in T\overline{x}$. De fato, observe que, passando ao limite temos

$$(u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon x_\epsilon - u_0, \overline{x} - x_0) \geq 0,\ \forall u_0 \in Tx_0, u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon \overline{x} \in T\overline{x}.$$

Daí,

$$u_0 + h + \epsilon x_0 - \epsilon \overline{x} \in T\overline{x}.$$

desde que

$$u_0 + h + \epsilon x_0 \in T\overline{x}.$$

Portanto, $Im(T)$ é aberto, então $Im(T) = H$. □

Exemplos de Operadores $T : D(T) \subseteq H \to H$ tais que T^{-1} é localmente limitado.

Exemplo 1.4.1. *Seja $T : H \to H$ um operador maximal monotônico. Se $D(T)$ é limitado, T^{-1} é localmente limitado.*

Demonstração. Suponha, por contradição que T^{-1} não seja limitado, então para algum $y \in D^{-1} = Im(T)$, onde V_y é um aberto contendo y tem-se que $T^{-1}(V_y \cap D(T))$ não é limitado. Desde que, para cada $c > 0$, $T^{-1}(V_y \cap D(T^{-1})) \subset D(T)$, resulta que não é limitado. Contradição. □

Exemplo 1.4.2. *Se T é coercivo, então T^{-1} é localmente limitado.*

Demonstração. Vimos no Teorema 4.7 que se T é coercivo, então segue-se que T é sobrejetivo. E do Teorema 1.4.2 acima segue-se portanto que T^{-1} é localmente limitado. □

1.5 Soma de Operadores Maximais Monotônicos

Em muitas aplicações utilizando a teoria monotônica, as equações a serem desenvolvidas são do tipo $Tx + Sx \ni f$. Desta forma será importante saber se $T + S$ é maximal monotônico. Com o objetivo de enunciar condições suficientes para que $T + S$ seja maximal monotônico, quando T e S o são, voltaremos as aproximações de Yosida de um operador maximal monotônico, com algumas propriedades. Em seguida os resultados da soma de operadores maximais monotônicos.

Definição 1.5.1. *(Seção Principal) Seja T um operador maximal monotônico, definimos o operador T° como sendo, o que a cada $x \in D(T)$ associa o elemento de norma mínima de Tx, isto é,*

$$T^\circ x = proj_{Tx} 0.$$

Lema 1.5.1. *Seja T um operador maximal monotônico. Então, Tx é convexo e fechado.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que Tx é fechado. Seja $(u_n) \subset Tx$ tal que $u_n \to u \in H$. Assim, tem-se que

$$(u_n - u, x - x_0) \geq 0, \ \forall n \text{ e } \forall u_0 \in Tx_0.$$

Daí,

$$(u - u_0, x - x_0) \geq 0, \ \forall u_0 \in Tx_0.$$

Logo, Tx é fechado.
Agora para mostrar que Tx é convexo, sejam $u_1, u_2 \in Tx$ e devemos mostrar que $tu_1 + (1 - t)u_2 \in Tx$. Para $u_0 \in Tx_0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
(tu_1 + (1-t)u_2 - x_0, x - x_0) &= (u_2 - u_0, x - x_0) + t(u_1 - u_2, x - x_0) \\
&= (u_2 - u_0, x - x_0) - t(u_1 - u_0, x - x_0) - t(u_2 - u_0, x - x_0) \\
&= (1-t)(u_2 - u_1, x - x_0) + t(u_1 - u_0, x - x_0) \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, Tx é convexo. $\square$

1.5.1 Propriedades das Aproximações de Yosida.

Lema 1.5.2. *T_λ é um operador monotônico e lipschitziano de constante $1/\lambda$;*

Demonstração. Vimos no Lema 1.1.3 que T_λ é monotônico, então, segue-se a demonstração de que T_λ é lipschitziano. Sendo

$$(T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geq 0,\ \forall x_1, x_2 \in H,$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\| \|x_1 - x_2\| &\geq (T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2, x_1 - x_2) \\
&= (T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2, \lambda T_\lambda x_1 - \lambda T_\lambda x_2 + J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \\
&= \lambda \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\|^2 + (T_\lambda x_1 - T_\lambda, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \\
&= \lambda \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\|^2 + (T(J_\lambda x_1) - T(J_\lambda x_2), J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \\
&\geq \lambda \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\|^2 .
\end{aligned}$$

Assim, $\|x_1 - x_2\| \geq \lambda \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\|$.
Logo, $\|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\| \leq 1/\lambda \|x_1 - x_2\|$, $\forall x_1, x_2 \in H, \lambda > 0.$ □

Lema 1.5.3. *$(T_\lambda)_\mu = T_{\lambda+\mu},\ \forall \lambda, \mu > 0$;*

Demonstração. Para mostrar a igualdade $(T_\lambda)_\mu = T_{\lambda+\mu}$, observemos que da definição da aproximação de Yosida que

$$(x, y) \in G(T_\lambda),\ \text{ou seja},\ (x - \lambda y, y) \in G(T),$$

pois uma vez que T_λ é univalente segue-se que

$$y = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda}$$

se, e somente se,

$$x - \lambda y = J_\lambda x, \lambda > 0,$$

equivalentemente,

$$x \in (I + \lambda T)(x - \lambda y),$$

ou ainda,

$$x - (x - \lambda y) \in \lambda T(x - \lambda y).$$

Logo, $y \in T(x - \lambda y)$.

Então, notemos que $(x, y) \in G(T_{\lambda+\mu})$, ou seja, $(x - (\lambda + \mu)y, y) \in G(T)$.

Por outro lado,

$$(x, y) \in G((T_\lambda)_\mu),$$

ou seja, $(x - \mu y, y) \in G(T_\lambda)$. Daí,

$$(x - (\lambda + \mu)y, y) \in G(T).$$

E portanto, $(T_\lambda)_\mu = T_{\lambda+\mu}$. □

Lema 1.5.4. *Se $x \in D(T)$, então $T_\lambda x \to T^\circ x$, quando $\lambda \to 0$ e $\|T_\lambda x\| \leq \|T^\circ x\|$;*

Demonstração. Sejam $(J_\lambda x, T_\lambda x) \in G(T)$ e $(x, T^\circ x) \in G(T)$, para todo $x \in D(T)$. Sendo T monotônico, tem-se que

$$(T_\lambda x - T^\circ x, J_\lambda x - x) \geq 0,$$

então,

$$(T_\lambda x - T^\circ x, \lambda T_\lambda x) \leq 0.$$

Assim, $(T_\lambda x, \lambda T_\lambda x) - (T^\circ x, \lambda T_\lambda x) \leq 0$, ou seja,

$$\|T_\lambda x\|^2 \leq (T^\circ x, T_\lambda x) \leq \|T^\circ x, T_\lambda x\| \, \|T_\lambda x\| \,.$$

E isso implica,

$$\|T_\lambda x\| \leq \|T^\circ x\| \,. \tag{1.52}$$

Temos então que $\|T_\lambda x\|$ é limitada em H, assim admite uma subsequência que converge fraco, ou seja, existe um $y \in H$ tal que

$$T_\lambda x \rightharpoonup y \text{ quando } \lambda \to 0. \tag{1.53}$$

Por outro lado, vimos que no Teorema 1.1.5 que, se $x \in D(T)$, então

$$J_\lambda x \to x \text{ quando } \lambda \to 0.$$

Assim,

$$(\eta - T_\lambda x, \zeta - J_\lambda x) \to (\eta - y, \zeta - x), \ \forall (\eta, \zeta) \in T.$$

Logo, $(x,y) \in G(T)$. Desse modo, de (1.52) resulta que

$$\|y\| \leq \liminf \|T_\lambda x\| \leq \|T^\circ x\|.$$

E da definição de seção principal concluímos que

$$\|y\| = \|T^\circ x\|.$$

Portanto, $T_\lambda x \to T^\circ x$ quando $\lambda \to 0$. □

Lema 1.5.5. *Se $x \notin D(T)$, então $\|T_\lambda x\| \to \infty$ quando $\lambda \to 0$;*

Demonstração. Suponha, por contradição que $\|T_\lambda x\| \leq c$ quando $\lambda \to 0$ e $x \notin D(T)$. Então, existe $y \in H$ tal que

$$T_\lambda x \rightharpoonup y, \text{quando } \lambda \to 0.$$

Seja $C = \overline{coD(T)}$. Pelo Teorema 1.1.5, temos

$$\lim_{\lambda} J_\lambda x = proj_C x, \ \forall x \in H,$$

segue-se que

$$(T_\lambda x - \eta, J_\lambda x - \zeta) \to (y - \eta, x - \zeta),$$

quando $\lambda \to 0$. Assim, da Proposição 1.1.2, temos $(proj_C x, y) \in T$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|x - proj_C x\| &= \min_{\zeta \in C} \|x - \zeta\| \\ &\leq \|x - j_\lambda x\| \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \lambda \|T_\lambda x\| = 0. \end{aligned}$$

Logo, $x \in D(T)$, o que contradiz o fato de $x \notin D(T)$.

Portanto, $x \notin D(T)$, $\|T_\lambda x\| \to \infty$, quando $\lambda \to 0$. □

Lema 1.5.6. *Se $T = \partial\phi$, onde ϕ é uma função convexa semicontínua inferiormente e própria, então $T_\lambda = \partial\phi_\lambda$, onde*

$$\phi_\lambda(x) = \min_{y \in H} \{\frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 + \phi(y)\}$$

é uma função convexa, diferenciável a Fréchet e definida para todo $x \in H$.

Demonstração. Pelo Lema 1.3.1, tem-se que ϕ_λ atinge seu mínimo em $J_\lambda x$, pois $T_\lambda x \in \partial(J_\lambda x)$ para todo $x \in H$.

Agora, mostraremos que ϕ é diferenciável e que $\partial\phi_\lambda = T_\lambda$. Para isto, consideremos $x, y \in H$, pela definição de subdiferencial, temos

$$\phi(J_\lambda x) - \phi(J_\lambda y) \geq (T_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x).$$

Então,

$$\phi(J_\lambda x) - \phi_\lambda(x) \geq -\frac{\lambda}{2}\|T_\lambda x\|^2 + (T_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x).$$

Assim,

$$\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) \geq \frac{\lambda}{2}\{\|T_\lambda y\|^2 - \|T_\lambda x\|^2\} + (T_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x).$$

Daí

$$\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) \geq \frac{\lambda}{2}\|T_\lambda y - T_\lambda x\|^2 + (T_\lambda x, y - x).$$

Logo,

$$\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - (T_\lambda x, y - x) \geq \frac{\lambda}{2}\|T_\lambda y - T_\lambda x\|^2.$$

Trocando x por y na desigualdade acima, temos

$$-\{\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) + (T_\lambda x, x - y)\} \geq \frac{\lambda}{2}\|T_\lambda y - T_\lambda x\|^2\}.$$

Segue-se que,

$$\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - (T_\lambda x, y - x) - (T_\lambda y - T_\lambda x, x - y) \leq -\frac{\lambda}{2}\|T_\lambda y - T_\lambda x\|^2.$$

E ainda,

$$\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - (T_\lambda x, y - x) \leq (T_\lambda y - T_\lambda x, x - y).$$

Daí,

$$\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - (T_\lambda x, y - x) \leq \|T_\lambda y - T_\lambda x\|\,\|x - y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y - x\|^2.$$

Assim,

$$|\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - (T_\lambda x, y - x)| \leq \frac{1}{\lambda}\|y - x\|^2.$$

Portanto, ϕ_λ é Fréchet diferenciável e $\partial_\lambda = T_\lambda$.

