



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA

Manoel Dione de Oliveira Silva

Solução numérica de uma classe de
equações integrais

BELÉM - PA

2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA

Manoel Dione de Oliveira Silva

Solução numérica de uma classe de equações integrais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

BELÉM - PA

2017

Dados Internacionais de Catalogação - na - Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós-Graduação do ICEN/UFPA

Silva, Manoel Dione de Oliveira

Solução numérica de uma classe de equações integrais/
Manoel Dione de Oliveira Silva; orientador, Cristina Lúcia
Dias Vaz.- 2017.

144f. il. 29 cm

Inclui bibliografias

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto
de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Belém, 2017.

1. Equações integrais - Soluções numéricas. 2. Métodos dos
Elementos de Contorno. 3. Método dos Elementos Finitos. 4. Equação
Integral de Fredholm. 5. Métodos de projeção. I. Vaz, Cristina Lúcia
Dias. orient. II. Título.

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Manoel Dione de Oliveira Silva

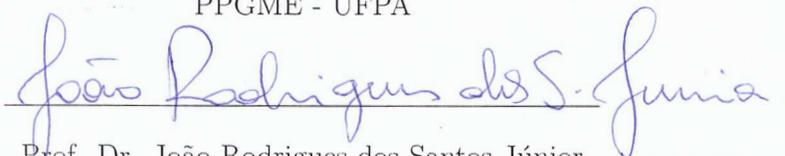
Solução numérica de uma classe de equações integrais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:



Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz - Orientadora

PPGME - UFPA



Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

PPGME/PDM - UFPA



Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz

UFOPA

DATA DA AVALIAÇÃO: 29/06/2017

RESULTADO: Aprovado

Dedicatória

Dedicado à

*Ágata Silva,
Cristina Vaz,
Hilma Oliveira,
Maria de Nazaré,
Maria Simone,
Rosângela do Socorro e
Thais Sousa.*

Esta vitória também é de vocês.

Agradecimentos

Obrigado meu Deus por tudo.

Agradeço à minha família pelo amor e suporte sempre que necessário, pela compreensão e inspiração acima de tudo.

Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz pela sua dedicação, generosidade e confiança.

Agradeço à Dra. Hilma de Oliveira pelo seu apoio, incentivo e conselhos, me acompanhando desde o ensino básico.

Agradeço à UFPA e ao ICEN, e em especial, à CAPES pelo apoio financeiro durante a duração desse curso.

Agradeço à todos os colegas e amigos que fizeram parte dessa jornada direta ou indiretamente. Os momentos com cada um de vocês são preciosos.

Resumo

As equações integrais constituem um ramo importante da Matemática. Inicialmente foram usadas para investigar a existência e unicidade da equação de Laplace. Uma abordagem para resolução desta equação é transformar o problema diferencial num problema integral. O matemático que mais se destacou foi Ivar Fredholm que estudou uma classe bem ampla de equações integrais de segunda espécie e, também em diversos domínios, inclusive em espaços n -dimensionais.

Atualmente, as equações integrais tem aplicações em diversas áreas, e nas últimas décadas houve um aumento significativo da sua aplicabilidade, principalmente um avanço na obtenção de soluções numéricas, devido o advento dos computadores.

Este trabalho é um estudo sobre os principais métodos numéricos de uma classe de equações integrais: equação integral de Fredholm linear de segunda espécie e uma classe de equação integral de contorno linear. Foram analisados métodos de projeção e um método de quadratura. Os métodos de projeção investigados foram: o Método da Colocação, o Método de Galerkin e o Método de Projeção Iterativa. O método de quadratura investigado foi o Método de Nyström.

Os principais resultados teóricos usados na análise numérica das equações integrais de Fredholm clássicas foram: Teorema das séries geométricas, Teorema do ponto fixo de Banach e Alternativa de Fredholm. Para obtenção de solução numérica desta classe de equações integrais usamos métodos de projeção e o método de quadratura conhecido com Método de Nyström.

No caso das equações integrais de contorno faremos uma breve introdução do Método dos Elementos Finitos de contorno.

Para a implementação computacional dos métodos estudados usamos o aplicativo

Maxima. Escolhemos o aplicativo *Maxima* por tratar-se de um software de computação simbólica e numérica gratuito com alta versatilidade

O trabalho, essencialmente, aborda métodos numéricos para solução de equações integrais lineares, mas para ilustrar o caso não linear apresentaremos uma breve introdução da solução numérica da equação integral de Fredholm não linear.

Palavras-chave: Equação integral de Fredholm; Métodos de Projeção; Método de Nyström; Método dos Elementos Finitos de Contorno; aplicativo *Maxima*.

Abstract

The integral equations constitute an important branch of mathematics. Initially, these equations were employed to study the existence and uniqueness of Laplace's equation. An approach to solve this equation is to transform the differential problem in an integral problem. One of the most noteworthy mathematicians in this area was Ivar Fredholm, who studied a wide class of integral equations of the second kind in several domains, including n -dimensional spaces.

Nowadays, the integral equations are applied in many different areas, and in the last decades their applicability has significantly increased, mostly advancing in the achievement of numerical solutions, due to the advent of the computers.

This work is a study about the main numerical methods of a class of integral equations: linear Fredholm equation of the second kind and a class of integral equations with linear contour. A quadrature method and some projection methods were analyzed. The investigated methods were: the Collocation Method, the Galerkin Method and the Iterative Projection Method. The quadrature method that was studied is the Nyström Method.

The main theoretical results employed in the numerical analysis of the classic Fredholm integral equations were: the Geometric Series Theorem, the Banach fixed-point Theorem and the Fredholm Alternative. We used some projection methods and the Nyström Method to obtain a numerical solution for this class of integral equations.

In the case of contour integral equations we make a brief introduction to the Finite Contour Elements Method.

used the application *Maxima* to implement computationally the studied methods.

We chose this application because it is a freeware symbolic-numeric computation software with high versatility.

This work, essentially, approaches numerical methods for the solution of linear integral equations, but to illustrate the nonlinear case we make a brief introduction of the numerical solution for the nonlinear Fredholm integral equation.

Keywords: Fredholm integral equation; Projection Methods; Nyström Method; Finite Contour Elements Method; *Maxima* application.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Tópicos sobre as equações integrais	4
1.2 Tópicos de Análise Funcional	8
1.2.1 Operador projeção	14
1.2.2 Operador compacto	16
1.3 Tópicos da Teoria do Potencial	24
1.3.1 Identidades de Green	24
1.3.2 Equação de Laplace em domínios limitados	26
1.3.3 Equação de Laplace em domínios ilimitados	27
2 Aspectos Teóricos das Equações Integrais	31
2.1 Equação integral de Fredholm	31
2.2 Equação integral de Volterra	32
2.3 Equações integrais de contorno	35
3 Solução Numérica da Equação de Fredholm	40
3.1 Métodos de projeção	40
3.1.1 Principais ideias	40
3.1.2 Aspectos teóricos	45

3.1.3	Exemplos	50
3.2	Método de Projeção Iterativo	59
3.2.1	O Método de Galerkin Iterativo	62
3.2.2	Método da Colocação Iterativo	65
3.3	Caso não linear	69
3.3.1	Um exemplo não linear	70
3.3.2	Equação integral de Hammerstein	73
4	O Método de Nyström	81
4.1	O Método de Nyström para núcleos contínuos	81
4.1.1	Análise de erro do Método de Nyström	84
4.1.2	Aproximação por uma família de operadores compactos	88
4.2	Produto Integração	90
4.2.1	Análise de erro	93
5	Equações Integrais de Contorno: uma introdução	97
5.1	Duas classes de equações integrais de contorno	97
5.1.1	Equações integrais de contorno do tipo direto	98
5.1.2	Equação integral de contorno do tipo indireto	100
5.2	Equações integrais de contorno de 2ª espécie	102
5.2.1	Avaliação do potencial de camada dupla	106
5.2.2	O problema de Neumann exterior	110
5.2.3	Outros problemas de contorno	114
	Considerações Finais	118
	Referências Bibliográficas	120
A	Programação	123

A.1	A1. Método de projeção	123
	A.1.1 Método da Colocação	123
	A.1.2 Método de Galerkin	124
	A.1.3 Método de Galerkin Iterativo	126
	A.1.4 Caso não linear: Método da Colocação	128
	A.1.5 Caso não linear: Método da colocação modificado	128
A.2	A2. Método de quadratura	129
	A.2.1 Fórmula de Interpolação de Nystrom	130
	A.2.2 Método de Nyström com a regra dos trapézios	130
	A.2.3 Método de Nyström com a regra de Simpson	131

Introdução

As equações integrais constituem um ramo importante da Matemática. Inicialmente foram usadas para investigar a existência e unicidade da equação de Laplace.

Devido a vasta aplicabilidade da equação de Laplace e de Poisson (já percebida à época, pois essas equações descrevem fenômenos da Hidrodinâmica, Mecânica quântica e dos fluidos) inúmeros cientistas dedicaram-se a criar métodos de resolução para estas equações. Entretanto, além da dificuldade de tal objetivo e falta de rigor matemático, os métodos criados até o final do século XIX não eram suficientes para tratar a maioria dos domínios.

Uma abordagem para resolução destas equações é transformar o problema diferencial num problema integral. O matemático que mais se dedicou foi Ivar Fredholm que estudou uma classe bem ampla de equações integrais de segunda espécie e, também em diversos domínios, inclusive no \mathbb{R}^n .

Atualmente, as equações integrais tem aplicações em diversas áreas, e nas últimas décadas houve um aumento significativo da sua aplicabilidade, principalmente um avanço na obtenção de soluções numéricas, devido o advento dos computadores.

Este trabalho é um estudo sobre os principais métodos numéricos de uma classe de equações integrais: equação integral de Fredholm linear de segunda espécie e uma classe de equação integral de contorno linear. Foram analisados métodos de projeção e um método de quadratura. Os métodos de projeção investigados foram: o Método da Colocação, o Método de Galerkin e o Método de Projeção Iterativo. O método de quadratura investigado foi o Método de Nyström. Para o caso não linear, foram

aplicados o Método da Colocação e o Método da Colocação Modificado. No caso das equações integrais de contorno será apresentada uma breve introdução do Método dos Elementos Finitos de Contorno.

Os principais resultado teóricos usados na análise numérica das equações integrais de Fredholm clássicas foram: Teorema das séries geométricas, Teorema do ponto fixo de Banach e Alternativa de Fredholm.

Para a implementação computacional dos métodos estudados usamos o aplicativo *Maxima*. Escolhemos o aplicativo *Maxima* por tratar-se de um software de computação simbólica e numérica gratuito com alta versatilidade. O aplicativo *Maxima* (<http://maxima.sourceforge.net>) é um dos sistemas CAS mais antigos. Foi criado pelo grupo MAC no MIT, na década de 1960, e inicialmente chamava-se Macsyma (project MAC's SYmbolic MANipulator). Sendo um software livre apresenta muitas vantagens: acesso ao código fonte, é um projeto colaborativo, criação de um espírito de comunidade, criação de patrimônio cultural da humanidade e pode ser obtido em forma gratuita.

O trabalho, essencialmente, aborda métodos numéricos para solução de equações integrais lineares, mas para ilustrar o caso não linear apresentaremos uma breve introdução da solução numérica de um tipo de equação integral de Fredholm não linear.

O trabalho foi organizado do seguinte modo:

No Capítulo 1, apresentaremos uma breve introdução às equações integrais e os principais resultados da análise numérica que serão usados no trabalho.

No Capítulo 2, provaremos a existência e unicidade de solução de uma classe de equações integrais, incluindo a de Volterra, que apesar de não ser objeto deste trabalho, tem uma grande importância histórica.

O Capítulo 3 é uma análise numérica teórica das equações integrais de Fredholm lineares de segunda espécie. Nessa análise, investigaremos os métodos de projeção: da Colocação, Galerkin e Projeção Iterativo. Analisaremos as condições necessárias

para convergência das soluções aproximadas, análise de erro e ordem de convergência. Além disso, apresentaremos uma breve introdução da solução numérica de um tipo de equação de Fredholm não linear, usando o Método da Colocação e o Método da Colocação Modificado.

No Capítulo 4, investigaremos o método de quadratura conhecido como Método de Nyström. Para núcleos singulares usaremos o método de quadratura denominado de Produto de Integração, que, essencialmente, é a aplicação do Método de Nyström para este tipo de núcleo.

No Capítulo 5, faremos uma breve introdução do Método dos Elementos Finitos de Contorno. O método será aplicado para obtenção da solução numérica da equação de Laplace com condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Essencialmente, usa-se a representação integral do problema, dada pela Teoria do Potencial, e o Teorema de Green para transformar a integral definida no domínio numa integral na fronteira (no contorno). Depois aplicam-se os resultados tratados no Capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Tópicos sobre as equações integrais

Equação integral de Fredholm linear

A forma geral da *equação integral de Fredholm linear de segunda espécie* é dada por

$$\lambda u(x) - \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

com $\lambda \neq 0$, Ω um compacto do \mathbb{R}^n . Se funções $k(x, y)$ (chamada de *núcleo*) e $f(x)$ são conhecidas e $u(x)$ é a função incógnita.

Exemplo 1.1. *A seguinte equação*

$$u(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(y)}{1 + (x - y)^2} dy, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

chamada de equação integral de Love, é um exemplo de equação integral de Fredholm linear de segunda espécie.

Quando a função incógnita está presente apenas no integrando da equação, como em

$$\int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega, \lambda \neq 0$$

a chamamos *equação integral de Fredholm linear de primeira espécie*.

Equação integral de Volterra linear

A equação integral na forma

$$u(x) = \int_a^x k(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \geq a \quad (1.2)$$

é conhecida como *equação integral de Volterra linear de segunda espécie*.

Como no caso anterior, se a função incógnita $u(x)$ encontra-se somente no integrando, temos então o que se conhece por *equação integral de Volterra linear de primeira espécie*¹.

Um importante caso desse último tipo é a

Exemplo 1.2 (Equação integral de Abel).

$$\int_0^x \frac{H(x, y)u(y)}{(x^p - y^p)^\alpha} dy = f(x), \quad x > 0$$

sendo $0 < \alpha < 1$ e $p > 0$. Essa equação possui inúmeras formas de se obter a solução numérica devido à vasta aplicabilidade da mesma, o que levou muitas pessoas a estudarem.

Observe que a equação integral de Volterra é um caso particular da equação de Fredholm.