□

Lema 1.5.7. *Sejam T e S operadores maximais monotônicos e suponha que S seja lipschitziano. Então $T+S$ é maximal monotônico.*

Demonstração. Sendo S lipschitziano, podemos supor que, S é uma contração de constante $c<1$, pois se $c \geq 1$, definimos $\overline{S} = \delta S$, e segue-se que

$$\left|\overline{S}x - \overline{S}y\right| = \delta \left|Sx - Sy\right| \leq \delta c \left|x - y\right|$$

uma vez que S é maximal monotônico, segue-se que $\overline{S}$ é maximal monotônico.

Para provar o resultado, usaremos o Teorema 1.1.4, ou seja, é suficiente mostrar que o operador $I+T+S$ é sobrejetivo, isto é, para cada $y \in H$, existe $x \in H$ tal que

$$y \in x + Tx + Sx, \tag{1.54}$$

equivalentemente,

$$y - Sx \in x + Tx = (I+T)x. \tag{1.55}$$

Assim, podemos obter a seguinte expressão

$$(I+T)^{-1}(y - Sx) = x. \tag{1.56}$$

Sendo, $(I+T)^{-1}$ e S contrações, segue portanto que $(I+T)^{-1}(y-S)$ também é uma contração. Logo, pelo Teorema 1.0.2 (ver Apêndice A), existe um ponto fixo $x \in H$ satisfazendo (1.56) acima, consequentemente, (1.54) e (1.55), e com isso, segue o resultado. $\square$

Definição 1.5.2. *Dizemos que um operador $T : H \to \mathscr{P}(H)$ é fracamente fechado quando, dadas as sequências $(x_n) \subset D(T)$ e y_n com*

$$y_n \in Tx_n,\ x_n \rightharpoonup x \text{ e } y_n \rightharpoonup y$$

temos $y \in Tx$.

Teorema 1.5.1. ***(Brezis-Crandall-Pazy).*** *Sejam T e S operadores maximais monotônicos. Então, $T+S$ é maximal monotônico se, e somente se, para cada y, as soluções x_λ da equação*

$$y \in x_\lambda + Tx_\lambda + S_\lambda x_\lambda \tag{1.57}$$

são tais que $S_\lambda x_\lambda$ é limitado para λ suficientemente pequeno. Neste caso, $x_\lambda \to x$, onde x é a solução de $y \in x + Tx + Sx$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que, $T + S$ é maximal monotônico. Observe, para cada $y \in Im(I + T + S)$, existe $x \in H$ tal que x a solução de $y \in x + Tx + Sx$. Sejam

$$\zeta = y - x - \eta \in Tx \text{ e } \zeta_\lambda = y - x_\lambda - S_\lambda x_\lambda \in Tx_\lambda, \tag{1.58}$$

onde η é o elemento de norma mínima do convexo fechado $Sx \cap (y - x - Tx)$, o qual η existe pelo Teorema 1.0.8 (ver Apêndice A), e x_λ existe devido ao Teorema 1.1.4. Então, observemos que

$$(y - y, x_\lambda - x) = 0.$$

Assim, por (1.58) podemos escrever da seguinte forma

$$(\zeta_\lambda + x_\lambda + S_\lambda x_\lambda - (\zeta + x + \eta), x_\lambda - x) = 0.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$\|x_\lambda - x\|^2 + (\zeta_\lambda - \zeta, x_\lambda - x) + (S_\lambda x_\lambda - \eta, x_\lambda - x) = 0. \tag{1.59}$$

Sendo T maximal monotônico, tem-se que

$$(\zeta_\lambda - \zeta, x_\lambda - x) \geq 0.$$

E em (1.59) segue-se que

$$\begin{aligned} 0 \leq (\zeta_\lambda - \zeta, x_\lambda - x) &= -\|x_\lambda - x\|^2 - (S_\lambda x_\lambda - \eta, x_\lambda - x) \\ &= -\|x_\lambda - x\|^2 - (S_\lambda x_\lambda - \eta, x_\lambda - J_\lambda^S x_\lambda + J_\lambda^S x_\lambda - x) \\ &= -\|x_\lambda - x\|^2 - [(S_\lambda x_\lambda - \eta, x_\lambda - J_\lambda^S x_\lambda) + (S_\lambda x_\lambda - \eta, J_\lambda^S x_\lambda - x)]. \end{aligned}$$

Assim,

$$(S_\lambda x_\lambda - \eta, x_\lambda - J_\lambda^S x_\lambda) \leq -\|x_\lambda - x\|^2 \leq 0. \tag{1.60}$$

Pela definição de resolvente, segue-se que

$$(S_\lambda x_\lambda - \eta, \lambda S_\lambda x_\lambda) = \lambda(S_\lambda x_\lambda - \eta, S_\lambda x_\lambda) \leq 0.$$

Daí, obtém-se,

$$\lambda \|S_\lambda x_\lambda\|^2 - \lambda(\eta, S_\lambda x_\lambda) \leq 0,$$

ou seja,

$$\|S_\lambda x_\lambda\|^2 \leq (\eta, S_\lambda x_\lambda).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\|S_\lambda x_\lambda\|^2 \leq \|\eta\| . \|S_\lambda x_\lambda\| .$$

Logo,

$$\|S_\lambda x_\lambda\| \leq \|\eta\| . \tag{1.61}$$

Além disso, de (1.59)

$$\|x_\lambda - x\|^2 \leq (\eta - S_\lambda x_\lambda, \lambda S_\lambda x_\lambda).$$

E novamente pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\|x_\lambda - x\|^2 \leq \lambda \|\eta - S_\lambda x_\lambda\| \|S_\lambda x_\lambda\| ,$$

segue da desigualdade triangular que

$$\|x_\lambda - x\|^2 \leq \lambda \|S_\lambda x_\lambda\| (\|\eta\| + \|S_\lambda x_\lambda\|),$$

e por (1.59), obtemos

$$\|x_\lambda - x\|^2 \leq \lambda \|\eta\| (\|\eta\| + \|\eta\|) = 2\lambda \|\eta\|^2 .$$

Logo, $\|x_\lambda - x\| \leq \sqrt{2\lambda} \|\eta\|$. Portanto, $x_\lambda \to x$ quando λ é suficientemente pequeno.

Reciprocamente, suponhamos que $S_\lambda x_\lambda$ seja limitado para λ suficientemente pequeno. Para todo $\lambda, \mu > 0$, definimos

$$\zeta_\lambda = y - x_\lambda - S_\lambda x_\lambda \in T x_\lambda, \tag{1.62}$$

e

$$\zeta_\mu = y - x_\mu - S_\mu x_\mu \in T x_\mu.$$

Então, tem-se que

$$(\zeta_\lambda + x_\lambda + S_\lambda x_\lambda - (\zeta_\mu + x_\mu + S_\mu x_\mu), x_\lambda - x_\mu) = 0.$$

Desenvolvendo obtemos,

$$\|x_\lambda - x_\mu\|^2 + (\zeta_\lambda - \zeta_\mu, x_\lambda - x_\mu) + (S_\lambda x_\lambda - S_\mu x_\mu, x_\lambda - x_\mu) = 0.$$

Pela definição de aproximação de Yosida, tem-se que

$$x_\lambda - x_\mu = \lambda S_\lambda x_\lambda - \mu S_\mu x_\mu + J_\lambda x_\lambda - J_\mu x_\mu. \tag{1.63}$$

Sendo T é monotônico, tem-se que

$$0 \leq (\zeta_\lambda - \zeta_\mu, x_\lambda - x_\mu) = -\|x_\lambda - x_\mu\|^2 - (S_\lambda x_\lambda - S_\mu x_\mu, x_\lambda - x_\mu).$$

Da desigualdade acima e de (1.63), devemos ter

$$\begin{aligned} \|x_\lambda - x_\mu\|^2 &\leq -(S_\lambda x_\lambda - S_\mu x_\mu, \lambda S_\lambda x_\lambda - \mu S_\mu x_\mu + J_\lambda^S x_\lambda - J_\lambda^S x_\mu) \\ &= (S_\mu x_\mu - S_\lambda x_\lambda, J_\lambda^S x_\lambda - J_\mu^S x_\mu) - (S_\lambda x_\lambda - S_\mu x_\mu, J_\lambda^S x_\lambda - J_\mu^S x_\mu), \end{aligned}$$

onde J_λ^S, J_μ^S são os resolventes do operador S com seus respectivos índices. Uma vez que S é maximal monotônico, segue do Lema 1.1.2 que

$$(S\lambda x_\lambda - S_\mu x_\mu, J_\lambda^S x_\lambda - J_\mu^S x_\mu) = (S(J_\lambda^S x_\lambda) - S(J_\mu^S x_\mu), J_\lambda^S x_\lambda - J_\mu^S x_\mu) \geq 0,$$

donde segue da monotonicidade de S. Temos portanto,

$$\|x_\lambda - x_\mu\|^2 \leq (S_\mu x_\mu - S_\lambda x_\lambda, \lambda S_\lambda x_\lambda \mu S_\mu x_\mu).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se que

$$\|x_\lambda - x_\mu\|^2 \leq \|S_\mu x_\mu - S_\lambda x_\lambda\| . \|\lambda S_\lambda x_\lambda - \mu S_\mu x_\mu\|,$$

pela desigualdade triangular segue-se que

$$\|x_\lambda - x_\mu\|^2 \leq (\|S_\mu x_\mu\| + \|S_\lambda x_\lambda\|).(\|\lambda S_\lambda x_\lambda\| + \|\mu S_\mu x_\mu\|).$$

Sendo $S_\lambda x_\lambda$ limitado quando λ é suficientemente pequeno, temos que $\{x_\lambda\}$ é uma sequência de Cauchy. Dessa maneira, existe $x \in H$ tal que $x_\lambda \to x$ quando λ é suficientemente pequeno. Além disso, existem $\zeta_0, \eta_0 \in H$ tais que, a menos de subsequência

$$S_\lambda x_\lambda \rightharpoonup \eta_0 \text{ e } \zeta_\lambda \rightharpoonup \zeta_0,$$

onde a primeira convergência segue do fato de $S_\lambda x_\lambda$ ser limitado para λ suficientemente pequeno, e a segunda segue de (1.62) e de $x_\lambda \to x$. Como T e S são fracamente fechado, tem-se que

$$\zeta_0 \in Tx \text{ e } \eta_0 \in Sx.$$

Assim,

$$y = x + \zeta_0 + \eta_0.$$

Portanto, $y \in Im(I + T + S)$. $\square$

Corolário 1.5.1. ***(Rockafellar).*** *Sejam $T + S$ maximais monotônicos, e suponha que $[intD(T)] \cap D(S) \neq \emptyset$. Então, $T + S$ é maximal monotônico.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $0 \in intD(T) \cap D(S)$. Pois do contrário, podemos tomar os seguintes operadores

$$\overline{T} : D(\overline{T}) = D(T) - x_0 \to H$$

dado por

$$\overline{T}(z) = T(z + x_0) - y_0$$

e

$$\overline{S} : D(\overline{S}) = D(S) - x_0 \to H$$

dado por

$$\overline{S}(v) = S(v + x_0) - y_0.$$

uma vez que $\overline{T}$ e $\overline{S}$, também são maximais monotônicos como vimos na Seção 1.1. Então, dado $y \in H$, existe pelo Lema 1.5.7 um único x_λ tal que $y \in x_\lambda + Tx_\lambda + S_\lambda x_\lambda$. Seja $y_\lambda \in Tx_\lambda$ tal que

$$y = x_\lambda + y_\lambda + S_\lambda x_\lambda. \tag{1.64}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que

$$\|y\| \,.\, \|x_\lambda\| \geq (y, x_\lambda)$$

e por (1.64) temos

$$\|y\| \,.\, \|x_\lambda\| \geq (x_\lambda + y_\lambda + S_\lambda x_\lambda, x_\lambda).$$

Desenvolvendo o lado direito da desigualdade obtemos

$$\|y\| \,.\, \|x_\lambda\| \geq \|x_\lambda\|^2 + (y_\lambda, x_\lambda) + (S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \tag{1.65}$$

Sendo T maximal monotônico, $0 \in D(T)$ e $y_\lambda \in Tx_\lambda$, tem-se que

$$(y_\lambda - z, x_\lambda - 0) \geq 0, \ \forall z \in T0,$$

ou seja,

$$(y_\lambda, x_\lambda) \geq (z, x_\lambda), \ \forall z \in T0. \tag{1.66}$$

Do mesmo modo, sendo S_λ monotônico, segue-se que

$$(S_\lambda x_\lambda, x_\lambda - 0) \geq 0, 0 \in S_\lambda 0,$$

e assim,

$$(y_\lambda, x_\lambda) \geq (z, x_\lambda), 0 \in S_\lambda 0. \tag{1.67}$$

De (1.66) e (1.67), segue-se em (1.65) que

$$\|y\| . \|x_\lambda\| \geq \|x_\lambda\|^2 + (z, x_\lambda) + (S_{\lambda 0}, x_\lambda).$$

Uma vez que $0 \in D(S)$, temos pelo Lema 1.5.4 que $\|S_\lambda 0\| \to \|S^\circ 0\|$ quando $\lambda \to 0$. Assim,

$$\|S_\lambda 0\| \to 0.$$

Então usando a desigualdade de Cauchy- Schwarz e dos dois últimos termos de (1.65), obtemos

$$\|y\| . \|x_\lambda\| \geq \|x_\lambda\|^2 - \|y\| . \|x_\lambda\| - \|S_{\lambda 0}\| \|x_\lambda\|$$

ou seja,

$$\|y\| . \|x_\lambda\| \geq \|x_\lambda\|^2 - \|y\| .$$

Logo,

$$\|x_\lambda\| \leq 2. \|y\| = c.$$

Portanto, $\|x_\lambda\|$ é limitada quando λ é suficientemente pequeno. Segue ainda de (1.65) que (y_λ, x_λ) é limitada quando λ é suficientemente pequeno.

Agora, seja $\epsilon > 0$ tal que a bola $B_\epsilon(0)$ é levada por T em um conjunto limitado; tal ϵ existe pelo Teorema 1.4.1 e pelo fato de $0 \in int\ D(T)$. Seja $W_\lambda = \epsilon y_\lambda / \|y_\lambda\|$, então $z_\lambda \in T w_\lambda$ é limitado. Por monotonicidade, temos

$$(y_\lambda - z_\lambda, x_\lambda - w_\lambda) \geq 0,\ \forall y_\lambda \in T x_\lambda$$

daí,

$$(y_\lambda, w_\lambda) \leq (y_\lambda, x_\lambda) - (z_\lambda, x_\lambda) - (z_\lambda, w_\lambda)$$

ou seja,

$$\epsilon \|y_\lambda\| \leq (y_\lambda, x_\lambda) - (z_\lambda, x_\lambda) - (z_\lambda, w_\lambda). \tag{1.68}$$

Como cada um dos termos do lado direito é limitado, concluímos que y_λ é limitado. Logo, de (1.64) segue-se que $S_\lambda x_\lambda$ é limitado e portanto do Teorema 1.5.1, segue o resultado. $\square$

Corolário 1.5.2. *Sejam T e S operadores maximais monotônicos tais que*

$$(u, S_\lambda x) \geq 0,\ \forall x \in D(T),\ \forall u \in Tx \text{ e } \forall \lambda > 0. \tag{1.69}$$

Então, $T + S$ é maximal monotônico.

Demonstração. Pelo Teorema 1.5.1, basta provar que as soluções x_λ da equação

$$f \in x_\lambda + Tx_\lambda + S_\lambda x_\lambda, \tag{1.70}$$

para todo $f \in H$, são tais que $\|S_\lambda x_\lambda\|$ é limitado, quando λ é suficientemente pequeno. Usando (1.70) em (1.69), obtemos

$$(f - x_\lambda - S_\lambda, S_\lambda x_\lambda) \geq 0. \tag{1.71}$$

Desenvolvendo obtemos a seguinte estimativa

$$(f, S_\lambda x_\lambda) \geq (x_\lambda, S_\lambda x_\lambda) + \|S_\lambda x_\lambda\|^2. \tag{1.72}$$

Agora, para $y_0 \in D(T)$ temos pela monotonicidade de T que

$$(z - w, x_\lambda - y_0) \geq 0,\ \forall\, z \in Tx_\lambda \text{ e } \forall w \in Ty_0,$$

e usando (1.70), segue-se que

$$(f - x_\lambda - S_\lambda x_\lambda - w, x_\lambda - y_0) \geq 0,\ \forall w \in Ty_0.$$

Desenvolvendo temos

$$(f, x_\lambda) - (f, y_0) - \|x_\lambda\|^2 + (x_\lambda, y_0) - (S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) + (S_\lambda x_\lambda, y_0) - (w, x_\lambda) + (w, y_\lambda) \geq 0.$$

Organizando, obtemos

$$\|x_\lambda\|^2 + (S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \leq (w - f, y_0) + (f + y_0 - w, x_\lambda) + (S_\lambda x_\lambda, y_0).$$

Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se que

$$\|x_\lambda\|^2 + (S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \leq c + c\,\|x_\lambda\| + c\,\|S_\lambda x_\lambda\|, \tag{1.73}$$

onde c são diferentes constantes independentes de λ.

Agora, para $y_1 \in D(S)$, segue da monotonicidade de S_λ que

$$(S_\lambda x_\lambda - S_\lambda y_1, x_\lambda - y_1) \geq 0.$$

O que implica que

$$(S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) - (S_\lambda x_\lambda, y_1) - (S_\lambda y_1, x_\lambda) + (S_\lambda y_1, y_1) \geq 0.$$

Uma vez que $y_1 \in D(S)$, segue do Lema 1.5.4 que

$$\|S_\lambda y_1\| \leq \|S^\circ y_1\|,$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$(S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \geq -c - \|x_\lambda\| - c\,\|S_\lambda x_\lambda\|. \tag{1.74}$$

Assim, de (1.73), segue-se que

$$\|x_\lambda\|^2 \leq c + c\,\|x_\lambda\| + c\,\|S_\lambda x_\lambda\|. \tag{1.75}$$

E de (1.72), tem-se que

$$\|S_\lambda x_\lambda\|^2 \leq c + c\,\|x_\lambda\| + c\,\|S_\lambda x_\lambda\|. \tag{1.76}$$

Por (1.75) e (1.76) concluímos que $\|S_\lambda x_\lambda\|$ é limitado quando λ é suficientemente pequeno. Portanto, pelo teorema supracitado, segue o resultado. □

Corolário 1.5.3. *Seja T maximal monotônico e ϕ uma função convexa, semicontínua inferiormente e própria. Suponha que*

$$\phi((I + \lambda T)^{-1})) \leq \phi(x), \forall x \in H, \forall > 0. \tag{1.77}$$

Então, $T + \partial\phi$ é maximal monotônico.

Demonstração. Para provar o resultado, basta mostrar que (1.77) implica em (1.69) do corolário acima. Então, segue da definição de subdiferencial que

$$\phi((I + \lambda T)^{-1}) - \phi(x) \geq (u, (I + \lambda T)^{-1}x - x), \tag{1.78}$$

para qualquer $u \in \partial\phi(x)$. E de (1.77) e (1.78) otém-se

$$(u, (I + \lambda T)^{-1}x - x) \leq 0.$$

Logo,

$$(u, -\lambda T_\lambda x) \leq 0.$$

Portanto,

$$(u, T_\lambda x) \geq 0,\ \forall x \in H,\ \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall u \in \partial\phi(x).$$

□

1.6 Os resultados de Brezis-Haraux

Para resolver equações do tipo

$$f \in Tu + Su,$$

onde T e S são operadores maximais monotônicos, devemos conhecer o conjunto $Im(T + S)$. No Entretanto, sabemos determinar $Im(T)+Im(S)$, com T e S maximais monotônicos, que em geral, é maior do que $Im(T + S)$. Brezis e Haraux [6] observaram mediante algumas hipóteses sobre T e S é quase igual a $Im(T + S)$ em símbolos

$$Im(T + S) \simeq Im(T) + Im(S)$$

o que quer dizer que

$$\overline{Im(T + S)} = \overline{Im(T) + Im(S)}$$

e

$$int\ (Im(T + S)) = int\ (Im(T) + Im(S)).$$

1.6.1 Propriedade $(^*)$

Um operador monotônico T em um espaço de Hilbert real satisfaz a propriedade $(^*)$, se

$$\forall v \in coIm(T) \text{ e } \forall y \in coD(T) \text{ implica } \sup_{[x,u]\in G(T)} (u - v, y - x) < \infty.$$