Agora, para o caso não linear temos que a *equação integral de Volterra não linear de segunda espécie* é dada por

$$u(x) = \int_a^x k(x, y, u(y))dy + f(x), \quad x \geq a. \quad (1.3)$$

As funções $k(x, y, u(y))$ e $f(x)$ são dadas e $u(x)$ é a função incógnita.

A equação integral de Volterra é a forma integral do problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias.

Se na equação na forma (1.3) tivermos a função incógnita apenas no integrando, como em

$$\int_a^x k(x, y, u(y))dy = f(x), \quad x \geq a, \quad (1.4)$$

¹Esse tipo de equação pode ser transformado numa equação integral de Volterra de segunda espécie, o que em muitos casos é mais prático.

então, teremos a *equação integral de Volterra não linear de primeira espécie*.

Para a equação integral de Fredholm, tanto de segunda como de primeira espécie, lineares, é análoga aos casos (1.3) e (1.4), respectivamente.

Equação integral de Urysohn

A equação integral de Fredholm não linear de segunda espécie

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, y, u(y)) = f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad a \leq x \leq b \quad (1.5)$$

é, também, chamada de *equação integral de Urysohn de segunda espécie*. Com $f \in C[a, b]$ e $k \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$.

Um interessante exemplo é a

Exemplo 1.3 (equação de Nekrasov's). *Seja*

$$u(x) - \lambda \int_0^\pi L(x, y) \frac{\text{sen}(u(y))}{1 + 3\lambda \int_0^y \text{sen}(u(t)) dt} dy = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

sendo

$$L(x, y) = \frac{1}{\pi} \log \frac{\text{sen}((t+y)/2)}{\text{sen}((t-y)/2)}.$$

Uma solução é a trivial, e são as soluções não triviais que são de interesse. Isso ocorre no estudo do perfil das ondas de água sobre os líquidos de profundidade; E a equação envolve questões interessantes de soluções que bifurcam.

Equação integral de contorno

Equações integrais de contorno apareceram para problemas em que é conhecida a forma integral da solução, como é o caso da Teoria do Potencial para a equação de Laplace. Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [10, p. 310].

Exemplo 1.4. *Seja Ω uma região limitada, não vazia, simplesmente conexa do \mathbb{R}^2 com $S = \partial\Omega$ suficientemente suave. Considere o problema de encontrar $u \in C(\bar{\Omega}) \cap$*

$C^2(\Omega)$ tal que

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$

$$u = g \text{ em } S$$

com $g \in C(S)$.

Da Teoria do Potencial sabemos que $u(x)$ pode ser representada como um *potencial de camada simples* dado por

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \ln|x-y| \frac{\partial u}{\partial \eta} dS - \int_S u \frac{\partial}{\partial \eta} \ln|x-y| dS, \quad x \in \Omega.$$

Equações integrais de contorno podem gerar equações integrais de Fredholm de primeira ou de segunda espécies, equações integrais singulares de Cauchy ou variações.

Equação integral singular de Cauchy

Seja S um contorno aberto ou fechado no plano complexo. A equação

$$g_1(z)u(z) + \frac{g_2(z)}{\pi i} \int_S \frac{u(y)}{y-z} dy + \int_S k(z,y)u(y)dy = f(z), \quad z \in S$$

é conhecida como *equação integral singular de Cauchy*. As funções a valores complexos g_1 , g_2 , f e k são dadas, e u é a função desconhecida. A função k é absolutamente integrável; e mais, de tal modo que o operador integral associado é um operador integral de Fredholm.

A primeira integral na equação é interpretada como a *integral do valor principal de Cauchy*:

$$\int_S \frac{u(y)}{y-z} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_\epsilon} \frac{u(y)}{y-z} dy$$

com $S_\epsilon = \{y \in S; |y-z| \geq \epsilon\}$. Equações integrais singulares de Cauchy ocorrem numa grande variedade de problemas físicos, especialmente em conexão com a solução de equações diferenciais parciais em \mathbb{R}^2 .

1.2 Tópicos de Análise Funcional

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes para análise da solvabilidade e regularidade das equações integrais. Também apresentaremos os resultados da Teoria do Potencial para equação de Laplace. Para maiores detalhes consulte [4, 8, 13]

O primeiro dos resultados que exibiremos nesta seção foi pioneiramente mostrado e utilizado por John Neumann (1903-1957), como no Exemplo 1.5, Neumann também o utilizou para mostrar a existência e unicidade de solução da equação integral de Fredholm de segunda espécie a fim de obter resultados acerca da equação de Laplace. Atualmente esse resultado é mais conhecido como

Teorema 1.1 (Teorema das séries geométricas). *Seja V um espaço de Banach, $T \in \mathcal{L}(V)$ (com $\mathcal{L}(V)$ o espaço dos operadores lineares definidos em V para V). Consideremos*

$$\|T\| \leq 1.$$

Então $I - T$ (sendo I o operador identidade definido em V), é bijetor em V , seu inverso é um operador linear limitado

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

e

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Demonstração: Defina a sequência em $\mathcal{L}(V)$ como

$$M_n = \sum_{i=0}^n T^i, \quad n \geq 0.$$

Para $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|M_{n+p} - M_n\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} T^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|T^i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|T\|^i \\ \|T\| \|M_{n+p} - M_n\| &\leq \|T\| \sum_{i=n+1}^{n+p} \|T\|^i = \sum_{i=n+1}^{n+p} \|T\|^{i+1}, \end{aligned}$$

subtraindo a segunda desigualdade da primeira, obtém-se

$$(1 - \|T\|) \|M_{n+p} - M_n\| \leq \|T\|^{n+1} - \|T\|^{n+p+1},$$

como $\|T\| \leq 1$, segue que

$$\|M_{n+p} - M_n\| \leq \frac{\|T\|^{n+1} (1 - \|T\|^p)}{1 - \|T\|} \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Assim,

$$\|M_{n+p} - M_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Logo $\{M_n\}$ é de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{L}(V)$, ou seja, existe $M \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$\|M_n - M\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Manipulando algebricamente, pela linearidade de T , temos:

$$(I - T)M_n = M_n(I - T) = I - T^{n+1},$$

fazendo $n \rightarrow \infty$, segue que

$$(I - T)M_n = M_n(I - T) = I,$$

portanto, $M = (I - T)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n T^i = \sum_{i=0}^{\infty} T^i$, isto é, M é linear e limitado. Segue que

$$\|M_n\| \leq \sum_{i=0}^n \|T\|^i \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$$

quando $n \rightarrow \infty$, obtemos então

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

■

Exemplo 1.5. Considere a equação integral de Fredholm linear de segunda espécie

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.6)$$

com $\lambda \neq 0$, $k(x, y)$ contínua para $x, y \in [a, b]$, e $f \in C[a, b]$.

Seja $V = C[a, b]$, com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Podemos reescrever (1.6) como

$$(\lambda I - K)u = f.$$

Podemos converter essa equação para a forma do Teorema das séries geométricas

$$(I - T)u = \frac{1}{\lambda}f, \quad T = \frac{1}{\lambda}K. \quad \text{Se } \|T\| = \frac{1}{|\lambda|} \|K\| < 1,$$

então existe $(I - T)^{-1}$ e, $\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$.

Equivalentemente se,

$$\|K\| = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x, y)| dy < |\lambda|, \quad \text{então } (\lambda I - K)^{-1} \text{ existe e}$$

$$\|(\lambda I - K)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|K\|}.$$

Desse modo, se $\|K\| < |\lambda|$, para algum $f \in C[a, b]$, a equação integral possui uma única solução $u \in C[a, b]$ e

$$\|u\|_\infty \leq \|(\lambda I - K)^{-1}\| \|f\|_\infty \leq \frac{\|f\|_\infty}{|\lambda| - \|K\|}.$$

■

Acabamos de ver um resultado fundamental na questão de existência e unicidade das equações integrais. Veremos agora, alguns outros resultados clássicos da Análise Funcional que serão úteis na análise de convergência e estabilidade de solução de tais equações.

Teorema 1.2 (Teorema da perturbação). *Sejam V e W espaços normados, com pelo menos um deles sendo completo. Considere que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ possui uma inversa limitada $T^{-1} : W \rightarrow V$. Seja $M \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que*

$$\|M - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Então $M : V \rightarrow W$ é uma bijeção, $M^{-1} \in \mathcal{L}(V, W)$ e

$$\|M^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\| \|T - M\|}.$$

Além disso,

$$\|T^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \|T - M\|}{1 - \|T^{-1}\| \|T - M\|}.$$

Para as soluções das equações $Tv_1 = w$ e $Mv_2 = w$, temos que

$$\|v_1 - v_2\| \leq \|M^{-1}\| \|(T - M)v_1\|.$$

Demonstração: Vamos escrever M como uma perturbação de T . Se W é completo, escrevemos

$$M = [I - (T - M)T^{-1}]T,$$

agora se V é completo, escrevemos

$$M = T[I - T^{-1}(T - M)].$$

Consideremos que W seja completo, o outro caso é análogo. O operador $(T - M)T^{-1} \in \mathcal{L}(W)$ satisfaz

$$\|(T - M)T^{-1}\| \leq \|T - M\| \|T^{-1}\| < 1.$$

Então, podemos aplicar o Teorema das séries geométricas 1.1, isto é, existe

$$[I - (T - M)T^{-1}]^{-1}$$

e

$$\|[I - (T - M)T^{-1}]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(T - M)T^{-1}\|} \leq \frac{1}{1 - \|T - M\| \|T^{-1}\|}.$$

Logo, M^{-1} existe e

$$M^{-1} = T^{-1}[I - (T - M)T^{-1}]^{-1},$$

com

$$\|M^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| \|[I - (T - M)T^{-1}]^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T - M\| \|T^{-1}\|}.$$

Para provar a próxima desigualdade escrevemos

$$M^{-1}(M - T)T^{-1} = (I - M^{-1}T)T^{-1} = T^{-1} - M^{-1}TT^{-1} = T^{-1} - M^{-1}$$

o que implica

$$\begin{aligned}\|T^{-1} - M^{-1}\| &\leq \|M^{-1}\| \|T - M\| \|T^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \|T - M\|}{1 - \|T^{-1}\| \|T - M\|}.\end{aligned}$$

Na última desigualdade, fazemos

$$v_1 - v_2 = (T^{-1} - M^{-1})w = M^{-1}(M - T)T^{-1}w = M^{-1}(M - T)v_1,$$

portanto,

$$\|v_1 - v_2\| = \|M^{-1}(M - T)v_1\| \leq \|M^{-1}\| \|(M - T)v_1\|.$$

■

Teorema 1.3 (Teorema da aplicação aberta). *Sejam V e W espaços de Banach e $T : V \rightarrow W$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Teorema 1.4 (Princípio da limitação uniforme). *Sejam V um espaço de Banach e W um espaço normado. Se $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(V, W)$ e para cada $v \in V$ existir $C_v < \infty$ tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(v)\| < C_v.$$

Então,

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

Teorema 1.5 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Sejam V e W espaços normados, com V de Banach. Sejam $T, T_n \in \mathcal{L}(V, W)$ e V_0 denso em V . Então, para termos $T_nv \rightarrow Tv$, para todo $v \in V$, é necessário e suficiente que:*

- (a) $T_nv \rightarrow Tv, \forall v \in V_0$; e
- (b) $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

Vamos enunciar e demonstrar o importante Teorema do ponto fixo de Banach, para tanto, devemos definir

Definição 1.1 (Contração). Dizemos que o operador $T : U \subset V \rightarrow V$ é uma contração, com constante de contração $\alpha \in [0, 1)$ se

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \alpha \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U$$

e Lipschitz contínua se existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\|T(u) - T(v)\| \leq L \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U.$$

Observação 1.1. As seguintes implicações são válidas para um operador T

$$\begin{aligned} \text{contração} &\Rightarrow \text{não expansibilidade} \\ &\Rightarrow \text{Lipschitz continuidade} \\ &\Rightarrow \text{continuidade.} \end{aligned}$$

Teorema 1.6 (Teorema do ponto fixo de Banach). Considere o subconjunto fechado $U \neq \emptyset$ do espaço de Banach V . Seja $T : U \rightarrow U$ uma contração em U . Então, são verdadeiros os seguintes resultados:

i) Existe um único $u \in U$ tal que

$$u = T(u).$$

ii) Para algum $u_0 \in U$, a sequência $\{u_n\} \subset U$ dada por $u_{n+1} = T(u_n)$, $n = 0, 1, \dots$, converge para u , isto é,

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração: Desde que $T : U \rightarrow U$, a sequência $\{u_n\}$ está bem definida. Usando o fato de T ser uma contração de constante de contração, digamos $\alpha \in [0, 1)$, temos

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\| \leq \dots \leq \alpha^n \|u_1 - u_0\|.$$

Então, para algum $m \geq n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\| &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \|u_{n+j+1} - u_{n+j}\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \alpha^{n+j} \|u_1 - u_0\| \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|u_1 - u_0\|. \end{aligned}$$

Desde que $\alpha \in [0, 1)$, $\|u_m - u_n\| \rightarrow 0$, quando $m, n \rightarrow \infty$. Assim, $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy; desde que U seja um subconjunto fechado do espaço de Banach V , segue que $\{u_n\}$ possui um limite $u \in U$. Tomando o limite de $u_{n+1} = T(u_n)$ vemos que $u = T(u)$ pela continuidade de T , isto é, u é ponto fixo de T .

Suponhamos $u_1, u_2 \in U$ dois pontos fixos de T . Então de $u_1 = T(u_1)$ e $u_2 = T(u_2)$ vem

$$u_1 - u_2 = T(u_1) - T(u_2).$$

Disso segue

$$\|u_1 - u_2\| = \|T(u_1) - T(u_2)\| \leq \alpha \|u_1 - u_2\|$$

o que implica $\|u_1 - u_2\| = 0$ porque $\alpha \in [0, 1)$. Portanto, o ponto fixo da contração T é único. ■

Corolário 1.1. *Considere o subconjunto fechado $U \neq \emptyset$ do espaço de Banach V . Seja $T : U \rightarrow U$ contínuo. Suponha que T^m é uma contração para algum m inteiro positivo. Então T possui um único ponto fixo em U , além disso*

$$u_{n+1} = T(u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

converge.

1.2.1 Operador projeção

Definição 1.2. *Seja V um espaço vetorial, V_1 e V_2 subespaços de V . Dizemos que V é soma direta de V_1 com V_2 e escrevemos $V = V_1 \oplus V_2$, se todo elemento $v \in V$*

possui uma representação única

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2. \quad (1.7)$$

Além disso, se V for um espaço com produto interno, e $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ para qualquer $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$, então V é chamada soma direta ortogonal de V_1 e V_2 .