Lema 1.6.1. *O operador T satisfaz $(^*)$ se, e somente se, T^{-1} também a satisfaz.*

Demonstração. Suponha que T satisfaz $(^*)$, então para todo $v \in co\ Im(T)$ e para todo $y \in coD(T)$ tem-se que

$$\sup_{[x,u]\in G(T)} (u - v, y - x) < +\infty.$$

Daí, segue-se que

$$\sup_{[u,x]\in G(T^{-1})} (y - x, u - v) < +\infty.$$

Logo,

$$\sup_{[u,x]\in G(T^{-1})} (x - y, v - u) < +\infty.$$

Portanto, T^{-1} satisfaz $(^*)$. □

Proposição 1.6.1. *Seja T um operador monotônico. Então:*

(i) *T é coercivo se, e somente se, T satisfaz $(^*)$*

(ii) *T é maximal monotônico se, e somente se, J_λ e T_λ satisfazem $(^*)$.*

(iii) *$D(T)$ ou $Im(T)$ limitado se, e somente se, T satisfaz $(^*)$.*

(iv) *$T = \partial\phi$ se, e somente se, T satisfaz $(^*)$.*

Demonstração. (i) Suponhamos que T seja monotônico, então para todo $v \in co\, Im(T)$ e para todo $y \in D(T)$, tem-se que

$$(u - v, x - y) \geq 0, u \in Tx.$$

Assim,

$$(u, x) - (u, y) - (v, x) + (v, y) \geq 0,$$

ou seja,

$$(u, x) \geq (u, y) + (v, x) - (v, y).$$

Para algum $w \in T^*y$, segue-se que

$$(u, x) \geq (x, w) + (v, x) - (v, y).$$

Então,

$$(u, x) \geq (x, w + v) - (v, y). \tag{1.79}$$

Como, $(x, w + v) \leq \|x\| \, \|w + v\|$, se mostramos que

$$(u, x) \geq \|x\| \, \|w + v\| - (v, y). \tag{1.80}$$

teremos provado (1.79). Uma vez que (1.80) equivale a

$$\frac{(u, x)}{\|x\|} \geq \|w + v\| - \frac{(v, y)}{\|x\|}.$$

Tomemos $R > 0$ tal que, se $\|x\| > R$ tenhamos

$$\frac{(v, y)}{\|x\|} < c,$$

e

$$\frac{(u, x)}{\|x\|} > \|w + v\| + c.$$

Logo, fazendo $R = \|w + v\| + c$, segue-se que (1.79) ocorre, e assim satisfazendo $(^*)$. Uma vez que

$$(u, x - y) \geq (v, x - y), \; \forall \, \|x\| > R.$$

Reciprocamente, se $\|x\| \leq R$, $u \in Tx$, $v \in co\, Im(T)$ e $y \in co\, D(T)$, segue-se

$$(u - v, y - x) \leq (w - v, y - x), w \in Ty.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade triangular, temos

$$(u - v, y - x) \leq (\|w\| + \|v\|)(\|w\| + R), \; \forall w \in Ty.$$

Como $\|x\| \leq r$, segue então que

$$\sup_{u \in Tx} (u - v, y - x) \leq +\infty.$$

Portanto, T satisfaz $(^*)$. □

Demonstração. (ii) J_λ é coercivo então, por (i) J_λ satisfaz $(^*)$. Agora, $T_\lambda = (T^{-1} + \lambda I)^{-1}$ e uma vez que $T^{-1} + \lambda T$ é coercivo tem-se que T_λ satisfaz $(^*)$. □

Demonstração. (iii) Segue diretamente da definição de coercividade, pois se $D(T)$ é limitado, então T é coercivo. Assim por (i), segue que T satisfaz $(^*)$.
Por outro lado, $Im(T) = D(T^{-1})$ é limitado, então pelo Lema 1.6.1 T^{-1} é coercivo, com isso temos que T satisfaz $(^*)$. □

Demonstração. (iv) Omitiremos a demonstração para evitar introduzir conceitos adicionais. cf. Brezis-Haraux [6]. □

Lema 1.6.2. *Sejam T um operador maximal monotônico em H e $F \subset H$ verificando a propriedade:*

$$\forall v \in F, \exists a \in H; \; \sup_{[x,u] \in C} (u - v, a - x) < \infty. \tag{1.81}$$

Então, $co\, F \subset \overline{Im(T)}$ e $int(co\, F) \subset Im(T)$.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que (1.81) se verifica para todo $v \in co\, F$. Com efeito, seja $v \in co\, F$, então

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \; v_i \in F, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \; \lambda_i \geq 0.$$

Por (1.81), existem $a_i \in H$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$tais que

$$(u - v_i, a_i - x) \leq \alpha_i, \ \forall u \in Tx.$$

Desenvolvendo, devemos ter

$$(u, a_i) - (u, x) - (v_i, a_i) + (v_i, x) \leq \alpha_i.$$

Multiplicando por λ_i e tomando o somatório em i de 1 até k, segue-se que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(u, a_i) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(u, x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(v_i, a_i) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(v_i, x) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i.$$

Pondo $a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ e $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ e sendo $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, obtemos

$$(u, a) - (u, x) - (v, a) + (v, x) \leq \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(u, a - x) + (v, x - a) \leq \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$(u - v, a - x) \leq \alpha, \ \forall v \in co\, F \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Então, basta mostrarmos que

$$F \subset \overline{Im(T)} \text{ e } int\, F \subset Im(T).$$

Pois, (1.81) é satisfeita para todo $v \in co\, F$ e $F \subset co\, F$. Primeiramente, provaremos a seguinte inclusão,

$$F \subset \overline{Im(T)}.$$

Suponhamos que (1.81) ocorra, então sejam $v \in F$ e x_ϵ as soluções da equação

$$\epsilon x_\epsilon + T x_\epsilon \ni v, \ \epsilon > 0, \tag{1.82}$$

ou seja,

$$v - \epsilon x_\epsilon \in T x_\epsilon, \ \epsilon > 0. \tag{1.83}$$

Então, é suficiente garantir que

$$\epsilon x_\epsilon \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0. \tag{1.84}$$

Pois, tomando em (1.81), $x = x_\epsilon$ e $u = v - \epsilon x_\epsilon$ teremos

$$v - \epsilon x_\epsilon \to v \in \overline{Im(T)}.$$

Assim, note que

$$(v - \epsilon x_\epsilon - v, a - x_\epsilon) \leq \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(-\epsilon x_\epsilon, a - x_\epsilon) \leq \alpha.$$

Então,

$$(\epsilon x_\epsilon, x_\epsilon - a) \leq \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \epsilon \|x_\epsilon\|^2 &\leq \alpha + \epsilon(x_\epsilon, a) \\ &\leq \alpha + \epsilon \|x_\epsilon\| \|a\|, \end{aligned}$$

donde segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Logo,

$$\sqrt{\epsilon} \|x_\epsilon\| \leq \alpha + (\epsilon)^2 (\|x_\epsilon\|)^2 (\|a\|)^2.$$

Assim, $\epsilon \|x_\epsilon\|$ é limitado para ϵ suficientemente pequeno, o que nos garante (1.84). Portanto, temos a inclusão $F \subset \overline{Im(T)}$.

Mostraremos agora a que $int(F) \subset Im(T)$.

Sejam $v \in int(F)$ e $B_r(v) \subset F$. Então, dado $w \in B_r(v)$, existe $a_w \in H$ e $\alpha_w \in \mathbb{R}$ tais que

$$(u - v - w, a_w - x) \leq \alpha_w. \tag{1.85}$$

Seja x_ϵ soluções de (1.82), tomando $x = x_\epsilon$ e $u = v - \epsilon x_\epsilon, \ \epsilon > 0$, em (1.85) segue-se que

$$(v - \epsilon x_\epsilon - v - w, a_w - x_\epsilon) \leq \alpha_w.$$

Assim,

$$-(\epsilon x_\epsilon, a_w) + \epsilon \|x_\epsilon\|^2 - (w, a_w) + (w, x_\epsilon) \leq \alpha_w,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (w, x_\epsilon) &\leq \alpha_w + \epsilon(x_\epsilon, a_w) + (w, a_w) \\ &\leq \alpha_w + \epsilon \|x_\epsilon\| \|a_w\| + \|w\| \|a_w\|. \end{aligned}$$

Então, (w, x_ϵ) é limitado para ϵ suficientemente pequeno. Logo, pelo Teorema 1.0.9 (ver Apêndice A)

$$|(w, x_\epsilon)| \leq +\infty,$$

daí, $\|x_\epsilon\| \leq +\infty$. Passando a uma subsequência

$$x_\epsilon \rightharpoonup x \text{ e } v - \epsilon x_\epsilon \rightharpoonup v \text{ quando } \to 0,$$

como $v - \epsilon x_\epsilon \in Tx_\epsilon$, concluímos que $v \in Im(T)$. □

Teorema 1.6.1. *Sejam T e S operadores monotônicos tais que $T + S$ é maximal monotônico. Suponha que T e S satisfazem $(^*)$. Então,*

$$Im(T + S) \simeq Im(T) + Im(S).$$

Demonstração. A inclusão $Im(T + S) \subset Im(T) + Im(S)$ é natural. Logo, basta mostrar que $Im(T) + Im(S) \subset Im(T + S)$ e $int(Im(T) + Im(S)) \subset Im(T + S)$. Então pelo Lema anterior com $Im(T) + Im(S) = F$ e $T + S = R$. Para tal, verifiquemos a condição (1.69). Sejam $v \in Im(T)+Im(S)$ (e logo $v = v_1+v_2, v_1 \in Im(T)$ e $v_2 \in Im(S)$) e $a \in D(T)\cap D(S)$ fixados. Então, como T e S satisfazem $(^*)$ tem-se

$$\sup_{[x,u_1]\in T}(u_1 - v_1, a - x) < \infty \text{ e } \sup_{[x,u_2]\in S}(u_2 - v_2, a - x) < \infty.$$

E daí, se obtém

$$\sup_{[x,u]\in C}(u - v, a - x) < \infty,$$

o que conclui o teorema. □

Corolário 1.6.1. *Sejam ϕ e ψ funções convexas, semicontínuas inferiormente e próprias em H. Suponha que $\partial\phi + \partial\psi$ é maximal monotônico. Então,*

$$Im(\partial\phi + \partial\psi) \simeq Im(\partial\phi) + Im(\partial\psi).$$

Um resultado análogo ao teorema anterior e de grande importância é o seguinte:

Teorema 1.6.2. *Sejam T e S operadores maximais monotônicos tais que*

$$(u, S_\lambda x) \geq 0,\ \forall\, x \in D(T),\ \forall u \in Tx. \tag{1.86}$$