Proposição 1.1. *Seja V um espaço vetorial. Então $V = V_1 \oplus V_2$ se, e somente se, existe um operador linear $P : V \rightarrow V$ com $P^2 = P$, tal que a decomposição (1.7), $v_1 = Pv$, $v_2 = (I - P)v$, além disso, $V_1 = P(V)$ e $V_2 = (I - P)(V)$.*

Definição 1.3. *Seja V um espaço de Banach. Um operador $P \in \mathcal{L}(V)$ com a propriedade $P^2 = P$ é chamado operador projeção.*

Se V é um espaço de Hilbert, P um operador projeção e $V = P(V) \oplus (I - P)(V)$ é uma soma direta ortogonal, então chamamos P de operador projeção ortogonal.

Exemplo 1.6 (Interpolação de Lagrange). *Seja $V = C[a, b]$, $V_1 = \mathbb{P}_n$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n , seja $\Delta : a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Para $v \in V$, definimos $Pv \in \mathbb{P}_n$ a interpolação de Lagrange de v correspondente à partição Δ , ou seja, Pv satisfaz a condição de interpolação: $Pv(x_i) = v(x_i)$, $i = 1, \dots, n+1$. Sabemos que Pv é unicamente determinado².*

Explicitamente

$$Pv(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) v(x_i),$$

que usa a fórmula de Lagrange para interpolação.

A prova do seguinte teorema pode ser encontrada em [18, cap. 13]:

Teorema 1.7. *O operador interpolador do Exemplo 1.6 é um operador projeção.*

Exemplo 1.7. *Seja V_n um subespaço n -dimensional de um espaço de Hilbert V . Suponha $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ uma base ortonormal de V_n . Para todo $v \in V$, a fórmula*

$$Pv = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, v \rangle \varphi_j$$

define um operador projeção ortogonal de V para V_n .

²Cf. K. Atkinson, [4], cap. 3.

Proposição 1.2. *Sejam V_1 um subespaço fechado do espaço de Hilbert V e V_1^\perp seu complemento ortogonal. Seja $P : V \rightarrow V_1$, então:*

- (a) *O operador é uma projeção ortogonal se, e somente se, é uma projeção auto-adjunta.*
- (b) *Cada projeção ortogonal P é contínua, $\|P\| \leq 1$, e $\|P\| = 1$ para $P \neq 0$.*
- (c) $V = V_1 \oplus V_1^\perp$.
- (d) *Existe exatamente um operador projeção ortogonal P de V para V_1 . Temos que*

$$\|v - Pv\| = \inf_{w \in V_1} \|v - w\|, \quad \forall v \in V.$$

O operador $I - P$ é o operador projeção ortogonal para V_1^\perp .

- (e) *Se $P : V \rightarrow V$ é uma projeção ortogonal, então $P(V)$ é um subespaço fechado de V , e temos a soma direta ortogonal como*

$$V = P(V) \oplus (I - P)(V).$$

1.2.2 Operador compacto

Quando V é um espaço de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ é linear, a equação $Tv = w$ possui uma teoria de solvabilidade bem desenvolvida. Para estendermos os resultados para espaços de dimensão infinita, introduziremos o conceito de um *operador compacto*.

Vamos considerar equações na seguinte forma

$$v - Kv = f.$$

A principal ideia é que operadores compactos, num certo sentido, apresentem propriedades análogas a dos operadores com imagem de dimensão finita.

Definição 1.4. *Sejam V e W espaços normados, e seja $K : V \rightarrow W$ linear. Dizemos que K é compacto se o conjunto $\{Kv; \|v\| \leq 1\}$ possui fecho compacto em W . Isso*

é equivalente a dizer que para toda sequência limitada $\{v_n\} \subset V$, a sequência $\{Kv_n\}$ possui subsequência convergente em W . Operadores compactos também são chamados de operadores completamente contínuos.

Exemplo 1.8. Sejam Ω fechado e limitado em \mathbb{R}^d e o espaço $C(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Dada a função $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$Kv(x) = \int_{\Omega} k(x, y)v(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad v \in C(\Omega).$$

Queremos obter condições que garantam K ser limitado e compacto.

Assumindo $k(x, y)$ integrável como função de y para todo $x \in \Omega$, suponha que

(i) $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ com

$$\omega(h) = \sup_{\substack{x, z \in \Omega \\ \|x-z\| \leq h}} \int_{\Omega} |k(x, y) - k(z, y)|dy.$$

(ii) $\sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |k(x, y)|dy < \infty$.

Se $v(y)$ é limitada e integrável então $Kv(x)$ é contínua. De fato, por (i) tem-se

$$\begin{aligned} |Kv(x) - Kv(y)| &\leq \left| \int_{\Omega} k(x, z)v(z)dz - \int_{\Omega} k(y, z)v(z)dz \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |k(x, z) - k(y, z)||v(z)|dz \\ &\leq \max_{z \in \Omega} |v(z)| \int_{\Omega} |k(x, z) - k(y, z)|dz \\ &\leq \|v\|_\infty \sup_{\substack{x, z \in \Omega \\ \|x-z\| \leq \|x-y\|}} \int_{\Omega} |k(x, z) - k(y, z)|dz \\ &= \|v\|_\infty \omega(\|x - y\|). \end{aligned}$$

K é um operador limitado. De fato, por (ii) tem-se

$$\|K\| = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |k(x, y)|dy.$$

Para mostrar a compacidade de K é usado o Teorema de Arzelà-Ascoli. Considere o conjunto

$$A = \{Kv; v \in C(\Omega) \text{ e } \|v\|_\infty \leq 1\}.$$

O conjunto A é uniformemente limitado, pois

$$\|Kv\|_\infty \leq \|K\| \|v\|_\infty \leq \|K\|, \quad v \in A.$$

Além disso, A é equicontínuo. Portanto, A possui fecho compacto em $C(\Omega)$, e podemos concluir que K é um operador compacto. ■

Definição 1.5. Sejam V e W espaços vetoriais. O operador $K : V \rightarrow W$ é finito, se $K(V)$ é de dimensão finita.

Proposição 1.3. Sejam V e W espaços normados e seja $K : V \rightarrow W$ um operador limitado e de posto finito. Então K é compacto.

Demonstração: Se $K(V)$ é de dimensão finita em W que é normado então é completo. O conjunto

$$A = \{Kv; \|v\| \leq 1\},$$

é limitado, pois

$$\|Kv\| \leq \|K\| \|v\| \leq \|K\|, \quad \forall v \in A.$$

Como $\overline{A} \subseteq K(V)$ tem dimensão finita e subconjuntos fechados e limitados em espaços de dimensão finita são compactos, podemos concluir que K é compacto. ■

Exemplo 1.9. Seja $V = W = C[a, b]$ com $\|\cdot\|_\infty$. Considere a função núcleo como

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \alpha_i(y),$$

com cada β_i contínua em $[a, b]$ e cada α_i módulo quadrado integrável no mesmo intervalo. Logo, o operador associado é finito, a saber

$$Kv(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \int_a^b \alpha_i(y) v(y) dy.$$

Disso, $Kv \in C[a, b]$ e $K(V) \subset \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ que é de dimensão finita. ■

As funções núcleo da forma descrita no Exemplo 1.9 são chamadas de *degeneradas*.

Proposição 1.4. *Sejam $K \in \mathcal{L}(U, V)$ e $L \in \mathcal{L}(V, W)$ com pelo menos um sendo compacto. Então LK é um operador compacto de U para W .*

Demonstração: Suponhamos L compacto. Seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em U . Pela continuidade de K , segue que $\{Ku_n\}$ é uma sequência limitada. Agora, usando o fato de L ser compacto, segue que a sequência $\{L(Ku_n)\} = \{LKu_n\}$ possui uma subsequência convergente, provando assim a compacidade de LK . ■

Proposição 1.5. *Sejam V e W espaços normados, com W completo. Se $\{K_n\} \subset \mathcal{L}(V, W)$ é uma sequência de operadores compactos tais que $K_n \rightarrow K$ em $\mathcal{L}(V, W)$. Então K é compacto.*

Demonstração: Desde que K_1 seja compacto, $\{u_n\}$ uma sequência limitada de V , então esta possui uma subsequência $\{u_{1,n}\}$ tal que $K_1 u_{1,n}$ é de Cauchy em W . Do mesmo modo $\{u_{1,n}\}$ possui uma subsequência $\{u_{2,n}\}$ tal que $K_2 u_{2,n}$ também é de Cauchy, já que K_2 é compacto. Prosseguindo dessa maneira conseguimos uma “sequência diagonal” $\{v_n\} = \{u_{nn}\} \subset \{u_n\}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que $\{K_m v_n\}$ é Cauchy. Por hipótese temos que $\{u_n\}$ é limitada, digamos $\|u_n\| \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $\|v_n\| \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, como $\|K_n - K\| \rightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|K_{n_0} - K\| < \frac{\epsilon}{3c}$. Como $\{K_{n_0} v_n\}$ é de Cauchy, existe um $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i, j > t_0$ implica $\|K_{n_0} v_i - K_{n_0} v_j\| < \frac{\epsilon}{3}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|Kv_i - Kv_j\| &= \|Kv_i - K_{n_0}v_j + K_{n_0}v_j - Kv_j\| \\
 &\leq \|Kv_i - K_{n_0}v_j\| + \|K_{n_0}v_j - Kv_j\| \\
 &\leq \|Kv_i - K_{n_0}v_i + K_{n_0}v_i - K_{n_0}v_j\| + \|K_{n_0}v_j - Kv_j\| \\
 &\leq \|Kv_i - K_{n_0}v_i\| + \|K_{n_0}v_i - K_{n_0}v_j\| + \|K_{n_0}v_j - Kv_j\| \\
 &< \frac{\epsilon}{3c} \cdot c + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3c} \cdot c = \epsilon.
 \end{aligned}$$

Isso mostra que $\{Kv_n\}$ é de Cauchy em W que é completo. Isso caracteriza K como operador compacto. ■

Vamos enunciar e demonstrar em seguida um dos mais importantes resultados da teoria de solvabilidade de equações integrais.

Para simplificar a notação, para o escalar λ e o operador $K : V \rightarrow V$, usaremos $\lambda - K : V \rightarrow V$ no lugar de $\lambda I - K$, sendo $I : V \rightarrow V$ o operador identidade.

Teorema 1.8 (Alternativa de Fredholm). *Seja V um espaço de Banach, e seja $K : V \rightarrow V$ um compacto. Então a equação $(\lambda - K)u = f$, $\lambda \neq 0$, possui uma única solução $u \in V$ para algum $f \in V$ se, e somente se, a equação homogênea $(\lambda - K)v = 0$ possui apenas a solução trivial $v = 0$. Nesse caso, o operador $\lambda - K : V \rightarrow V$ possui uma inversa limitada $(\lambda - K)^{-1}$.*

Demonstração: O Teorema é válido para qualquer operador K compacto, entretanto faremos a demonstração apenas³ para o caso em que K é limite de uma sequência de operadores cujas imagens são de dimensão finita. Lembre-se que esse resultado é uma generalização do seguinte resultado padrão para espaços V de dimensão finita. Para uma matriz A de ordem n , com $V = \mathbb{R}^n$ ou $V = \mathbb{C}^n$, o sistema linear $Au = w$ possui uma única solução $u \in V$ para algum $w \in V$ se, e somente se, o sistema linear homogêneo $Az = 0$ possui apenas a solução nula $z = 0$.

(a) Começemos com o caso em que K é limitado e possui posto finito. Seja $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ base de $K(V)$. Reescrevemos a equação $(\lambda - K)u = f$ como

$$u = \frac{1}{\lambda}(f + Ku). \quad (1.8)$$

Se essa equação possui única solução $u \in V$, então

$$u = \frac{1}{\lambda}(f + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n) \quad (1.9)$$

para únicas e determinadas constantes c_1, \dots, c_n .

³Para uma prova geral veja Kress [18].

Substituindo (1.9) na equação $(\lambda - K)u = f$, temos

$$\lambda \left(\frac{1}{\lambda} f + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) - \frac{1}{\lambda} K f - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n c_j K \varphi_j = f.$$

Multiplicando por λ e simplificando obtemos

$$\lambda \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i - \sum_{j=1}^n c_j K \varphi_j = K f. \quad (1.10)$$

Usando a base $\{\varphi_i\}$ para $K(V)$, escrevemos

$$K f = \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi_i$$

e

$$K \varphi_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \varphi_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Os coeficientes $\{\gamma_i\}$ e $\{a_{ij}\}$ são unicamente determinados. Substituindo essa expressão em (1.10) e arrumando os termos, ficamos com

$$\sum_{i=1}^n \left(\lambda c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \right) \varphi_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi_i.$$

Porque a base $\{\varphi_i\}$ é linearmente independente, obtemos o sistema linear

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = \gamma_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.11)$$

Mostraremos agora que se u é uma solução de $(\lambda - K)u = f$, então $(c_1, \dots, c_n)^T$ é uma solução de (1.11). Além disso, supondo u_1 e u_2 soluções distintas de $(\lambda - K)u = f$, segue que

$$K u_1 = \lambda u_1 - f \quad \text{e} \quad K u_2 = \lambda u_2 - f, \quad \lambda \neq 0,$$

são também distintos em $K(V)$, assim sendo os vetores de coordenadas $(c_1^{(1)}, \dots, c_n^{(1)})^T$ e $(c_1^{(2)}, \dots, c_n^{(2)})^T$,

$$K \varphi_i = \sum_{j=1}^n c_j^{(i)} \varphi_j, \quad i \in \{1, 2\}$$

também são distintos.

Para a recíproca, suponhamos que $(c_1, \dots, c_n)^T$ é uma solução de (1.11). Defina o vetor $u \in V$ usando (1.9), e então verifique que se u satisfaz a equação integral:

$$\begin{aligned}
(\lambda - K)u &= \lambda \left(\frac{1}{\lambda} f + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) - \frac{1}{\lambda} Kf - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n c_j K\varphi_j \\
&= f + \frac{1}{\lambda} \left(\lambda \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i - Kf - \sum_{j=1}^n c_j K\varphi_j \right) \\
&= f + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n \lambda c_i \varphi_i - \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi_i - \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \varphi_i \right) \\
&= f + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\lambda c_i - \gamma_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \right)}_{=0, i=1, \dots, n} \varphi_i \\
&= f.
\end{aligned}$$

Analogamente, vetores distintos $(c_1, \dots, c_n)^T$ conduzem a soluções u distintas dadas por (1.9), porque a base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é linearmente independente. Isso completa a prova da afirmação acima. Observe que, temos a equivalência entre (1.9) e (1.11).