Então,

$$Im(T + S) \simeq Im(T) + Im(S).$$

Demonstração. Uma vez que (1.86) ocorre, segue do Corolário 1.5.2 que $T + S$ é maximal monotônico. E do Lema 1.5.7, segue-se que para $v \in H$ e $0 < \epsilon < 1$ fixados, as equações

$$v \in \epsilon x_\lambda + Tx_\lambda + S_\lambda x_\lambda \tag{1.87}$$

tem uma única solução x_λ. Assim, para $v \in H$, tomando $0 < \epsilon < 1$ de modo que

$$v \geq \epsilon x_\lambda + u + S_\lambda x_\lambda,\ u \in Tx_\lambda. \tag{1.88}$$

Elevando ao quadrado (1.88), obtemos

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &\geq \epsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + 2\epsilon(x_\lambda, u + S_\lambda x_\lambda) + \|u + S_\lambda x_\lambda\|^2 \\ &= \epsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + 2\epsilon(x_\lambda, u + S_\lambda x_\lambda) + \|u\|^2 + 2(u, S_\lambda x_\lambda) + \|S_\lambda x_\lambda\|^2. \end{aligned}$$

De (1.86), segue-se que

$$\|v\|^2 \geq \epsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + \|u\|^2 + \|S_\lambda x_\lambda\|^2 + 2\epsilon(x_\lambda, u + S_\lambda x_\lambda). \tag{1.89}$$

Para estimar o último termo de (1.89), tome $x_0 \in D(T) \cap D(S)$ fixo, segue da monotonicidade de $T + S_\lambda$ que

$$(u + S_\lambda x_\lambda - Tx_0 - S_\lambda x_0, x_\lambda - x_0) \geq 0,\ u \in Tx_\lambda. \tag{1.90}$$

Desenvolvendo (1.90), devemos ter

$$0 \leq (u + S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) - (u + S_\lambda x_\lambda, x_0) - (Tx_0 + S_\lambda x_0, x_\lambda) + (Tx_0 + S_\lambda x_0, x_0),$$

ou seja,

$$-(u + S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \leq (Tx_0 + S_\lambda x_0, x_0) - (u + S_\lambda x_\lambda, x_0) - (Tx_0 + S_\lambda x_0, x_\lambda).$$

Por Cauchy-Schwarz, segue-se que

$$-(u + S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \leq c + \|u + S_\lambda x_\lambda\| \|x_0\| + \|Tx_0 + S_\lambda x_0\| \|x_\lambda\|.$$

Da desigualdade triangular, obtemos

$$-(u + S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \leq c + c\|x_\lambda\| + c(\|u\| + \|S_\lambda x_\lambda\|),$$

ou seja,

$$-(u + S_\lambda x_\lambda, x_\lambda) \leq c(1 + \|x_\lambda\| + \|u\| + \|S_\lambda x_\lambda\|), \ u \in Tx_\lambda. \tag{1.91}$$

Assim, de (1.89) e (1.91), obtemos

$$\|v\|^2 \geq \epsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + \|u\|^2 + \|S_\lambda x_\lambda\|^2 - 2c\epsilon(\|x_\lambda\| + \|u\| + \|S_\lambda x_\lambda\| + 1).$$

Então, notemos que

$$\epsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + \|u\|^2 + \|S_\lambda x_\lambda\|^2 \leq 2c\epsilon(\|x_\lambda\| + \|u\| + \|S_\lambda x_\lambda\| + 1) + \|v\|^2,$$

isto é,

$$\epsilon^2 \|x_\lambda\|^2 + \|u\|^2 + \|S_\lambda x_\lambda\|^2 \leq c(v), \ u \in Tx_\lambda,$$

para λ suficientemente pequeno. Neste caso, pelo Teorema 1.5.1, para cada $0 < \epsilon < 1$, $x_\lambda \to x_\epsilon$ que é a solução de

$$v \in \epsilon x_\epsilon + Tx_\epsilon + Sx_\epsilon. \tag{1.92}$$

Assim, para algum $u_\epsilon \in Tx_\epsilon$ e $w_\epsilon \in Sx_\epsilon$, temos

$$v = \epsilon x_\epsilon + u_\epsilon + w_\epsilon. \tag{1.93}$$

Logo,

$$\|u_\epsilon\| \leq c(v) \text{ e } \|w_\epsilon\| \leq c(v). \tag{1.94}$$

Seja agora $v \in Im(T) + Im(S)$ e mostraremos que $v \in \overline{Im(T + S)}$. Seja $v \in Im(T) + Im(S)$ com $v \in Tx + Sy$, pela monotonicidade de T e S, temos

$$(Tx_\epsilon - Tx, x_\epsilon - x) \geq 0 \text{ e } (Sx_\epsilon - Sy, x_\epsilon - y) \geq 0.$$

Donde segue-se que

$$(Tx_\epsilon - Tx, x_\epsilon) - (Tx_\epsilon - Tx, x) \geq 0, \tag{1.95}$$

e

$$(Sx_\epsilon - Sy, x_\epsilon) - (Sx_\epsilon - Sy, y) \geq 0. \tag{1.96}$$

Somando (1.95) e (1.96), devemos ter

$$(Tx_\epsilon + Sx_\epsilon - (Tx + Sy), x_\epsilon) - (Tx_\epsilon - Tx, x) - (Sx_\epsilon - Sy, y) \geq 0.$$

De (1.93), temos

$$(v - \epsilon x_\epsilon - v, x_\epsilon) - (Tx_\epsilon - Tx, x) - (Sx_\epsilon - Sy, y) \leq 0,$$

ou seja,

$$(-\epsilon x_\epsilon, x_\epsilon) - (Tx_\epsilon - Tx, x) - (Sx_\epsilon - Sy, y) \geq 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\epsilon \left\| x_\epsilon \right\|^2 &\leq (Tx - Tx_\epsilon, x) + (Sy - Sx_\epsilon, y) \\
&\leq \left\| Tx - Tx_\epsilon \right\| \left\| x \right\| + \left\| Sy - Sx_\epsilon \right\| \left\| y \right\| \\
&\leq (\left\| Tx \right\| + \left\| Tx_\epsilon \right\|) \left\| x \right\| + (\left\| Sy \right\| + \left\| Sx_\epsilon \right\|) \left\| y \right\|,
\end{aligned}$$

o que implica que $\epsilon \left\| x_\epsilon \right\|^2 \leq c$.

Desse modo, segue de (1.94) que passando a uma subsequência em (1.93) quando $\epsilon \to 0$, temos $v \in \overline{Im(T+S)}$.

Seja agora $v \in int(Im(T) + Im(S))$ e mostraremos que $v \in Im(T+S)$. Seja $B_r(v) \subset Im(T) + Im(S)$. Tomemos $\|h\| \leq r$ de modo que

$$v + h \in Tx_h + Sy. \tag{1.97}$$

Usando a monotonicidade de T e S, temos

$$(Tx_\epsilon - Tx_h, x_\epsilon - x_h) \geq 0 \text{ e } (Sx_\epsilon - Sx_h, x\epsilon - x_h) \geq 0.$$

Assim,

$$(Tx_\epsilon - Tx, x_\epsilon) - (Tx\epsilon - Tx_h, x_h) \geq 0 \tag{1.98}$$

e

$$(Sx_\epsilon - Sx_h, x_\epsilon) - (Sx_\epsilon - Sx_h, x_h) \geq 0. \tag{1.99}$$

Somando (1.98) e (1.99), devemos ter

$$(Tx_\epsilon + Sx_\epsilon - (Tx_h + Sx_h)) - (Tx_\epsilon - Tx_h, x_\epsilon - x_h) - (Sx_\epsilon - Sx_h, x_\epsilon - x_h) \geq 0.$$

De (1.92) e (1.97), temos

$$0 \leq (v - x_\epsilon - v - h, x_\epsilon) - (Tx_\epsilon - Tx_\epsilon, x_\epsilon - x_h) - (Sx_\epsilon - Sx_h, x_\epsilon - x_h).$$

Daí, segue-se que

$$(h, x_\epsilon) \leq \|x_\epsilon\|^2 + (Tx_h - Tx_\epsilon, x_\epsilon - x_h) + (Sx_h - Sx_\epsilon, x_\epsilon - x_h),$$

o que significa que (h, x_ϵ) é limitado por uma constante que depende de h. Assim, pelo Teorema 1.0.9 (ver Apêndice A), temos $\|x_\epsilon\|$ é limitado quando ϵ é suficientemente pequeno, e de (1.92) concluímos que $v \in Im(T + S)$.

Portanto,

$$Im(T + S) \simeq Im(T) + Im(S).$$

□

Corolário 1.6.2. *Sejam T maximal monotônico e ϕ função convexa semicontínua inferiormente e própria tais que*

$$\phi((I + \lambda T)^{-1}x) \leq \phi(x), \ \forall x \in H, \lambda > 0. \tag{1.100}$$

Então,

$$Im(T + \partial\phi) \simeq Im(T) + Im(\partial\phi).$$

Demonstração. Segue diretamente os passos da demonstração do Corolário 1.5.3 e do Teorema 1.6.2 segue o resultado. □

Capítulo 2

Aplicações da Teoria Maximal Monotônica

Esta seção destina-se a aplicação da Teoria maximal monotônica a problemas elípticos não lineares.

2.1 Um problema não linear com a condição de Neumann

Nesta seção, estamos interessados em estudar o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) & \ni & f & \text{em} & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{PN}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de fronteira $\partial\Omega$ suave, η é o vetor normal unitário exterior a Ω, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um operador multivalente maximal monotônico e $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada.

Definição 2.1.1. *Uma solução forte para o problema (PN) é uma função $u \in W^{2,2}(\Omega)$ tal que*

$$-\Delta u + \beta(u) \ni f, \ \textit{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \ \textit{q.t.p. sobre } \partial\Omega.$$

O lema a seguir é uma condição necessária para a existência de solução do problema (PN).

Lema 2.1.1. *Se $u \in W^{2,2}(\Omega)$ é solução forte do problema (PN), então*

$$\int_\Omega vdx = \int_\Omega fdx \ \in \overline{Im(\beta)},\ \forall\, v \in \beta(u). \tag{2.1}$$

Demonstração. Suponha que $u \in W^{2,2}(\Omega)$ seja solução do problema (PN), então existe $v \in L^2(\Omega)$, com $v \in \beta(u)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + v &= f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{P1}$$

Integrando a primeira equação do problema $(P1)$ em Ω, segue-se que

$$\int_\Omega (-\Delta u + v)dx = \int_\Omega fdx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega -\Delta udx + \int_\Omega vdx = \int_\Omega fdx.$$

Desde que $u \in W^{2,2}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega -\Delta udx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma$$

e $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sobre $\partial\Omega$, tem-se que

$$\int_\Omega vdx = \int_\Omega fdx,$$

para todo $v \in \beta(u)$. □

Lema 2.1.2. *A função $\phi : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

é convexa, semicontínua inferiormente e própria.