Agora consideremos o teorema da Alternativa de Fredholm para $(\lambda - K)u = f$ com o operador K de posto finito. Suponhamos

$$\lambda - K : V \rightarrow V$$

bijetor. Então, trivialmente, o espaço núcleo do operador é $\mathcal{N}(\lambda - K) = \{0\}$. Para a recíproca, assumamos que $(\lambda - K)v = 0$ possui apenas a solução nula $v = 0$. Observe que queremos mostrar que $(\lambda - K)u = f$ possui uma única solução, dado qualquer $f \in V$.

Considere o sistema linear associado (1.11). Pode-se mostrar que esse sistema possui uma única solução para qualquer lado direito $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ mostrando que o sistema linear homogêneo possui apenas a solução nula. Este último é feito por meio da equivalência do sistema linear homogêneo para a equação homogênea $(\lambda - K)v = 0$, a qual implica $v = 0$. Entretanto, desde que (1.11) possua uma única solução, também terá $(\lambda - K)u = f$, e isso é dado por (1.9).

Queremos mostrar também que $(\lambda - K)^{-1}$ é limitado. Isso pode ser visto diretamente como consequência de que K é a priori limitado e de posto finito; porém, mais simplesmente basta citar o Teorema da aplicação aberta 1.3.

(b) Suponhamos que $\|K - K_n\| \rightarrow 0$, com K_n de posto finito e limitado. Reescrevemos $(\lambda - K)u = f$ como

$$[\lambda - (K - K_n)]u = f + K_n u, \quad n \geq 1. \quad (1.12)$$

Escolha um índice $m > 0$ para o qual

$$\|K - K_m\| < |\lambda| \quad (1.13)$$

e fixemos esse valor. Pelo Teorema das séries geométricas 1.1,

$$Q_m \equiv [\lambda - (K - K_m)]^{-1}$$

existe e é limitado, com

$$\|Q_m\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|K - K_m\|}.$$

A equação (1.12) com $n = m$ pode ser escrito de maneira equivalente

$$u - Q_m K_m u = Q_m f. \quad (1.14)$$

O operador $Q_m K_m$ é limitado e de posto finito. A limitação segue da limitação de Q_m e K_m . Para mostrar que é de posto finito, seja $K_m(V) = \text{span}\{\varphi_1, \dots, u_m\}$. Então

$$K_m(V) = \text{span}\{Q_m \varphi_1, \dots, Q_m u_m\}$$

é um espaço de dimensão finita.

A equação (1.14) é tal que podemos aplicar a parte (a) desta prova. Supondo $(\lambda - K)v = 0$ implica $v = 0$. Pela equivalência à última equação, temos que

$$(I - Q_m K_m)v = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Mas da parte (a), significa que $(I - Q_m K_m)u = w$ possui única solução u para todo $w \in V$, e em particular para $w = Q_m f$ como em (1.14). Da equivalência entre (1.14) e $(\lambda - K)u = f$, temos que o último é unicamente solucionável para qualquer $f \in V$. A limitação de $(\lambda - K)^{-1}$ segue da parte (a) e da limitação de Q_m . Alternativamente, o Teorema 1.3 pode ser citado, como antes na parte (a). ■

1.3 Tópicos da Teoria do Potencial

A teoria para obtenção das soluções clássicas da equação de Laplace é chamada Teoria do Potencial. Os métodos clássicos para obtenção da solução explícita do problema de fronteira com condições de Dirichlet ou Neumann para equação de Laplace são o Método de separação de variáveis e método da transformada de Fourier. Estes métodos são excelentes técnicas para solucionar problemas cuja geometria do domínio é muito simples. Para tratar problemas com geometrias mais complicadas usam-se as identidades de Green para obter uma representação integral da solução, chamada *potencial de camada simples ou potencial de camada dupla*. Nesta abordagem é muito interessante, do ponto de vista numérico, pois permite reformular o problema de fronteira que envolve a equação de Laplace como um *problema que envolve uma integral de contorno*.

Nesta seção apresentaremos os resultados da Teoria do Potencial que serão úteis para a melhor compreensão das equações de contorno que serão tratadas no Capítulo 5. Para maiores detalhes sobre a Teoria do Potencial consulte [10, 22].

1.3.1 Identidades de Green

Primeiro, descreveremos as notações adequadas que serão usadas nesta seção e no Capítulo 5.

Sejam Ω um domínio, $S = \partial\Omega$ e $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. Considere S suficientemente suave. Vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n = 2$ ou $n = 3$.

Na integrais, vamos representar dx ou dy como elementos de volume e dS como elemento de área (para o caso $n = 3$; analogamente para o caso $n = 2$). A *normal unitária exterior* à fronteira S no ponto P de S será representada por $\eta = \eta_P$.

Teorema 1.9 (Teorema da divergência). *Considere $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Então*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F \, dx = - \int_S F \cdot \eta \, dS. \quad (1.15)$$

Domínios para os quais vale o Teorema da divergência são chamados *domínios normais*. Exemplos de domínios normais são bolas, elipsoides sólidos, cones, paralelepípedos e regiões limitadas por um número finito de superfícies (ou curvas para o caso $n = 2$) suaves por partes.

Identities of Green

Supondo $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ e fazendo $F = v \cdot \nabla u$ no Teorema 1.9 obtemos

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = - \int_S v \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS, \quad (1.16)$$

conhecida como *Primeira identidade de Green*.

Fazendo $F = v \cdot \nabla u - u \cdot \nabla v$ obtemos

$$\int_{\Omega} [v \Delta u - u \Delta v] \, dx = \int_{\Omega} \left[v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \, dS, \quad (1.17)$$

conhecida como *Segunda identidade de Green*.

Fazendo $F = \nabla u$ obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_S \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS \quad (1.18)$$

conhecida como *Terceira identidade de Green*.

As identidades de Green são resultados fundamentais da Teoria do Potencial. Em particular, elas implicam em teoremas de unicidade para três problemas de fronteira da Teoria do Potencial e permitem obter-se a representação integral de suas soluções. É importante destacar que as identidades de Green valem para funções u e w com menos regularidade.

No que segue, usaremos as duas primeiras identidades de Green para obter a representação integral da solução da equação de Laplace com condições de Dirichlet e Neumann.

1.3.2 Equação de Laplace em domínios limitados

O problema de Dirichlet: Encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= f \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.19}$$

O problema de Neumann: Encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= f \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.20}$$

O seguinte resultado garante existência e unicidade de solução dos problemas acima, sua demonstração pode ser encontrada em [10, 21].

Teorema 1.10. *Sejam Ω um domínio limitado e normal com S suficientemente suave e $f \in C(S)$. Então,*

- (a) *O problema de Dirichlet tem uma única solução.*
- (b) *O problema de Neumann tem uma única solução, a menos de uma constante, desde que*

$$\int_S f dS = 0. \tag{1.21}$$

Sabemos que a equação de Laplace é invariante por translação, dilatação e rotação. Por causa da simetria, a equação de Laplace tem soluções $u(x)$ que são invariantes por rotação em torno de y , ou seja, tem o mesmo valor sobre todos os pontos x cuja distância a y é a mesma. Logo, a solução é da forma $u(x) = \phi(r)$ com $r = |x - y| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas radiais e resolvendo a EDO resultante obtemos

$$\phi(r) = \begin{cases} c_3 \ln r + c_4 & \text{se } n = 2, \\ c_3 r^{2-n} + c_4 & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Assim, a solução fundamental da equação de Laplace é dada por

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - y| & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x - y|^{2-n} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

com ω_n o volume da bola unitária do \mathbb{R}^n .

Note que Φ é harmônica em x ou em y para $x \neq y$ e tem uma singularidade em $x = y$.

Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e y um ponto em Ω , queremos aplicar a identidade de Green (1.17) com $v = \Phi(r)$, $x \in \Omega$ fixo e a integração com relação a y . Porém, a segunda identidade de Green não pode ser aplicada diretamente, pois $\Phi(r)$ tem uma singularidade para $y = x$. Para evitarmos a singularidade, vamos retirar de Ω uma pequena bola $\overline{B}(x, \epsilon)$ de centro x e raio $\epsilon > 0$ e então aplicar (1.17) no domínio $\Omega - \overline{B}(x, \epsilon)$ com fronteira $S_\epsilon = S \cup \partial B$.

Deste modo, aplicando a segunda identidade de Green, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ e efetuando vários cálculos obtemos *fórmula de representação de Green* da solução da equação de Laplace dada por

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln|x-y| \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial}{\partial \eta} \ln|x-y| \right] dS, \quad x \in \Omega, \quad y \in S. \quad (1.22)$$

Observe que (1.22) é uma representação de $u(x)$, sobre Ω , em termos dos valores de $u(x)$ na fronteira S e da derivada normal à S .

Agora, podemos tomar limites em (1.22) de modo que x aproxime-se de um ponto z da fronteira S . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow z} \int_S \ln|x-y| \frac{\partial u}{\partial \eta} dS &= \int_S \ln|z-y| \frac{\partial u}{\partial \eta} dS, \\ \lim_{x \rightarrow z} \int_S u \frac{\partial}{\partial \eta} \ln|x-y| dS &= -\pi u(z) + \int_S u \frac{\partial}{\partial \eta} \ln|x-z| dS. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Efetuada alguns cálculos e usando (1.23), (1.22) torna-se

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_S \ln|x-z| \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial}{\partial \eta} \ln|x-z| dS. \quad (1.24)$$

A fórmula (1.24) é um exemplo de equação integral de contorno.

1.3.3 Equação de Laplace em domínios ilimitados

Nesta seção apresentaremos as principais ideias e resultados da Equação de Laplace em domínios ilimitados. Para isto, dizemos que Ω_e é um *domínio exterior* se

$\Omega_e = \overline{\Omega}^c$ com Ω um domínio limitado e $\overline{\Omega}^c$ o complementar de Ω . Por toda esta seção assumiremos que $\vec{0} \in \Omega_e$.

As três identidades de Green são resultados importantes no tratamento da equação de Laplace em domínios exteriores. Dizemos que um domínio exterior Ω_e é um *domínio normal* se Ω é um domínio normal. Além disso, é importante também sabermos o *comportamento da solução no infinito*. Para tais domínios temos o seguinte resultado:

Teorema 1.11. *Seja Ω_e um domínio normal exterior. Suponha que $u, w \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e})$ tal que*

$$u, w = O(|x|^{-1}) \quad e \quad \nabla u, \nabla w = O(|x|^{-2}) \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty.$$

Então, são verdadeiras as identidades de Green (1.16), (1.17) e (1.18).

Lembrando que $v = O(|x|^{-p})$ quando $|x| \rightarrow \infty$ significa que existem constantes M e m tais que

$$|v(x)| \leq M |x|^{-p} \quad \text{para } |x| \geq m.$$

Seja $u(x)$ uma função harmônica (solução da equação de Laplace) no domínio Ω_e . Para estudar o comportamento de $u(x)$ no infinito usaremos a *Transformada de Kelvin*, que relaciona os valores da função harmônica $u(x)$ para $|x|$ suficientemente grande com valores de uma função harmônica auxiliar $v(y)$ para $|y|$ próximo de zero. A transformada é baseada na *inversão com relação à esfera*.

Seja x um ponto arbitrário fora da esfera $\partial B_R(0)$. Vamos transformar x no ponto y na esfera, colinear com a origem O e o ponto x é tal que $|x||y| = R^2$. Claramente, $y = R^2 \frac{x}{|x|^2}$ e a transformada inversa é dada por $x = R^2 \frac{y}{|y|^2}$.

Observe que, $y = R^2 \frac{x}{|x|^2}$ é uma transformação bijetora do domínio $|x| > R$ no domínio $0 < |y| < R$. Além disso, $|y| \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Infelizmente, pontos no infinito são transformados em pontos perto da origem.

Sejam $u(x)$ uma função harmônica no domínio exterior Ω_e e $R > 0$ fixo tal que $\Omega \subset B_R(0)$. Para $x \in \Omega_e$ seja $y = R^2 \frac{x}{|x|^2}$ a sua inversão em $\partial B_R(0)$.

Para o caso $n = 2$, consideremos x nas coordenadas polares $(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ e y nas coordenadas polares $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Então, $r \rho = R^2$. A transformada de Kelvin de $u = u(x)$ para $|x| \geq R$ é

$$v = v(y) = \frac{R}{r} u\left(\frac{R^2}{r}, \theta\right), \quad 0 < |y| \leq R. \quad (1.25)$$

Fazendo os cálculos, podemos mostrar que

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4 \Delta v = \Delta u. \quad (1.26)$$

Para o caso $n = 3$, consideremos x nas coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) e y nas coordenadas polares (r, θ, ϕ) . Então, $r \rho = R^2$. A transformada de Kelvin de $u = u(x)$ para $|x| \geq R$ é

$$v = v(y) = \frac{R}{r} u\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \phi\right), \quad 0 < |y| \leq R. \quad (1.27)$$

Fazendo os cálculos, podemos mostrar que

$$\left(\frac{r}{R}\right)^5 \Delta v = \Delta u. \quad (1.28)$$

Como u é harmônica para $|x| > R$ então v é harmônica para $0 < |y| < R$. Analogamente, como u é contínua em $|x| = R$, sua transformada v é contínua em $|y| = R$. Além disso, como $u(x) = r v(y)/R$, temos que o comportamento de u para $|x|$ suficientemente grande é dado em termos do comportamento de v para $|y|$ perto de zero.

Por outro lado, sabemos que para termos unicidade da solução precisamos controlar o comportamento de u no infinito. Assim, vamos assumir que $u(x)$ *tende a zero uniformemente* quando $|x| \rightarrow \infty$. Isto significa que existe uma função $\mu(\rho)$ tal que $\mu(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow +\infty$ e $|u(x)| \leq \mu(|x|)$. Assumindo esta condição, podemos definir a transformada de Kelvin $v(y)$ em $y = 0$ de modo que v é harmônica em toda a bola $|y| < R$.

Agora, podemos formular os problemas em domínio exterior para a Equação de Laplace.

O problema de Dirichlet exterior. Sejam Ω_e um domínio exterior e $f \in C(S)$. Queremos encontrar $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega_e})$ que satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 & x \in \Omega_e, \\ u(x) &= f(x) & x \in S \end{aligned} \tag{1.29}$$

e tal que $u(x)$ tende uniformemente a zero quando $|x| \rightarrow \infty$.

O problema de Neumann exterior. Sejam Ω_e um domínio exterior e $f \in C(S)$. Queremos encontrar $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e})$ que satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 & x \in \Omega_e, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \eta} &= f(x) & x \in S \end{aligned} \tag{1.30}$$

e tal que $u(x)$ tende uniformemente a zero quando $|x| \rightarrow \infty$.

Teorema 1.12. *Seja Ω_e um domínio exterior com fronteira S suficientemente suave. Então, os problemas de Dirichlet exterior e problema de Neumann exterior tem uma única solução, respectivamente.*

Fórmula de representação de Green da solução em regiões exteriores

Assumindo que

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \nabla u = O(|x|^{-2}) \quad \text{e} \quad \Delta u = O(|x|^{-3}) \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty$$

temos que as representações (1.22) e (1.24) valem para domínios exteriores.

Capítulo 2

Aspectos Teóricos das Equações Integrais

Neste capítulo, provaremos resultados de existência e unicidade da solução de uma classe de equações integrais. Incluímos a equação integral de Volterra por sua importância histórica. O principal resultado teórico é o Teorema de contração de Banach.

2.1 Equação integral de Fredholm

Teorema 2.1. *Considere a equação integral não linear*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y, u(y)) dy \quad (2.1)$$

tal que a função núcleo satisfaz a seguinte hipótese: existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$|k(x, y, z_1) - k(x, y, z_2)| \leq \beta |z_1 - z_2|.$$

Se $f \in C([a, b])$ e $|\lambda| \leq \frac{1}{\beta(b-a)}$ então (2.1) tem uma única solução em $C([a, b])$.

Demonstração: Consideremos a equação de operadores

$$Tu = f + \lambda Ku$$

com K o operador integral dado em (2.1). Então,

$$\begin{aligned} |Tu_1(x) - Tu_2(x)| &\leq |\lambda| \int_a^b |k(x, y, u_1(y)) - k(x, y, u_2(y))| dy \\ &\leq |\lambda| \int_a^b \beta |u_1(y) - u_2(y)| dy \\ &\leq |\lambda| \beta (b - a) \|u_1 - u_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_\infty \leq |\lambda| \beta (b - a) \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Portanto, se $|\lambda| \leq \frac{1}{\beta(b-a)}$ temos que T é um operador contração e, pelo Teorema 1.6, tem um único ponto fixo u em $C([a, b])$. ■

Note que ponto fixo u satisfaz $u = Tu$, o que implica $u = f + \lambda Ku$. Além disso, as sucessivas aproximações $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ da solução são dadas por

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y, u_n(y)) dy \quad (2.2)$$

com u_1 qualquer função contínua.

Ressaltamos que o método das sucessivas aproximações só poderá ser aplicado na equação (2.1) para $|\lambda|$ suficientemente pequeno.

Observação 2.1. *Observe que temos a equação linear (1.6) quando $k(x, y, u(y))$ em (2.1) é da forma $k(x, y, u(y)) = k(x, y)u(y)$.*

2.2 Equação integral de Volterra

Teorema 2.2. *Sejam $f \in C([0, 1])$ e $k(x, y) \in C([0, 1]) \times C([0, 1])$. Então, a equação*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, y)u(y) dy, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \quad (2.3)$$

possui uma única solução $u(x)$, para toda constante λ .

Demonstração: Consideremos o operador

$$Tu = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, y)u(y) dy.$$

Para mostrar que T tem um único ponto fixo vamos usar o Corolário 1.1, ou seja, vamos mostrar que T^m , para algum $m \geq 1$, é um operador contração. Observe que

$$T^m u = f + \lambda K f + \dots + \lambda^{m-1} K^{m-1} f + \lambda^m K^m u$$

com

$$K^m u = \int_0^x k_m(x, y) u(y) dy,$$

também que

$$\|T^m u_1 - T^m u_2\| = |\lambda|^m \left\| \int_0^x k_m(x, y) (u_1(y) - u_2(y)) dy \right\|.$$

Para determinarmos k_m , façamos

$$\begin{aligned} k_1(x, y) &= k(x, y) \\ k_m(x, y) &= \int_y^x k(x, z) k_{m-1}(z, y) dz, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Por hipótese temos que $k(x, y)$ é contínua num compacto, e logo, uniformemente limitada, ou seja, existe uma constante $M > 0$ tal que $|k(x, y)| \leq M$. Vamos provar, por indução, que

$$|k_m(x, y)| \leq \frac{M^m (x - y)^{m-1}}{(m - 1)!}, \quad 0 \leq y \leq x.$$

Para $m = 1$ obviamente vale. Por hipótese de indução é verdadeira para m , então

$$\begin{aligned} |k_{m+1}(x, y)| &\leq \int_y^x |k(x, z)| |k_m(z, y)| dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{(m - 1)!} \int_y^x (z - y)^{m-1} dz \\ &= \frac{M^{m+1} (x - y)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|T^m u_1 - T^m u_2\| &\leq \frac{|\lambda|^m M^m}{(m - 1)!} \left\| \int_0^x (u_1(y) - u_2(y)) dy \right\| \\ &\leq \frac{|\lambda|^m M^m}{(m - 1)!} \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Para m suficientemente grande

$$\frac{|\lambda|^m M^m}{(m - 1)!} < 1.$$

Logo, T^m é um operador contração, e portanto (2.3) possui uma única solução. ■

Note que nesta prova foi usado $[a, b] = [0, 1]$, porém não há perda de generalidade, isto é, o resultado é válido para $[a, b]$ arbitrário. Para detalhes e outros resultados consulte [12, cap. 2].

Quando $k(x, y, u(y)) = k(x, y)u(y)$ temos a equação integral de Volterra linear, no próximo resultado trataremos o caso não linear.

Teorema 2.3. *Sejam $f \in C[a, b]$ e $k(x, y, z) \in C([a, b]) \times C([a, b]) \times \mathbb{R}$. Suponha que*

$$|k(x, y, z_1) - k(x, y, z_2)| \leq M|z_1 - z_2|, \quad a \leq y \leq x \leq b, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

para alguma constante M . Então a equação integral de Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y, u(y)) dy \quad (2.4)$$

tem uma única solução $u \in C([a, b])$ para qualquer constante λ .

Demonstração: Definimos o operador não linear

$$T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]), \quad Tu(x) \equiv f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y, u(y)) dy.$$

Mostraremos que para m suficientemente grande, o operador T^m é um operador contração em $C[a, b]$. Assim, para $u, v \in C[a, b]$ tem-se

$$Tu(x) - Tv(x) = \lambda \int_a^x [k(x, y, u(y)) - k(x, y, v(y))] dy.$$

Então

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leq \lambda M \int_a^x |u(y) - v(y)| dy \quad (2.5)$$

e

$$|Tu(x) - Tv(x)| \leq \lambda M \|u - v\|_\infty (x - a).$$

Assim,

$$T^2u(x) - T^2v(x) = \lambda \int_a^x [k(x, y, Tu(y)) - k(x, y, Tv(y))] dy,$$

e, logo,

$$\begin{aligned} |T^2u(x) - T^2v(x)| &\leq \lambda M \int_a^x |Tu(y) - Tv(y)| dy \\ &\leq \frac{[\lambda M(x-a)]^2}{2!} \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Por indução, obtemos

$$|T^m u(x) - T^m v(x)| \leq \frac{[\lambda M(x-a)]^m}{m!} \|u - v\|_\infty.$$

Assim,

$$|T^m u(x) - T^m v(x)| \leq \frac{[\lambda M(b-a)]^m}{m!} \|u - v\|_\infty.$$

Mas

$$\frac{[\lambda M(b-a)]^m}{m!} \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty,$$

o que implica que o operador T^m é uma contração em $C([a, b])$ quando m é suficientemente grande. Portanto, pelo Corolário 1.1, T possui um único ponto fixo em $C([a, b])$. ■

2.3 Equações integrais de contorno

Nesta seção mostraremos que potencial de camada dupla é solução do problema de Dirichlet para o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Trataremos somente o caso $n = 2$.

Lema 2.1. *Dada $w \in C(S)$. Se*

$$v(x) := \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |x - y| dS, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Então v é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Além disso, para todo $z \in S$ temos

$$\lim_{x \rightarrow z} v(x) = w(z) + \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| dS, \quad x \notin \Omega; \quad (2.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow z} v(x) = -w(z) + \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| dS, \quad x \notin \bar{\Omega} \quad (2.7)$$

e

$$\frac{\partial v_i}{\partial \eta}(z) = \frac{\partial v_e}{\partial \eta}(z). \quad (2.8)$$

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ a extensão é dada por

$$u(x) := - \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} dS.$$

Teorema 2.4 (Neumann - Robin). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com fronteira S suficientemente suave. Dada $f \in C(S)$, existe $w \in C(S)$ tal que*

$$u(x) := \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |x - y| dS, \quad \forall x \in \Omega \quad (2.9)$$

é solução clássica do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{em } S. \end{cases} \quad (2.10)$$

Demonstração: Dividiremos a demonstração em quatro etapas:

1ª etapa: O problema (2.9)-(2.10) é equivalente a encontrar $w \in C(S)$ tal que

$$f(z) = w(z) + \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| dS, \quad \forall z \in S. \quad (2.11)$$

Considere $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ a função harmônica em Ω representada por um potencial de camada dupla gerado por uma densidade contínua w sobre S dado por (2.9).

Vamos definir $f := u|_S$. Segue do Lema 2.1 e por (2.7) que

$$f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in \Omega}} u(x) = w(z) + \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| dS, \quad \forall z \in S.$$

Reciprocamente, se $w \in C(S)$ verifica (2.11), então um argumento análogo mostra que u , dada por (2.9), satisfaz o problema de Dirichlet (2.10).

2ª etapa: Dada $w \in C(S)$, considere

$$(Lw)(z) := \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| dS, \quad \forall z \in S. \quad (2.12)$$

Então, $L : C(S) \rightarrow C(S)$ é um operador linear, contínuo e compacto.

De fato, observe que o núcleo do operador integral L pode ser reescrito na forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| = - \frac{z - y}{|z - y|^2} \cdot \eta. \quad (2.13)$$

Sendo S um curva suave, segue de um cálculo elementar que tal núcleo define uma função contínua sobre $S \times S$. Em particular, se $w \in C(S)$ então

$$S \ni z \mapsto \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| dS$$

define uma função contínua na variável z . Assim, o operador linear $L : C(S) \rightarrow C(S)$ está bem definido, é linear e contínuo (pois o núcleo é limitado). Resta verificar que L é compacto. Com efeito, se $(w_k)_{k \geq 1}$ for uma sequência limitada em $C(S)$, então $(Lw_k)_{k \geq 1}$ é limitada e, tendo a integral um núcleo contínuo, é equicontínua. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência convergente de $(Lw_k)_{k \geq 1}$ e, portanto, L é um operador compacto.

3ª etapa: Se $w \in C(S)$ satisfaz $(I + L)w = 0$ então $w = 0$. Seja $w \in C(S)$ tal que

$$w(z) + \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| dS = 0, \quad \forall z \in S. \quad (2.14)$$

Vamos definir o potencial de camada dupla resultante da distribuição de carga w em S :

$$v(x) := \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |x - y| dS, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (2.15)$$

Fazendo $x \rightarrow z$, $x \in \Omega$ em (2.15), segue de (2.6) e de (2.14) que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow z \\ x \in \Omega}} v(x) = 0.$$

Desta forma, v é uma função harmônica em Ω , convergindo a zero na fronteira S . Pelo Princípio do Máximo, $v = 0$ em Ω e, em particular, $\frac{\partial v_i}{\partial \eta} \Big|_S = 0$. Utilizando a identidade (2.8), teremos $\frac{\partial v_e}{\partial \eta} \Big|_S = 0$.

Seja $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ uma bola de raio R grande o suficiente tal que $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$. Como v é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus S$ e $\frac{\partial v_e}{\partial \eta} \Big|_S = 0$ em S , então a primeira identidade de Green (1.16), aplicada à função v sobre a região compreendida entre $\partial B_R(0)$ e S implica

$$\int_{B_R(0) \setminus \bar{\Omega}} |\nabla v|^2 dx = \int_{\partial B_R(0)} v \frac{\partial v}{\partial \eta} dS. \quad (2.16)$$

Vamos mostrar que a segunda integral em (2.16) converge a zero quando $R \rightarrow \infty$.

De fato, segue de (2.13) que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| \leq \frac{C}{|z - y|} \quad \text{e} \quad \left| \nabla_z \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - y| \right\} \right| \leq \frac{C}{|z - y|^2},$$

do qual obtemos as estimativas:

$$|v(z)| \leq \frac{C}{d(S; \partial B_R(0))}$$

$$|\nabla v(z)| \leq \frac{C}{d(S; \partial B_R(0))^2}$$

para todo $z \in \partial B_R(0)$. Consequentemente,

$$\left| \int_{\partial B_R(0)} v \frac{\partial v}{\partial \eta} dS \right| \leq C \frac{R}{d(S; \partial B_R(0))^3} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad R \rightarrow \infty.$$

Logo, por (2.16), temos $\nabla v = 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ e, portanto, v é constante em $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$. Como $v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$ tem-se $v = 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus S$.

Por outro lado, (2.6) e (2.7) indicam que v sofre uma variação de $2w$ ao atravessar a fronteira S e, conseqüentemente, $w = 0$.

4ª etapa: Reescrevendo a equação (2.11) em termos de L obtemos

$$f = (I + L)w$$

com $f, w \in C(S)$.

Pelos resultados da 2ª etapa, o operador L satisfaz as hipóteses da Alternativa de Fredholm 1.8. Segue da etapa precedente que dado $f \in C(S)$ existe um único $w \in C(S)$ tal que $f = (I + L)w$ ou, equivalentemente, satisfazendo a equação (2.11). Logo, a função u dada por

$$u(x) := \frac{1}{\pi} \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \log |x - y| dS, \quad \forall x \in \Omega,$$

satisfaz (2.10). ■

No caso de abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, a extensão natural do Teorema 2.4 consiste em procurar representações de funções harmônicas na forma

$$u(x) := - \int_S w(y) \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} dS, \quad \forall x \in \Omega.$$

Ao contrário do que ocorre na dimensão 2, a equação integral resultante não tem núcleo contínuo.

Neste caso, a Alternativa de Fredholm deve ser utilizada após uma convolução¹ de núcleos, até que seja atingida a compacidade do operador que o Teorema 1.8 exige.