Demonstração. Com efeito, ϕ é própria, pois contradomínio é $\mathbb{R}$. Sendo ϕ contínua, então é semicontínua inferiormente. Por fim,

$$\begin{aligned} \phi(tu + (1-t)v) &= \frac{1}{2}\|t\nabla u + (1-t)\nabla v\|^2_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(t^2\|\nabla u\|^2_2 + (1-t)\|\nabla v\|^2_2 + 2t(1-t)\int_\Omega \nabla u \nabla v dx\right) \\ &\leq t^2\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + (1-t)^2\|\nabla v\|^2_2 + t\frac{(1-t)}{2}\left(\|\nabla u\|^2_2 + \|\nabla v\|^2_2\right) \\ &= t^2\phi(u) + (1-t)^2\phi(v) + t(1-t)\phi(u) + t(1-t)\phi(v) \\ &= t\phi(u) + (1-t)\phi(v),\ \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

□

O próximo lema trata da maximalidade do operador $-\Delta$, o que será bastante relevante para a demonstração do principal resultado desta seção.

Lema 2.1.3. *O operador* $-\Delta : D(-\Delta) \to L^2(\Omega)$, *onde* $D(-\Delta) = \{u \in W^{2,2}(\Omega) : \partial u/\partial\eta = 0,\ em\ \partial\Omega\}$, *coincide com a subdiferencial de* ϕ, *isto é,* $-\Delta = \partial\phi$.

Demonstração. Seja $u \in D(-\Delta)$ e $v \in W^{1,2}(\Omega)$. Então,

$$\int_\Omega -\Delta u(v-u)dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla(v-u)dx.$$

Assim,

$$\int_\Omega -\Delta u(v-u)dx = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v - |\nabla u|^2)dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega -\Delta u(v-u)dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Daí,

$$\int_\Omega -\Delta u(v-u)dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Então,

$$\int_\Omega -\Delta u(v-u)dx \leq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$(-\Delta u, v-u)_{L^2(\Omega)} + \phi(u) \leq \phi(v),\ \forall v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Mostrando que , $-\Delta u \in \partial\phi(u)$, para todo $u \in D(-\Delta)$.

Reciprocamente, se provarmos que $\partial\phi$ é um operador univalente, concluiremos que $-\Delta = \partial\phi$. Feito isto, segue da Proposição 1.3.1 que $-\Delta$ é maximal monotônico.

$\partial\phi$ é um operador univalente. De fato, uma vez que

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},\ \ \forall u \in W^{1,2}(\Omega)$$

é Gateaux diferenciável, e do Lema 2.1.2 segue que ϕ é convexa. Assim, da Observação 1.3.1 concluímos que $\phi' = \partial\phi$, ou seja, $\partial\phi$ é univalente. Portanto $-\Delta = \partial\phi$. □

O resultado que iremos mostrar agora irá assegurar a existência de solução para o problema (PN).

Teorema 2.1.1. *O problema (PN) admite uma solução forte $u \in W^{2,2}(\Omega)$ se*

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f dx \in int(Im(\beta)). \tag{2.2}$$

Demonstração. Para mostrar este resultado, usaremos o Teorema 1.6.2. Para isso, sejam $H = L^2(\Omega)$ e $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um operador maximal monotônico dado. Definamos,

$$A : D(A) \subset H \longrightarrow H,$$

$$A = -\Delta, \text{ com } D(A) = \left\{ u \in W^{2,2}(\Omega); \frac{\partial u)}{\partial \eta} = 0 \; em \; \partial\Omega \right\}$$

e B como na Proposição 1.3.3. Segue do Lema 2.1.2 e da Proposição 1.3.1 que o operador A é maximal monotônico. Além disso, da Proposição 1.3.3 segue que B é maximal monotônico. Do Teorema 1.6.2, se mostrarmos que vale

$$(Au, B_\lambda u) \geq 0, \; \forall u \in H, \; \forall \lambda > 0,$$

concluiremos que

$$Im(A + B) \simeq Im(A) + Im(B), \tag{2.3}$$

ou equivalentemente,

$$\overline{Im(A + B)} = \overline{Im(A)} + \overline{Im(B)} \tag{2.4}$$

e

$$int(Im(A + B)) = int(Im(A) + Im(B)). \tag{2.5}$$

Para isto, observe que

$$\begin{aligned}
(Au, B_\lambda u)_{L^2(\Omega)} &= -\int_{\Omega} \Delta u \beta_\lambda(u) dx \\
&= \int_{\Omega} (-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}) \beta_\lambda(u) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \beta_\lambda(u) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial(\beta_\lambda(u))}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \beta_\lambda'(u) \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, (2.3) ocorre.

Mostraremos agora que

$$f \in int(Im(A) + Im(B)). \tag{2.6}$$

Se (2.6) é verdade, concluiremos de (2.5) que $f \in int(Im(A + B))$, e, consequentemente o problema (PN) admitirá uma solução forte.

Para provar (2.6), tomemos $g \in H = L^2(\Omega)$ e notemos que

$$g = \left(g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g dx\right) + \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f dx + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (g-f)dx\right) = g_1 + g_2,$$

onde

$$g_1 = g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g dx$$

e

$$g_2 = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f dx + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (g-f)dx.$$

Desde que,

$$\int_\Omega g_1 dx = 0,$$

segue do Teorema (PNL) (ver Apêndice C) que, $g_1 \in Im(A)$. Por outro lado, se tomarmos $\|g - f\|_{L^2(\Omega)}$ suficientemente pequeno, segue de (2.2) que $g_2 \in Im(\beta)$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, com

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f - \epsilon, \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f + \epsilon\right) \subset Im(\beta)$$

tal que $|g - f| < \delta$. Notemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (g-f)dx\right| &\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |g-f|\, dx \\ &\leq \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega |g-f|^2\, dx\right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} \\ &< \frac{\delta}{|\Omega|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon < \delta / |\Omega|^{1/2}$, temos

$$\left|\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (g-f)dx\right| < \epsilon,$$

ou seja,

$$-\epsilon < \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (g-f)dx < \epsilon.$$

Daí,

$$\int_\Omega f dx - \epsilon < \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f dx + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (g-f)dx < \int_\Omega f + \epsilon$$

Logo, $g \in Im(A) + Im(B)$, o que mostra (2.6). Portanto, dado $f \in L^2(\Omega)$, existe $u \in W^{2,2}(\Omega)$ solução forte do problema (PN). $\square$

2.2 Um problema não linear com a condição de Dirichlet

Nesta seção estamos interessados em estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) & \ni & f & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, η é o vetor normal unitário exterior a fronteira de Ω, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um operador multivalente maximal monotônico dado e $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada.

Definição 2.2.1. *Uma solução forte para problema (PD) é uma função $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$-\Delta u + \beta(u) \ni f, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

No que segue, apresentaremos o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.1. *Para cada $f \in L^2(\Omega)$ dada, o problema (PD) possui uma solução forte.*

Demonstração. Seja $H = L^2(\Omega)$ e defina os operadores

$$A = -\Delta, \ D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

e B como na Proposição 1.3.3. Seja $-\Delta = \partial\phi$, onde $\phi : L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ é uma função convexa, semicontínua inferiormente e própria dada por

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 & , \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ +\infty & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Do Lema 2.1.3, segue que A é maximal monotônico, da Proposição 1.3.3 temos que B também é maximal monotônico, vimos no Teorema 2.1.1 que

$$(Au, B_\lambda u) \geq 0, \ \forall u \in H, \ \forall \lambda > 0.$$

Então, segue do Corolário 1.5.2 que $A + B$ é maximal monotônico. No que segue usaremos o Teorema 1.2.2 para mostrar que $Im(A+B) = L^2(\Omega)$. Para isso, precisamos mostrar que $A+B$

é coercivo. Com efeito,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\Delta u + Bu)udx &= \int_\Omega (-\Delta u + \beta(u))udx \\ &= \int_\Omega -\Delta u.udx + \int_\Omega \beta(u)udx \\ &\geq \int_\Omega -\Delta u.udx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ &\geq c\int_\Omega |u|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Logo, $A + B$ é coercivo. Portanto, pelo Teorema 1.2.2, dado $f \in L^2(\Omega)$, existe uma solução forte para o problema (PD). $\square$

2.3 Um problema de contorno não linear

Nesta seção estamos interessados em estudar o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \eta} + f \in \beta(u) \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{PC}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, η é o vetor normal unitário exterior a fronteira de Ω, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um operador multivalente maximal monotônico dado e $f \in L^2(\partial\Omega)$ é uma função dada.

Definição 2.3.1. *Uma solução forte para o problema (PC) é uma função $u \in W^{3/2,2}(\Omega)$ tal que*

$$\Delta u = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta} + f \in \beta(u), \text{ q.t.p em } \partial\Omega.$$

Lema 2.3.1. *Se $u \in W^{3/2,2}(\Omega)$ é solução forte do problema (PC), então*

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma = \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} v d\sigma \in \overline{Im\beta},\ \forall v \in \beta(u).$$

Demonstração. Suponha que $u \in W^{3/2,2}(\Omega)$ seja solução do problema (PC), então existe $v \in L^2(\partial\Omega)$ com $v \in \beta(u)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \eta} + f = v, \text{ q.t.p. em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P2}$$

Integrando a segunda equação do problema acima sobre $\partial\Omega$, temos

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma + \int_{\partial\Omega} f d\sigma = \int_{\partial\Omega} v d\sigma.$$

Desde que $u \in W^{3/2,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = 0,$$

segue-se que

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma = \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} v d\sigma,\ \forall\, v \in \beta(u).$$

□

Teorema 2.3.1. *Se*
$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma \in \ int(Im(\beta)), \tag{2.7}$$
então o problema (PC) *tem solução* $u \in W^{3/2,2}(\Omega)$.