¹Sejam f e g definidas em Ω . Definimos *produto de convolução* ou simplesmente *convolução* de f com g , denotado por $f \star g$, como a função h dada por

$$h(x) \equiv (f \star g)(x) = \int_{\Omega} f(x-s)g(s)ds.$$

Capítulo 3

Solução Numérica da Equação de Fredholm

Neste capítulo faremos uma análise numérica teórica das equações integrais de Fredholm lineares de segunda espécie. Resolveremos esta equação integral usando os seguintes métodos de projeção: Método da Colocação, Método de Galerkin e Método de Projeção Iterativo. Nosso objetivo principal é buscar condições necessárias para convergência das soluções aproximadas, fazer a análise de erro e da ordem de convergência.

Para ilustrar a eficiência do Método da Colocação resolveremos um caso não linear da equação de Fredholm.

Todos os exemplos desta seção foram implementados com o aplicativo *Maxima*.

3.1 Métodos de projeção

3.1.1 Principais ideias

Sejam V um espaço de Banach, $T : V \rightarrow V$ um operador e a equação de operadores

$$Tu = f. \tag{3.1}$$

Por exemplo, para a equação integral de Fredholm (2.1) temos $T = \lambda - K$ e pode ser escrita na notação de operador

$$(\lambda - K)u = f. \quad (3.2)$$

A ideia principal dos métodos de projeção é a seguinte: Escolhemos $V_n \subset V$ uma sequência de subespaços de dimensão finita que aproxima o espaço V . Seja $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ uma base de V_n .

Seja u_n a projeção de u em V_n . Considere o problema aproximado

$$Tu_n = f$$

e o *resíduo*

$$r_n = Tu_n - f. \quad (3.3)$$

Para garantirmos que u_n seja uma boa aproximação de u , o resíduo r_n deve ser, em algum sentido, aproximadamente zero. A escolha do procedimento para tornar o resíduo r_n aproximadamente zero define cada método de projeção,

Neste contexto, o seguinte resultado é importante na definição dos métodos:

Proposição 3.1. *Sejam V um espaço de Banach, $V_n \subset V$ um subespaço e $g \in V$.*

(a) *Se $P_n : V \rightarrow V_n$ for um operador interpolador de Lagrange de g nos pontos nodais $\{x_1, \dots, x_{k_n}\}$, então*

$$P_n g = 0 \Leftrightarrow g(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k_n.$$

(b) *Suponha V um espaço de Hilbert, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_n}\}$ base de V_n e parte de uma família ortonormal $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \geq 1}$ que gera V e, agora, P_n um operador projeção ortogonal, então*

$$P_n g = 0 \Leftrightarrow \langle g, \varphi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k_n.$$

Demonstração: (a) Temos que P_n é um operador projeção, pelo Teorema 1.7, então se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_n}\}$ for uma base do subespaço vetorial V_n , podemos escrever

$$P_n g \in V_n$$

como

$$P_n g(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x).$$

Além disso, $P_n g$ interpola g nos nodais $\{x_1, \dots, x_{k_n}\}$, segue que

$$P_n g(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = g(x_i), \quad i = 1, \dots, k_n$$

e pela condição de interpolação resulta em

$$P_n g(x_i) = c_i = g(x_i).$$

Escrevemos, então

$$P_n g(x) = \sum_{j=1}^{k_n} g(x_j) \varphi_j(x).$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{k_n} g(x_j) \varphi_j(x) = 0 \Leftrightarrow g(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, k_n.$$

(b) Como P_n é um operador projeção ortogonal e $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_n}\}$ é base ortonormal de V_n , temos que, pelo Exemplo 1.7,

$$P_n g = \sum_{j=1}^{k_n} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j.$$

Disso segue que

$$\sum_{j=1}^{k_n} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j = 0 \Leftrightarrow \langle \varphi_j, g \rangle = 0 \quad j = 1, \dots, k_n.$$

■

Observação 3.1. A Proposição 3.1 pode ser particularizada para $r_n \in V_n \subset V$ em vez de g . Ou, equivalentemente

$$P_n T u_n = P_n f.$$

De modo geral os métodos que apresentaremos a seguir têm os seguintes princípios:

(i) **Método da Colocação**

No Método da Colocação escolhemos os k_n pontos nodais e tomamos $r_n(x_i) = 0$, $i = 1, \dots, k_n$.

(ii) **Método de Galerkin**

No Método de Galerkin consideramos um espaço de Hilbert V , escolhemos $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \geq 1}$ que gera V e tomamos $\langle r_n, \varphi_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, k_n$.

Método da Colocação

Pela Proposição 3.1, escolhemos pontos nodais distintos $x_1, \dots, x_{k_n} \in \Omega$, e exigimos que

$$r_n(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k_n. \quad (3.4)$$

Sabemos que se $u_n \in V_n$, então podemos escrevê-la como

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Substituindo em (1.1) obteremos

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \lambda u_n(x) - \int_{\Omega} k(x, y) u_n(y) dy - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} c_j \left[\lambda \varphi_j(x) - \int_{\Omega} k(x, y) \varphi_j(y) dy \right] - f(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Usando as equações (3.4) e (3.5), a expressão (3.6) resulta no seguinte sistema linear

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left[\lambda \varphi_j(x_i) - \int_{\Omega} k(x_i, y) \varphi_j(y) dy \right] = f(x_i), \quad i = 1, \dots, k_n \quad (3.7)$$

cuja solução são os coeficientes $\{c_1, \dots, c_{k_n}\}$.

As questões imediatas que surgem são: o sistema (3.7) tem uma única solução? Se sim, u_n converge para u ?

Para tornar mais clara a expressão (3.7), definiremos o operador projeção $P_n : V \rightarrow V_n$ do seguinte modo: dado $u \in V$ definiremos $P_n u$ elemento de V_n o qual interpola u nos pontos nodais $\{x_1, \dots, x_{k_n}\}$ (veja Proposição 3.1). Então, podemos escrever

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \varphi_j(x)$$

cujos coeficientes $\{\alpha_j\}$ são determinados resolvendo o sistema linear

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \varphi_j(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \dots, k_n. \quad (3.8)$$

Se

$$\det(\varphi_j(x_i)) \neq 0 \quad (3.9)$$

o sistema (3.8) tem uma única solução. Por todo este capítulo, assumiremos que a condição (3.9) é verdadeira. Isto implica que as funções $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_n}\}$ são linearmente independente em Ω .

Para $V = C(\Omega)$ e para cada i , $1 \leq i \leq k_n$, seja $l_i \in V_n$ que satisfaz a condição de interpolação

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \dots, k_n. \quad (3.10)$$

O conjunto $\{l_1, \dots, l_{k_n}\}$ é uma base para V_n . Na interpolação polinomial, tais funções l_i são chamadas de *funções de Lagrange*. Para esta base temos

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{k_n} u(x_j) l_j(x), \quad (3.11)$$

claramente, pelas propriedades de somatório, P_n é linear e possui posto finito. Além disso, como operador de $C(\Omega)$ para $C(\Omega)$, temos:

$$\|P_n\| = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x)|. \quad (3.12)$$

Retornando à (3.11), pela Observação 3.1 temos que

$$P_n r_n = 0$$

ou equivalentemente

$$P_n(\lambda - K)u_n = P_n f, \quad u_n \in V_n. \quad (3.13)$$

Observação 3.2. *Sempre que não causar confusão a notação T será usada, neste capítulo, para designar o operador $(\lambda - K)$.*

Método de Galerkin

Seja V um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Neste caso temos (veja Proposição 3.1) que o resíduo r_n satisfaz

$$\langle r_n, \varphi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k_n = n, \quad (3.14)$$

com $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset \Phi = \{\varphi_i\}_{i \geq 1}$ uma família de funções ortonormais que gera o espaço V .

Para cada u_n , aplicamos (3.14) em (1.1). Assim, obtemos o sistema linear

$$\sum_{j=1}^n c_j [\lambda \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle - \langle K \varphi_j, \varphi_i \rangle] = \langle f, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Seja $P_n : V \rightarrow V_n$ o operador projeção ortogonal, pela Observação 3.1 podemos reescrever (3.14) na forma

$$P_n r_n = 0 \quad \text{ou} \quad P_n(\lambda - K)u_n = P_n f, \quad u_n \in V_n. \quad (3.16)$$

Note a similaridade com (3.13).

3.1.2 Aspectos teóricos

Sejam V um espaço de Banach e V_n uma sequência de subespaços de dimensão finita. Seja $\dim(V_n) = k_n$, assumimos $k_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $P_n : V_n \rightarrow V$ um operador projeção limitado. Isto significa que P_n é um operador linear limitado tal que

$$P_n v = v, \quad \forall v \in V_n.$$

Na Seção 1.2.1 do Capítulo 1 vimos que o operador interpolador de Lagrange e o operador projeção ortogonal são exemplos do operador P_n e na seção anterior vimos que estes operadores definem, respectivamente, o Método da Colocação e o Método de Galerkin.

Considere o problema aproximado da equação de operadores (3.2) dado por

$$P_n(\lambda - K)u_n = P_n f, \quad u_n \in V_n. \quad (3.17)$$

Seja u_n uma solução de (3.17). Como o operador P_n é linear e $P_n u_n = u_n$, (3.17) torna-se

$$(\lambda - P_n K)u_n = P_n f, \quad u_n \in V. \quad (3.18)$$

Por outro lado, se u_n é solução (3.18) então

$$u_n = \frac{1}{\lambda}(P_n f + P_n K u_n) \in V.$$

Mas $P_n u_n = u_n$, e logo,

$$(\lambda - P_n K)u_n = P_n(\lambda - K)u_n,$$

portanto u_n é solução de (3.17).

No seguinte resultado temos uma estimativa do erro.

Teorema 3.1. *Sejam V um espaço de Banach, $K : V \rightarrow V$ um operador limitado e $\lambda - K : V \rightarrow V$ um operador bijetor. Suponha que*

$$\|K - P_n K\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Então,

(a) *O operador $(\lambda - P_n K)^{-1}$ existe e é limitado, para todo n suficientemente grande. Além disso, $(\lambda - P_n K)^{-1}$ é uniformemente limitado, ou seja,*

$$\sup_{n \geq n_0} \|(\lambda - P_n K)^{-1}\| < \infty. \quad (3.20)$$

(b) *Para u solução de (3.2) e u_n soluções de (3.18) com n suficientemente grande, tem-se*

$$u - u_n = \lambda(\lambda - P_n K)^{-1}(u - P_n u) \quad (3.21)$$

e a estimativa de erro

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - P_n K\|} \|u - P_n u\| \leq \|u - u_n\| \leq |\lambda| \|(\lambda - P_n K)^{-1}\| \|u - P_n u\|. \quad (3.22)$$

(c) A estimativa dada em (b) implica que $\|u - u_n\|$ converge para zero exatamente na mesma rapidez de $\|u - P_n u\|$.

Demonstração: (a) Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\epsilon_{n_0} = \sup_{n \geq n_0} \|K - P_n K\| < \frac{1}{\|(\lambda - K)^{-1}\|}. \quad (3.23)$$

Então, a inversa $[I + (\lambda - K)^{-1}(K - P_n K)]^{-1}$ existe e é uniformemente limitada e pelo Teorema das séries geométricas 1.1, segue que

$$\|[I + (\lambda - K)^{-1}(K - P_n K)]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \epsilon_{n_0} \|(\lambda - K)^{-1}\|}.$$

Usando

$$\lambda - P_n K = (\lambda - K) + (K - P_n K) = (\lambda - K)[I + (\lambda - K)^{-1}(K - P_n K)]$$

temos que $(\lambda - P_n K)^{-1}$ existe e $(\lambda - P_n K)^{-1} = [I + (\lambda - K)^{-1}(K - P_n K)]^{-1}(\lambda - K)^{-1}$, e então

$$\|(\lambda - P_n K)^{-1}\| \leq \frac{\|(\lambda - K)^{-1}\|}{1 - \epsilon_{n_0} \|(\lambda - K)^{-1}\|} = M, \quad (3.24)$$

o que implica (3.20).

(b) Para obtermos a fórmula (3.21), aplicamos P_n na equação $(\lambda - K)u = f$ para obter

$$\lambda P_n u - P_n K u = P_n f.$$

Agora somando as duas equações tem-se

$$\lambda u - K u + \lambda P_n u - P_n K u = P_n f + f,$$

ou seja,

$$\lambda u - P_n K u = P_n f + f + K u - \lambda P_n u. \quad (3.25)$$

De (3.2) temos que $\lambda u = f + Ku$, substituindo em (3.25) obtemos

$$\lambda u - P_n K u = P_n f + \lambda u - \lambda P_n u,$$

ou seja,

$$(\lambda - P_n K)u = P_n f + \lambda(u - P_n u). \quad (3.26)$$

Agora, subtraindo $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$ em (3.26), resulta

$$(\lambda - P_n K)(u - u_n) = \lambda(u - P_n u). \quad (3.27)$$

Logo,

$$u - u_n = \lambda(\lambda - P_n K)^{-1}(u - P_n u),$$

o que implica (3.21). Tomando a norma e usando (3.24) tem-se

$$\|u - u_n\| \leq |\lambda|M \|u - P_n u\|. \quad (3.28)$$

Assim, se $P_n u \rightarrow u$ então $u_n \rightarrow u$.

O limitante superior de (3.22) segue diretamente de (3.21). Para obtermos o limitante inferior tomamos a norma em (3.27)

$$\|\lambda(u - P_n u)\| = \|(\lambda - P_n K)(u - u_n)\|$$

$$|\lambda| \|(u - P_n u)\| \leq \|\lambda - P_n K\| \|u - u_n\|$$

o que é equivalente ao lado esquerdo em (3.22). Existe n_0 natural tal que $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|\lambda - P_n K\| &\leq \|\lambda - K\| + \|K - P_n K\| \\ &\leq \|\lambda - K\| + \epsilon_{n_0}. \end{aligned}$$

De (3.22) temos

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - K\| + \epsilon_{n_0}} \|u - P_n u\| \leq \|u - u_n\|.$$

Combinando com (3.28) tem-se

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - K\| + \epsilon_{n_0}} \|u - P_n u\| \leq \|u - u_n\| \leq |\lambda|M \|u - P_n u\|. \quad (3.29)$$

(c) De (3.29) temos que u_n converge para u se, e somente se $P_n u$ converge para u . Além disso, nos diz que $\|u - P_n u\|$ e $\|u - u_n\|$ convergem para a zero exatamente a mesma rapidez. ■

Observamos que para aplicarmos o Teorema 3.1 devemos verificar a hipótese $\|K - P_n K\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Os dois resultados seguintes abordam essa questão.

Lema 3.1. *Sejam V e W espaços de Banach e $A_n : V \rightarrow W, n \geq 1$, uma sequência de operadores lineares limitados. Suponha que $(A_n u)$ converge para todo $u \in V$. Então a convergência é uniforme em subconjuntos compactos de V .*

Demonstração: Como V e W são de Banach e a sequência de operadores limitados A_n satisfaz $\|A_n u - u\| \rightarrow 0$ para cada $u \in V$, pelo Teorema da Limitação Uniforme 1.4 segue que existe $M > 0$ tal que

$$M = \sup_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty.$$

Observe que os operadores A_n são equicontínuos, pois

$$\|A_n u - A_n f\| \leq M \|u - f\|.$$

Seja S um subconjunto compacto de V . Então (A_n) é uma família de funções uniformemente limitadas e equicontínuas em S . Então pelo Teorema de Arzelà-Ascoli para espaços de Banach temos que (A_n) é uniformemente convergente para $u \in S$. ■

Lema 3.2. *Sejam V um espaço de Banach e $\{P_n\}$ uma família de projeções limitadas em V com*

$$P_n u \rightarrow u \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad u \in V. \quad (3.30)$$

Se $K : V \rightarrow V$ é compacto, então

$$\|K - P_n K\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração: Da definição de norma de operador, temos:

$$\|K - P_n K\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Ku - P_n Ku\| = \sup_{z \in K(U)} \|z - P_n z\|,$$

com $K(U) = \{Ku; \|u\| \leq 1\}$, que é relativamente compacto, isto é, $\overline{K(U)}$ é compacto, porque K é compacto. Portanto, analogamente ao mesmo procedimento do lema anterior e usando que

$$\sup_{z \in K(U)} \|z - P_n z\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

temos o resultado desejado. ■

3.1.3 Exemplos

A maioria dos métodos de projeção são baseados na escolha dos subespaços de aproximação V_n . Existem duas abordagens principais para esta escolha:

- ▶ Decompor uma região Ω de maneira aproximada em elementos $\Delta_1, \dots, \Delta_n$; e em seguida, aproximar a função $u \in C(\Omega)$ por um polinômio de grau baixo em cada um dos elementos Δ_i . Esses métodos são de projeção e muitas vezes são referidos como *Métodos Polinomiais por Partes* ou *Elementos Finitos*.
- ▶ Aproximar $u \in C(\Omega)$ usando uma família de funções que são definidas em todo Ω , por exemplo, polinômios, polinômios trigonométricos ou polinômios esféricos. Muitas vezes essas funções aproximantes são de classe C^∞ . Alguns autores nomeiam esses métodos de projeção como *Métodos Espectrais*, especialmente quando usados polinômios trigonométricos.

Colocação linear por partes

Consideremos a solução numérica da equação integral

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.31)$$

usando a aproximação linear por partes de funções. Seja $\Omega = [a, b]$ e $n \geq 1$, definamos $h = (b - a)/n$ e

$$x_j = a + (j - 1)h, \quad j = 1, \dots, n + 1.$$

O subespaço V_n é o conjunto de todas as funções contínuas e lineares por partes em Ω , nos pontos $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$.

Considere os polinômios interpoladores de Lagrange lineares por partes:

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (3.32)$$

O operador projeção é definido por

$$P_n u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u(x_i) l_i(x). \quad (3.33)$$

Para a convergência de $P_n u$, segue que

$$\|P_n u - u\|_\infty \leq \begin{cases} \omega(u, h), & u \in C(\Omega) \\ \frac{h^2}{8} \|u''\|_\infty, & u \in C^2(\Omega), \end{cases} \quad (3.34)$$

sendo $\omega(u, h) = \max_{\substack{|x-y| \leq h \\ a \leq x, y \leq b}} |u(x) - u(y)|$.

A expressão $\frac{h^2}{8} \|u''\|_\infty$ é um resultado elementar da Análise Numérica¹.

Isto mostra que $P_n u \rightarrow u$ para todo $u \in C(\Omega)$. Além disso, se $u \in C^2(\Omega)$ a convergência é de ordem 2.

Para um operador compacto $K : C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$, o Lema 3.2 implica que $\|K - P_n K\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, o resultado do Teorema 3.1 pode ser aplicado diretamente à solução numérica da equação integral $(\lambda - K)u = f$.

Para n suficientemente grande, seja $n \geq n_0$, a equação $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$ possui uma única solução u_n para cada $f \in C(\Omega)$. Considerando $u \in C^2(\Omega)$ e de (3.22) implica

$$\|u - u_n\|_\infty \leq |\lambda| M \frac{h^2}{8} \|u''\|_\infty, \quad (3.35)$$

com M uma limitação uniforme de $(\lambda - P_n K)^{-1}$ para $n \geq n_0$.

¹Cf. R. Kress, [18], teo. 11.3.

O sistema linear (3.7) é da forma

$$\lambda u_n(x_i) - \sum_{j=1}^{n+1} u_n(x_j) \int_a^b k(x_i, y) l_j(y) dy = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (3.36)$$

As integrais são comumente resolvidas numericamente. A ideia é utilizar um método de quadratura que mantenha a ordem de convergência em (3.35) com custo mínimo de tempo.

Exemplo 3.1. *Considere a equação*

$$\frac{\pi}{4} u(x) = -\frac{\cos(x)}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x-y) u(y) dy,$$

cuja solução exata é $u(x) = \text{sen}(x)$.

Vamos resolver o Exemplo 3.1 numericamente usando o comando `colocacaoIN_hat`² que é um programa implementado com o software Maxima.

Solução: Particionaremos o intervalo $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ em $n \in \{2, 4, 8, 16, 32\}$ subintervalos. Com passo $h = \frac{\pi}{2n}$ os pontos nodais serão $x_i = (i-1)h$, $i = 1, \dots, n+1$.

Com as funções base de Lagrange (3.32) (também conhecidas como *hat-fuctions*) conseguimos, para cada $i = 1, \dots, n+1$ e fazendo $P_n r_n = 0$, a equação (3.36) e então resolvemos o sistema.

No exemplo temos que $f(x) = -\frac{\cos(x)}{2}$, o núcleo $k(x, y) = \cos(x-y)$, $\lambda = \frac{\pi}{4}$, $a = 0$, $b = \pi/2$ e faremos $n \in \{2, 4, 8, 16, 32\}$.



Exemplo 3.1

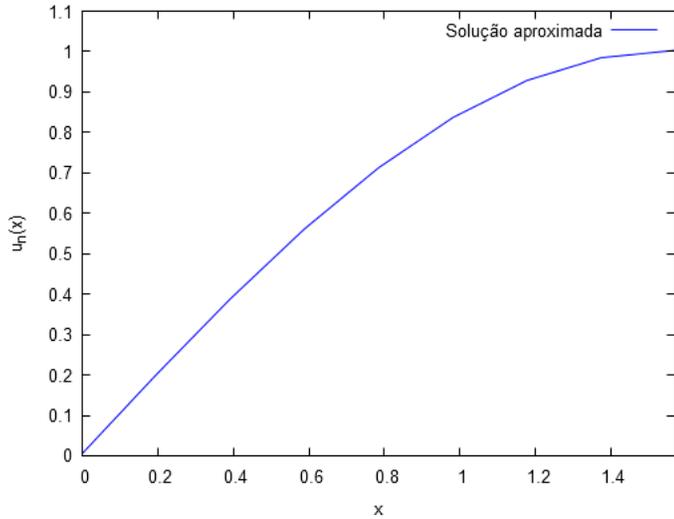
Aqui exibiremos a solução aproximada para $n = 8$.

```
(%i2) colocacaoIN_hat(-cos(x)/2,cos(x-y),%pi/4,0,%pi/2,8);
```

Solução aproximada: `u_n(x)`

```
(%t2)
```

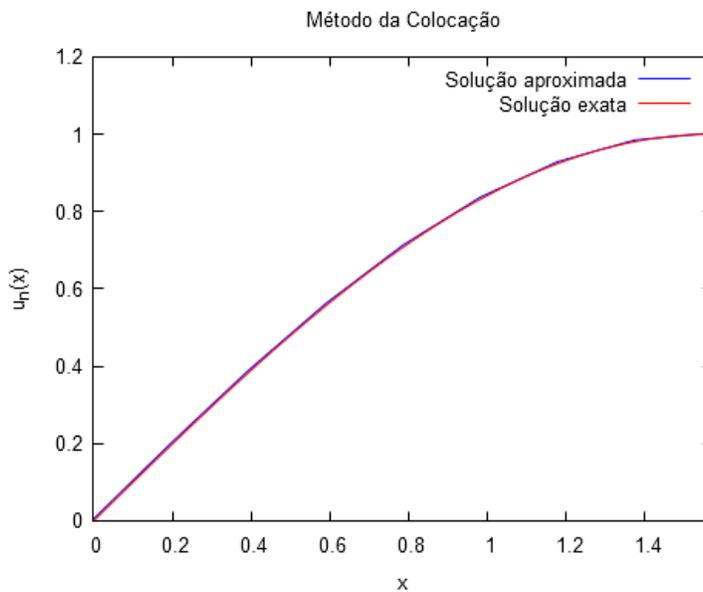
²De posse de uma equação integral na forma (1.1) e o código do comando, entre com os dados e em seguida digite e execute: `colocacaoIN_hat(f(x),k(x,y),lambda,a,b,n)`.



Vamos desenhar as soluções aproximada e exata.

```
(%i3) wxplot2d([u_n(x),sin(x)], [x,0,%pi/2], [legend,"Solução aproximada",
"Solução exata"], [ylabel,"u_n(x)"], [title,"Método da Colocação"]);
```

```
(%t3)
```



Agora calcularemos o erro usando (3.34).

```
(%i5) h: (%pi/2-0)/8$ nod: makelist(0+(i-1)*h,i,1,9)$
```

```
(%i6) E_n: float(lmax(val: makelist(abs(sin(nod[i])-u_n(nod[i])),i,1,9))), numer;
```

(E.n) 0.006029843886088515

A seguinte tabela mostra os erros para cada $n \in \{2, 4, 8, 16, 32\}$:

n	2	4	8	16	32
E_n	$1,0931 \cdot 10^{-1}$	$2,4278 \cdot 10^{-2}$	$6,0298 \cdot 10^{-3}$	$1,4983 \cdot 10^{-3}$	$3,74 \cdot 10^{-4}$

■

Método de Galerkin linear por partes

A análise de erro do Método de Galerkin é geralmente estudada para espaços de Hilbert, usualmente $L^2(\Omega)$, ou algum espaço de Sobolev $H^r(\Omega)$. Mas, pode ser feita uma análise do erro para $C(\Omega)$ que tem como objetivo de obter resultados sobre a convergência uniforme das soluções numéricas.

Voltamos a considerar a solução numérica de (3.31).

Seja $V = L^2(a, b)$ com produto interno e norma dados por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$, respectivamente. Seja V_n o subespaço de funções lineares e contínuas por partes com base as funções base de Lagrange descritas anteriormente em (3.32). Observe que $\dim V_n = n + 1$.

Seja P_n o operador projeção ortogonal de V para V_n .

Vamos provar que $P_n u \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$, $\forall u \in V$. De fato, considere $u(x)$ contínua em $[a, b]$. Seja $\mathcal{I}_n u(x)$ a função linear por partes em V_n que interpola $u(x)$ nos nodais x_1, \dots, x_{n+1} (veja (3.33)).

Sabemos que $P_n u$ minimiza $\|u - z\|$, com $z \in V_n$. De fato, da Proposição 1.2 (d) e do limitante (3.34) temos

$$\|u - P_n u\| \leq \|u - \mathcal{I}_n u\| \leq \sqrt{b-a} \|u - \mathcal{I}_n u\|_\infty \quad (3.37)$$

$$\leq \sqrt{b-a} \omega(u; h). \quad (3.38)$$

Isto mostra que $P_n u \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$ para todas as funções contínuas u .

Pela densidade de $C([a, b])$ em $L^2(a, b)$ e pela propriedade $\|P_n\| = 1$ temos que para $u \in L^2(a, b)$ existe uma sequência de funções contínuas $\{u_m\}$ que converge para $u \in L^2(a, b)$. Então,

$$\begin{aligned} \|u - P_n u\| &\leq \|u - u_m\| + \|u_m - P_n u_m\| + \|P_n(u - u_m)\| \\ &\leq 2\|u - u_m\| + \|u_m - P_n u_m\|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe m tal que $\|u - u_m\| < \frac{\epsilon}{4}$, m fixo. Isso implica então, que para todo n

$$\|u - P_n u\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \|u_m - P_n u_m\|.$$

Do qual resulta que para n suficientemente grande

$$\|u - P_n u\| \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $P_n u \rightarrow u$, com $u \in L^2(a, b)$.

Para a equação integral $(\lambda - K)u = f$, podemos usar o Lema 3.2 para obter $\|K - P_n K\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isso justifica o uso do Teorema 3.1 na análise do erro do método de Galerkin para a equação $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$. Como já verificamos, $\|u - u_n\|$ converge para zero com a mesma rapidez que $\|u - P_n u\|$ também converge.

Para $u \in C^2[a, b]$, combinando (3.28), (3.37) e (3.34) obtemos

$$\begin{aligned} \|u - u_n\| &\leq |\lambda| M \|u - P_n u\| \\ &\leq |\lambda| M \sqrt{b-a} \|u - \mathcal{I}_n u\|_\infty \\ &\leq |\lambda| M \sqrt{b-a} \frac{h^2}{8} \|u''\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.39)$$

No sistema linear usamos as funções base de Lagrange (3.32). Essas não são ortogonais, mas para propósitos computacionais são muito convenientes de usar. Além disso, não é trivial obtermos uma base ortogonal para V_n .

A solução u_n de $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$ é dada por

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j l_j(x).$$

Os coeficientes $\{c_j\}$ são obtidos resolvendo-se o seguinte sistema linear:

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j \left[\lambda \langle l_i, l_j \rangle - \int_a^b \int_a^b k(x, y) l_i(x) l_j(y) dy dx \right] = \int_a^b f(x) l_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (3.40)$$

com os coeficientes $\langle l_i, l_j \rangle$ dados por

$$\langle l_i, l_j \rangle = \begin{cases} 0, & |i - j| > 1; \\ 2h/3, & 0 < i = j < n; \\ h/3, & i = j = 0; \\ h/6, & |i - j| = 1. \end{cases} \quad (3.41)$$

Em termos práticos, as integrais duplas serão calculadas em alguns intervalos específicos, devido ao fato das funções da base $l_i(x)$ se anularem em determinados intervalos da malha. Em geral, tais integrais duplas são calculadas numericamente por um método de quadratura, usualmente as Fórmulas de Newton-Cotes³. É importante manter a mesma ordem de convergência do Método de Galerkin, deste modo deve-se escolher um método de quadratura, para resolução das integrais, com a mesma ordem de convergência do Método de Galerkin.