Demonstração. Para isto, usaremos o Teorema 1.6.2. Seja $H = L^2(\partial\Omega)$. Definamos os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} B : L^2(\partial\Omega) &\to L^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto B(u), \end{aligned}$$

onde $Bu = \{V \in L^2(\partial\Omega) : v \in \beta(u), q.t.p.em\partial\Omega\}$ e $A : D(A) \subset H \to H$, onde $D(A) = W^{1,2}(\partial\Omega)$ e para cada $u \in W^{1,2}(\partial\Omega)$, seja $\bar{u} \in W^{3/2,2}(\Omega)$ a solução fraca de

$$\begin{cases} \Delta\bar{u} = 0 & \text{em} & \Omega, \\ \bar{u} = u & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Definimos,
$$Au = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (Au, B_\lambda u)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}.\beta_\lambda(\bar{u})d\sigma \\ &= \int_\Omega div(\nabla\bar{u})\beta_\lambda(\bar{u})dx \\ &= \int_\Omega \nabla\beta_\lambda(\bar{u})\nabla\bar{u}dx + \int_\Omega \beta_\lambda(\bar{u})\Delta\bar{u}dx \\ &= \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^2 \beta_\lambda'(\bar{u})dx \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.6.2, uma vez que A e B são maximais monotônicos, temos

$$Im(A+B) \simeq Im(A) + Im(B),$$

ou seja,
$$\overline{Im(A+B)} = \overline{Im(A)} + \overline{Im(B)} \tag{2.8}$$

e

$$int(Im(A+B)) = int(Im(A) + Im(B)). \tag{2.9}$$

Diante disto, mostraremos que

$$f \in int(Im(A) + Im(B)). \tag{2.10}$$

Provando (2.10), concluiremos de (2.9) que $f \in int(Im(A + B))$, e, consequentemente o problema (PC) admitirá uma solução forte.

Para provar (2.10), tomemos $g \in H = L^2(\partial\Omega)$ e notemos que

$$g = \left(g - \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} g d\sigma\right) + \left(\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma + \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}(g-f)d\sigma\right) = g_1 + g_2,$$

onde

$$g_1 = g - \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} g d\sigma$$

e

$$g_2 = \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma + \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\Omega}(g-f)d\sigma.$$

Desde que,

$$\int_{\partial\Omega} g_1 dx = 0,$$

segue que, $g_1 \in Im(A)$. Por outro lado, se tomarmos $\|g - f\|_{L^2(\partial\Omega)}$ suficientemente pequeno, segue de (2.7) que $g_2 \in Im(\beta)$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, com

$$\left(\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma - \epsilon, \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma + \epsilon\right) \subset Im(\beta)$$

tal que $|g - f| < \delta$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}(g-f)d\sigma\right| &\leq \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}|g-f|\, d\sigma \\
&\leq \frac{1}{|\partial\Omega|}\left(\int_{\partial\Omega}|g-f|^2\, d\sigma\right)^{1/2} |\,\partial\Omega|^{1/2} \\
&< \frac{\delta}{|\,\partial\Omega|^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon < \delta / |\partial\Omega|^{1/2}$, temos

$$\left|\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}(g-f)d\sigma\right| < \epsilon,$$

ou seja,

$$-\epsilon < \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}(g-f)d\sigma < \epsilon.$$

Daí,

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma - \epsilon < \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma + \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}(g-f)d\sigma < \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f d\sigma + \epsilon$$

Logo, $g \in Im(A) + Im(B)$, o que mostra (2.9). Portanto, dado $f \in L^2(\partial\Omega)$, existe $u \in W^{3/2,2}(\Omega)$ solução forte do problema (PC). $\square$

2.4 Problema de Dirichlet semilinear em ressonância

Nesta seção, investigaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u + \beta(u) & \ni & f & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{PR}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto limitado de fronteira $\partial\Omega$ suave, ϕ é uma λ_1 autofunção, com $\phi > 0$ em Ω, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um operador multivalente maximal monotônico tal que $0 \in D(\beta)$ e $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada.

Definição 2.4.1. *Uma solução forte para o problema (PR) é uma função $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$-\Delta u - \lambda_1 u + \beta(u) \ni f, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Teorema 2.4.1. *Se*

$$\frac{\int_\Omega f\phi dx}{\int_\Omega \phi dx} \in int(Im(\beta)), \tag{2.11}$$

então, o problema (PR) tem uma solução forte.

Demonstração. Seja $H = L^2(\Omega)$ e definamos os operadores

$$A : D(A) \subset H \to H,$$

onde

$$A = -\Delta - \lambda_1 I, \text{ e } D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

e B como na Proposição 1.3.3. O operador A é maximal monotônico, pois segue do Teorema 1.1.4 que $Im(A + (\lambda_1 + 1)I) = H$. De fato, isso quer dizer que o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = & f & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

sempre admite solução para cada $f \in L^2(\Omega)$ (ver [3], Exemplo 1, página 291). Usando o fato de que $0 = \beta_\lambda(0)$, teremos

$$\begin{aligned} ((A + \lambda_1)u, B_\lambda u)_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega \Delta u \beta_\lambda(u) dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla(\beta_\lambda(u)) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \beta_\lambda(u) d\sigma \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla(\beta_\lambda(u)) dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 . \beta_\lambda^{'}(u) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, segue do Teorema 1.6.2 que

$$Im(A+B) \simeq Im(A) + Im(B).$$

Diante disto, dada $g \in L^2(\Omega)$, escrevemos

$$g = (g-k) + k, \text{ onde } k = \frac{\int_\Omega g\phi \, dx}{\int_\Omega \phi \, dx}$$

Segue do Teorema 1.0.11 (ver Apêndice A), que $g-k \in Im(A)$. Por outro lado, se $\|g-k\|_{L^2(\Omega)}$ for suficientemente pequeno, temos de (2.11) que $k \in Im(\beta)$. Portanto, dada $f \in L^2(\Omega)$, existe $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ solução forte para o problema (PR). $\square$

Apêndice A

Resultados Importantes

Definição 1.0.2. *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é uma contração, quando esxiste uma constante $0 < \alpha < 1$, tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \forall x, y \in M. \tag{A.1}$$

Teorema 1.0.2. ***(Ponto Fixo de Banach)***

Sejam M um espaço métricos completo e $f : M \to M$ uma contração. Então existe um único ponto fixo $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Demonstração. Ver [2], página 263, Teorema 9.4.2. □

Proposição 1.0.1. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Seja E um espaço vetorial com produto interno $(.,.)$ e $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Então,*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, . \, \|y\| \tag{A.2}$$

para quaisquer $x, y \in E$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores x e y são linearmente dependentes.

Demonstração. Ver [2], página 105, Proposição 5.1.2. □

Definição 1.0.3. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. O adjunto de $T : E \to F$ deve ser um operador linear $T^* : F^* \to E^*$ tal que,*

$$(T^*\varphi, x)_{E^*,E} = (\varphi, Tx)_{F^*,F} \quad \forall x \in E \ \text{ e } \ \varphi \in F^*. \tag{A.3}$$

O operador T^* é chamado adjunto de T.

Teorema 1.0.3. ***(Riesz-Fréchet)*** *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = (x, y_0), \quad \forall x \in H. \tag{A.4}$$

Além disso, $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Demonstração. Ver [2], página 126, Teorema 5.5.2. □

Proposição 1.0.2. *Seja E um espaço normado.*

a *Se $x_n \to x$ em E, então a sequência (x_n) é limitada e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*

b *Se $x_n \to x$ em E e $\varphi \to \phi$ em E', então $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ em $\mathbb{R}$*

Demonstração. Ver [2], página 145, Proposição 6.2.5. □

Teorema 1.0.4. ***(Kakutani)*** *Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se,*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\} \tag{A.5}$$

é compacto na topologia $\sigma(E, E^*)$.

Demonstração. Ver [2], página 160, Teorema 6.4.5. □

Teorema 1.0.5. *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [2], página 164, Teorema 6.5.4. □

Definição 1.0.4. *Sejam E e F espaços de normados e U um subconjunto limitado de E. Dizemos que uma aplicação arbitrária $\varphi : U \to F$ tem posto finito se o subespaço $Span\varphi(U)$ de F gerado pela imagem de φ tem dimensão finita*

Definição 1.0.5. *Sejam E e F espaços de Banach e $U \subseteq E$. Um operador $\varphi : U \to F$ é compacta se:*

a) φ é contínua com relação a topologia das normas;

b) Para todo subconjunto limitado $V \subseteq U$, $\overline{\varphi(V)}$ é compacto em F.

Teorema 1.0.6. *(Ponto Fixo de Brower) Seja C um subconjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo do $\mathbb{R}^n$. Qualquer aplicação contínua $T : C \to C$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Ver [2], página 269, Teorema 9.5.6. □

Definição 1.0.6. *Seja X um espaço vetorial. Um subconjunto $C \subseteq X$ é dito convexo se,*

$$ta + (1-t)b \in C, \quad \forall a, b \in C \text{ e } 0 \leq t \leq 1. \tag{A.6}$$

Definição 1.0.7. *Dado um subconjunto C do espaço vetorial X, a envoltória convexo de C, denotado por coC, é a interseção de todos os subconjuntos convexos de X que contém C, ou equivalentemente, é o menor convexo de X que contém C.*

Teorema 1.0.7. *Seja K um subconjunto convexo, fechado e não vazio de um espaço de Hilbert H. Então, existe um único $u \in H$ tal que*

$$|x-u| = \min_{v \in K} |x-v| = dist(x, K). \tag{A.7}$$

Além disso, u é caracterizado por

$$(x-u, v-u) \leq 0, \ \forall\, v \in K. \tag{A.8}$$

Denotamos $u = proj_K x$.

Demonstração. Ver [2], página 132, Teorema 5.2. □

Definição 1.0.8. *Seja X um espaço topológico. Uma função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente quando o conjunto $\phi^{-1}(a, +\infty)$ é aberto em X, para qualquer $a \in \mathbb{R}$*

Definição 1.0.9. *Uma função $\phi : H \to (-\infty, +\infty]$ diz-se própria quando para todo $x \in H$ tem-se que*

$$\phi \not\equiv +\infty. \tag{A.9}$$

Definição 1.0.10. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $\phi : H \to \mathbb{R}$, dizemos que ϕ possui derivada de Gateaux no ponto $u \in H$ quando existe um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(u+tv) - \phi(u) - T_0 v}{t} = 0, \ \forall v \in X. \tag{A.10}$$

onde u é a diferencial de Gateaux no ponto x.

Teorema 1.0.8. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, $A \subset E$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio e*

$$\varphi : A \to (-\infty, +\infty],\ \varphi \not\equiv 0 \tag{A.11}$$

uma função convexa, s.c.i. tal que

$$\lim_{\|x\| \to =\infty} \varphi(x) \to +\infty, \tag{A.12}$$

então φ atinge seu mínimo em A, isto é, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\varphi(x_0) = \min_{x \in A} \varphi(x). \tag{A.13}$$

Demonstração. Ver [2], página 71, Corolário 3.23. □

Lema 1.0.1. *Sejam H um espaço de Hilbert, $(x_n), (u_n) \subset H$ tais que $x_n \to 0$ em H, $\|u_n\| \to +\infty$ e $\rho > 0$. Então, existe $x \in H$ tal que $\|x\| \leq \rho$ tal que*

$$\liminf (u_n, x_n - x - z) = -\infty. \tag{A.14}$$

Demonstração. Ver [8], página 147, Lema 4.1. □

Definição 1.0.11. *Seja V espaço vetorial. Uma função $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$é convexa se*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \tag{A.15}$$

para todos $t \in [0, 1]$ e $x, y \in V$. Se a desigualdade for estrita para $t \in (0, 1)$, a função é dita estritamente convexa.

Teorema 1.0.9. ***(Banach Steinhaus).*** *Sejam E um espaço de Banach, F em espaço normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathscr{L}(E, F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$, existe $C_x < +\infty$ tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x.$$

Então, $\sup_{i \in I} \|Ti\| < \infty$.

Demonstração. Ver [2], página 38, Teorema 2.3.2. □

Definição 1.0.12. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura de X é uma família $\chi = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que $S = \cup_{\lambda \in L} C\lambda$. Isto significa que, para cada $x \in X$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.*

Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda se pode obter $\lambda \in L'$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $X \subset \cup_{\lambda\ inL'} C_\lambda$, então a subfamília $\chi' = (C_\lambda)'_\lambda$, chama-se uma cobertura de χ. Uma cobertura $X \subset \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$ diz-se aberta quando cada conjunto $A_\lambda, \lambda \in L$, é aberto em M. A cobertura $X \subset \cup_{\lambda \in L} C_\lambda$ diz-se finita quando L é um conjunto finito. Neste caso, temos $L = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ e escrevemos $X \subset C_{\lambda_1} \cup ... \cup C_{\lambda_n}$.

Definição 1.0.13. *Dados um espaço métrico M, um espaço vetorial normado E e uma aplicação $f : M \to E$, o suporte de f é por definição, o fecho do conjunto*

$$\{x \in M; f(x) \neq 0\}.$$

Usaremos a notação $supp(f)$ para representar o suporte de f. Dado $x \in M$, dizer que $x \notin supp(f)$ significa afirmar que existe uma vizinhança de x na qual se anula identicamente.

Definição 1.0.14. *Seja M um espaço métrico. Uma partição da unidade em M é uma família $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in L}$ de funções reais contínuas $\varphi_\lambda : M \to \mathbb{R}$ tais que:*

1) *Para todo $x \in M$ e todo $\lambda \in L$, tem-se $\varphi_\lambda(x) \geq 0$;*

2) *A família $\chi = (supp(\varphi_\lambda))_{\lambda \in L}$ é localmente finita em M;*

3) *Para todo $x \in M$ tem-se $\sum_{\lambda \in L} \varphi_\lambda(x) = 1$.*

Definição 1.0.15. *Seja $\chi = (C_\lambda)_\lambda \in L$ uma cobertura de M. Dizemos que uma partição da unidade $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\lambda = 1$ está subordinada à cobertura χ quando, para todo $\alpha \in A$, existe $\lambda \in L$ tal que $supp(\varphi_\alpha) \subset C_\alpha$. Em outras palavras, a cobertura formada pelos suportes das funções φ refina χ.*

Teorema 1.0.10. *Seja M um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *M é compacto;*

(ii) *M é completo e totalmente limitado;*

(iii) *Toda sequência em M possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Ver [9], página 248, Proposição 7. □

Teorema 1.0.11. *(Alternativa de Fredholm) Seja E um espaço de Banach. Se $T : E \to E$ é um operador compacto, então uma e apenas uma das possibilidades ocorre:*

(i) *T tem um ponto fixo não-nulo.*

(ii) *A equação $T(x) - x = y$ tem solução para todo $y \in E$.*

Demonstração. Ver [2], página 196, Teorema 7.3.5. $\square$

Teorema 1.0.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado, $\partial\Omega \in C^1$ e seja ν a normal unitária exterior a $\partial\Omega$. Para uma função vetorial F em $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ temos*

$$\int_\Omega divF dx = \int_{\partial\Omega} F\nu ds$$

onde $divF = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$.

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio onde vale o Teorema da divergência e sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Então,

(i) Primeira Identidade de Green

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial v} ds - \int_\Omega v\Delta u dx$$

(ii) Segunda Identidade de Green

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds$$

Ver [8], página 20, Teorema do Divergente.

Apêndice B

Espaços de Funções

2.1 Espaços de Lebesgue

Recordemos alguns resultados fundamentais a respeito dos espaços $L^P(\Omega)$.

Definição 2.1.1. *Seja $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \textit{ é mensurável e } \int_\Omega |u|^p dx < +\infty \right\}.$$

A norma $L^p(\Omega)$ é definida por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.1.2. *Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \textit{ é mensurável e } \exists\, C \in \mathbb{R} \textit{ tal que } |u(x)| \leq C \textit{ q.t.p em } \Omega\}.$$

A norma em $L^\infty(\Omega)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf \{c \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq c \textit{ q.t.p em } \Omega\}.$$

Teorema 2.1.1. ***(Desigualdade de Hölder).*** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ onde $1 \leq p \leq +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e $|fg|_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_p||g||_q$.*

Demonstração. Ver [2], página 92, Teorema 4.6. □

2.2 Espaços de Sobolev

Nessa seção, apresentaremos alguns resultados sobre espaços de Sobolev relevantes a esta dissertação.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio (aberto e conexo). Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos o espaços de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega); \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \leq m, \right\}$$

munido com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_p \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Teorema 2.2.1. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}_\Omega$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [10], página 24, Proposição 2.2.1. □

O caso particular $m = 1$ e $p = 2$ é útil nas aplicações e neste caso o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ é representado por $H^1(\Omega)$. O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar dado por

$$(u, v)_{H^1} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial y_i},$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Teorema 2.2.2. *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, reflexivo e separável para $1 \leq p < +\infty$. Ainda, o espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração. Ver [2], página 264, Proposição 9.1. □

Teorema 2.2.3. ***(Desigualdade de Poincaré).*** *Seja $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então existe uma constante C (dependente de Ω e e p) tal que*

$$||u||_p \leq C||\nabla u||_p \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [1], página 290, Corolário 9.19. □

Os espaços de Sobolev $H^s(\Omega)$

Outra caracterização dos espaços $H^m(R^n)$, m inteiro positivo e o espaço $H^s(\Omega)$, quando s é um real positivo e Ω um aberto do R^n. Considera-se a função $J_m(x) = (1 + ||x||2)^m/2$, $x \in R^n$. Aqui, $\bar{u}$ estará representando a transformada de Fourier de u e u' a transformada de Fourier inversa.

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e s real não negativo, seja $J^s(x) = (1 + \|x\|^2)^{s/2}$, semelhante a J_m caso m inteiro não negativo. Define-se o espaço $H^s(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial

$$\{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|\mathrm{x}\|^2)^{\mathrm{m}/2}\bar{\mathrm{u}} \in \mathrm{L}^{\mathbb{R}^n}\}$$

com produto escalar definido por

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^2 \bar{u}\bar{v}dx,$$

munido da norma

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int^{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \, |\bar{u}|^2 \, dx.$$

Teorema 2.2.4. *O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Denota-se por $H^s(\Omega)$, s um número real não negativo e Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, ao espaço vetorial

$$H^s(\Omega) = \{u = v|_\Omega; v \in H^s(\Omega)\}.$$

Proposição 2.2.1. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$, então*

$$H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [10], página 97, Proposição 2.6.7. □

Denota-se por $C_b^m(\bar{\Omega})$ ao espaço de Banach

$$C_b^m(\bar{\Omega}) = \{u = |_\Omega; v \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ e } \mathrm{D}^\alpha \text{ é limitado em } \bar{\Omega}, |\alpha| \leq \mathrm{m}\},$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{C_b^m(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \left(\sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u| \right).$$

Proposição 2.2.2. *Se* $s - n/2 > m$*,* m *inteiro não-negativo, então*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C_b^m(\bar{\Omega}).$$

Demonstração. Ver [10], página 96, Proposição 2.6.8. □

Para mais detalhes destes espaços, consultar [10].

Apêndice C

Um Problema Linear

3.1 Um problema linear com a condição de Neumann

Neste Apêndice estudaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= g \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{PNL}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de fronteira $\partial\Omega$ suave, η é o vetor normal unitário exterior a Ω, $g \in L^2(\Omega)$ é função dada e $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Definição 3.1.1. *Uma solução fraca para o problema (PNL) é uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g v dx, \ \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Teorema 3.1.1. *O problema (PNL) tem solução uma única solução fraca, a menos de translação de constante, se, e somente se,*

$$\int_\Omega g dx = 0.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que

$$\int_\Omega g dx = 0.$$

Sabemos que

$$H^1(\Omega) = H \oplus Span\{1\},$$

onde $Span\{1\} = \mathbb{R}$ e
$$H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0 \right\}.$$
Lembramos que a Desigualdade de Poincaré vale para as funções de H (ver Teorema 2.2.3, Apêndice C), isto é,
$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \ \forall u \in H.$$
Assim,
$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$
define uma norma em H, e
$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$$
define um produto interno em H. Desse modo, pelo Teorema 1.0.3 (Ver Apêndice A), para todo $g \in H$, existe uma única $u \in H$ tal que
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g v dx, \ \forall v \in H.$$
Assim,
$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \nabla (v + c) dx &= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \\
&= \int_\Omega g v dx \\
&= \int_\Omega g v dx + c \int_\Omega g dx \\
&= \int_\Omega g(v + c) dx, \ \forall c \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \text{v} \in \text{H}.
\end{aligned}$$
Portanto,
$$\int_\Omega \nabla u \nabla w = \int_\Omega g w, \ \forall w \in H^1(\Omega).$$
Reciprocamente, se $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (PNL), então
$$\int_\Omega (-\Delta u) dx = \int_\Omega g dx.$$
Donde,
$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma = \int_\Omega g dx.$$
$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R., G., *The Elements of Integration and Lebesgue*, Jhon Wiley e Sons, New York, 1966.

[2] Botelho, G., Pellegrino, D., & Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[3] Brezis, H., *Functional Analyis, Sobolev space and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[4] Brezis, H., *Monotonicity Methods in Hilbert Spaces and Some Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*. Contributions to Nonlinear Functional Analysis, editado por E. H. Zarantonello. Academic Press 1971.

[5] Brezis, H., *Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North Holland, 1973.

[6] Brezis. H., *Quelques proprietiés des opérateurs monotones et semi-groupes non linéaires*. Curso ministrado no Seminário Avançado sobre operadores não lineares, Bruxelas, 1975.

[7] Brezis, H., et Haraux, A., *Sur l'image d'une some d'opérateurs monotone et applications*. Israel J. of Math. Vol. 23 1976, p.$165 - 186$.

[8] Figueiredo, D. G., *Equações Elípticas não Lineares*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[9] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[10] Medeiros, L.A.J., Miranda, M.A.M., *Espaços de Sobolev*, UFRJ, IM. Rio de Janeiro, 2000.

[11] Minty, G. J., *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert Space*, Duck Math, J. 29, 1977.