Não é complicado (consulte [4, p. 489]) generalizarmos o procedimento descrito acima e considerarmos funções da base como polinômios de grau maior do que 1 por partes.

Exemplo 3.2. *Considere a equação integral*

$$3u(x) - \int_{-1}^1 e^x \sin(y)u(y)dy = 3x^2 \cos(x) + (10 \cos(1) - 6 \sin(1))e^x - 3x^3.$$

Cuja solução exata é $u(x) = x^2 \cos(x) - x^3$. Considere $n \in \{4, 16\}$ na resolução dessa equação pelo método acima.

Solução: Vamos resolver com o comando `GalerkinF2_hat(f,k,lambd,a,b,n)`.



Exemplo 3.2

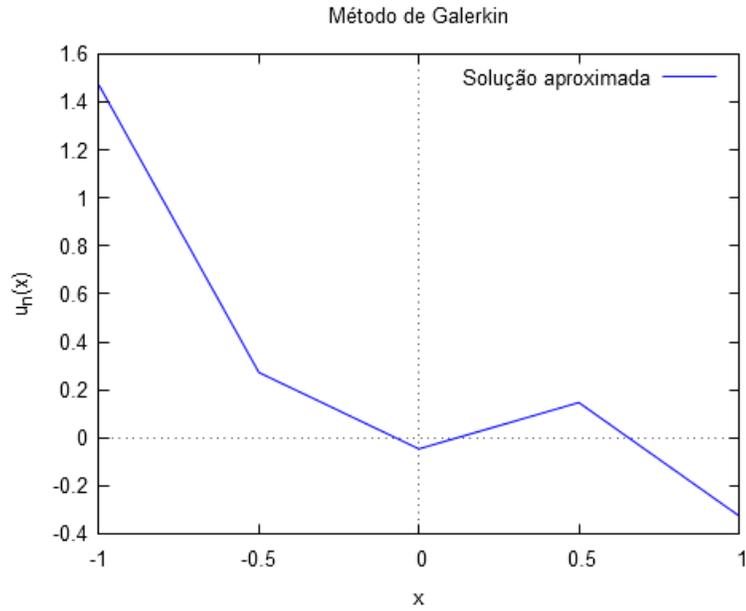
Para $n = 4$.

```
(%i2) GalerkinF2_hat(3*x^2*cos(x)+(10*cos(1)-6*sin(1))*e^x-3*x^3,%e^x*sin(y),
3,-1,1,4);
```

Solução aproximada: $u_n(x)$

```
(%t2)
```

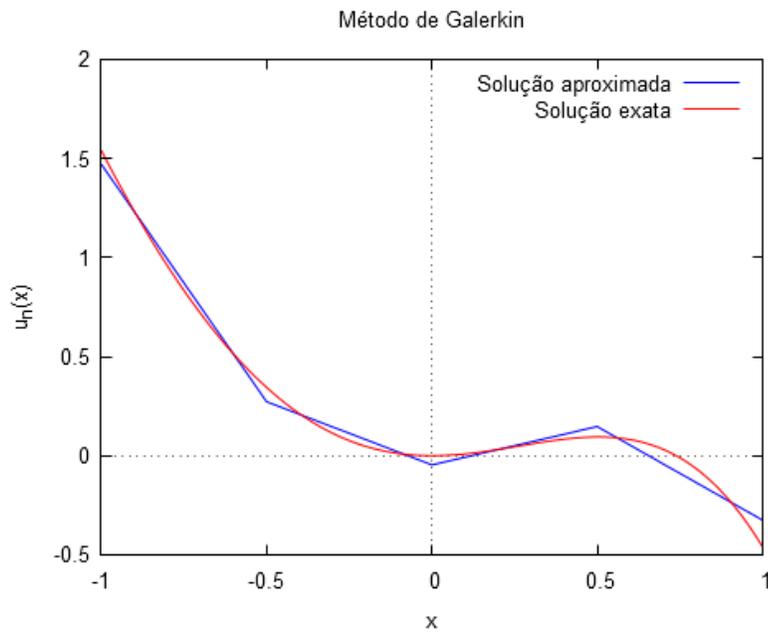
³Cf. M. Ruggiero, [23], cap. 7.



Vamos desenhar as soluções aproximada e exata.

```
(%i3) wxplot2d([u_n(x), x^2*cos(x)-x^3], [x, -1, 1], [legend, "Solução aproximada",
"Solução exata"], [ylabel, "u_n(x)"], [title, "Método de Galerkin"]);
```

```
(%t3)
```

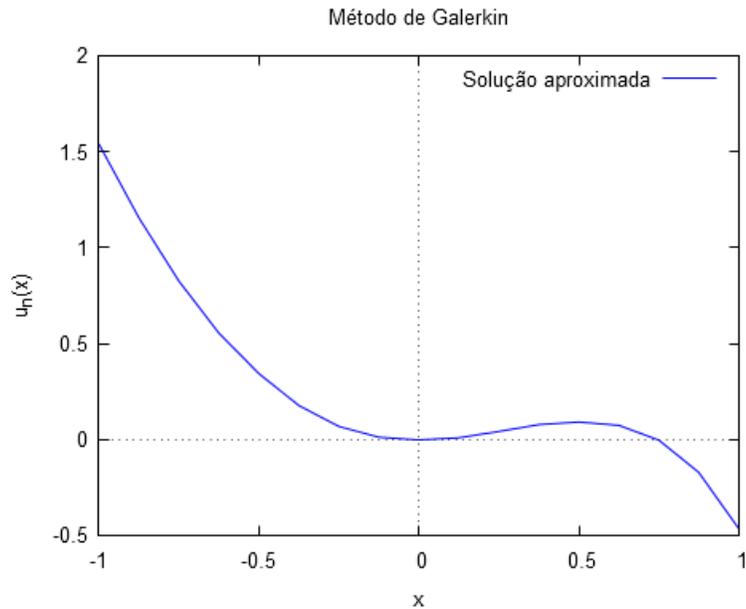


Para $n = 16$.

```
(%i4) GalerkinF2_hat(3*x^2*cos(x)+(10*cos(1)-6*sin(1))*%e^-x-3*x^3,%e^x*sin(y),
3,-1,1,16);
```

Solução aproximada: $u_n(x)$

```
(%t4)
```



Vamos desenhar as soluções aproximada e exata.

```
(%i5) wxplot2d([u_n(x),x^2*cos(x)-x^3],[x,-1,1],[legend,"Solução aproximada",
"Solução exata"],[ylabel,"u_n(x)"],[title,"Método de Galerkin"]);
```

```
(%t5)
```



■

Observe a melhora significativa na solução aproximada por esse método com $n = 16$. Isso confirma a eficiência do Método de Galerkin, porém, propositalmente exibimos este exemplo (que possui aproximação ruim com $n = 4$) para ilustrar⁴ que podemos conseguir uma melhora na solução aproximada quando aplicamos um processo iterativo.

3.2 Método de Projeção Iterativo

Os métodos de projeção iterativos são obtidos quando combinamos o processo iterativo dado pelo Teorema de ponto fixo de Banach (as sucessivas aproximações) com os métodos de projeção. Estes métodos, em geral, tendem a melhorar as aproximações dos métodos de projeção.

Considere a equação de operadores $(\lambda - K)u = f$ e as aproximações sucessivas (2.2) obtidas na Seção 2.1 do Capítulo 2:

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \int_a^b k(x, y) u_n(y) dy \right] \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\lambda} [f + K u_n], \quad x \in [a, b]. \quad (3.42)$$

Se f e k são contínuas em seus respectivos domínios e $\|K\| < |\lambda|$ então, pelo Teorema das

⁴Veja Exemplo 3.3.

séries geométricas 1.1, o processo iterativo (3.42) converge para solução u de $(\lambda - K)u = f$ em $C([a, b])$. Além disso,

$$\|u - u_{n+1}\| \leq \frac{\|K\|}{|\lambda|} \|u - u_n\|.$$

Observação 3.3. *No trabalho [24], o autor mostra que, se K é um operador compacto e a função inicial é obtida pelo Método de Galerkin, os métodos iterativos são uma opção atraente e eficiente e independem do tamanho da norma $\|K\|$. Vamos investigar estes resultados usando os métodos de projeção.*

Seja u_n uma solução da equação $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$ obtida por um método de projeção. Definimos a *solução do Método de Projeção Iterativo* por

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\lambda}(f + K u_n). \quad (3.43)$$

Observe que a ideia é calcular, primeiramente, uma solução aproximada de $(\lambda - K)u = f$ usando um método de projeção, e assim calcular a próxima solução aproximada usando o processo iterativo (3.42). A solução aproximada \hat{u}_n é, em geral, uma aproximação melhor do que u_n . Em certos casos, \hat{u}_n é usada para entender melhor o comportamento da aproximação u_n do método de projeção.

Note que u_n é a projeção de \hat{u}_n no subespaço V_n . De fato, aplicando P_n em ambos os lados de (3.43) obtemos $P_n \hat{u}_n = \frac{1}{\lambda}(P_n f + P_n K u_n)$, o que implica

$$P_n \hat{u}_n = u_n. \quad (3.44)$$

Assim, substituindo (3.44) em (3.43) e efetuando alguns cálculos, obtemos

$$(\lambda - K P_n) \hat{u}_n = f. \quad (3.45)$$

O que geralmente se faz é analisar a equação (3.45) e depois as informações sobre u_n são obtidas por (3.44).

Por outro lado, podemos escrever

$$u - \hat{u}_n = \frac{1}{\lambda}(f + K u) - \frac{1}{\lambda}(f + K u_n) = \frac{1}{\lambda}K(u - u_n) \quad (3.46)$$

e obter o seguinte limitante do erro

$$\|u - \hat{u}_n\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|K\| \|u - u_n\|. \quad (3.47)$$

Isso mostra que \hat{u}_n converge para u , no mínimo, tão rapidamente quanto u_n converge para u . Em geral, a convergência é mais rápida devido as características do problema.

Vamos explicitar agora algumas identidades convenientes para análise de erro e convergência, por exemplo, perceba que se $(\lambda - P_n K)^{-1}$ existe, então também existe $(\lambda - K P_n)^{-1}$. De $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$ temos que

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\lambda}(f + K u_n) = \frac{1}{\lambda}[f + K(\lambda - P_n K)^{-1} P_n f]$$

e então combinando (3.45) tem-se

$$(\lambda - K P_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda}[I + K(\lambda - P_n K)^{-1} P_n]. \quad (3.48)$$

Por outro lado, se existe $(\lambda - K P_n)^{-1}$ temos que existe $(\lambda - P_n K)^{-1}$. Isso segue do Lema 3.3 que, particularmente, mostra

$$(\lambda - P_n K)^{-1} = \frac{1}{\lambda}[I + P_n(\lambda - K P_n)^{-1} K]. \quad (3.49)$$

Combinando (3.48) e (3.49) (ou voltando às definições de u_n e \hat{u}_n), temos que

$$(\lambda - P_n K)^{-1} P_n = P_n(\lambda - K P_n)^{-1}. \quad (3.50)$$

Em suma, de acordo com o que for mais conveniente, escolhemos mostrar a existência de $(\lambda - P_n K)^{-1}$ ou $(\lambda - K P_n)^{-1}$, sendo que a existência do outro será uma consequência imediata. Limitantes de um lado (ou do outro) também podem ser obtidos usando-se (3.48) e (3.49).

O seguinte lema é a prova da afirmação: se existe $(\lambda - K P_n)^{-1}$ temos que existe $(\lambda - P_n K)^{-1}$.

Lema 3.3. *Sejam V um espaço de Banach e $A, B : V \rightarrow V$ operadores lineares e limitados. Suponha que $(\lambda - AB)^{-1} : V \rightarrow V$ existe. Então $(\lambda - BA)^{-1}$ existe e*

$$(\lambda - BA)^{-1} = \frac{1}{\lambda}[I + B(\lambda - AB)^{-1} A]. \quad (3.51)$$

Demonstração: Calculando

$$\begin{aligned}
(\lambda - BA)\frac{1}{\lambda}[I + B(\lambda - AB)^{-1}A] & \\
&= \frac{1}{\lambda}[\lambda - BA + (\lambda - BA)B(\lambda - AB)^{-1}A] \\
&= \frac{1}{\lambda}[\lambda - BA + B(\lambda - AB)(\lambda - AB)^{-1}A] \\
&= \frac{1}{\lambda}(\lambda - BA + BA) \\
&= I.
\end{aligned}$$

Um cálculo similar mostra que vale

$$\frac{1}{\lambda}[I + B(\lambda - AB)^{-1}A](\lambda - BA) = I. \quad (3.52)$$

Com isso mostramos (3.51). ■

Para o erro em \hat{u}_n primeiro escrevemos $(\lambda - K)u = f$ como

$$(\lambda - KP_n)u = f + Ku - KP_nu,$$

e subtraímos (3.45) para obter

$$(\lambda - KP_n)(u - \hat{u}_n) = K(I - P_n)u. \quad (3.53)$$

No que segue, vamos usar a equação (3.53) para analisar a convergência do Método de Projeção Iterativo quando usado o Método de Galerkin na obtenção da aproximação inicial.

3.2.1 O Método de Galerkin Iterativo

Suponha V um espaço de Hilbert e u_n uma solução aproximada da equação $(\lambda - K)u = f$ obtida pelo Método de Galerkin. Então, $(I - P_n)^2 = I - P_n$ e

$$\begin{aligned}
\|K(I - P_n)u\| &= \|K(I - P_n)^2u\| = \|K(I - P_n)(I - P_n)u\|; \\
\|K(I - P_n)u\| &\leq \|K(I - P_n)\| \|(I - P_n)u\|.
\end{aligned} \quad (3.54)$$

Usando que V é um espaço de Hilbert, que P_n é um operador projeção autoadjunto, a teoria de melhor aproximação e as propriedades dos operadores adjuntos concluímos que

$$\|K(I - P_n)\| = \|[K(I - P_n)]^*\| = \|(I - P_n)K^*\| \quad (3.55)$$

Combinado (3.54) e (3.55) com (3.53) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u - \hat{u}_n\| &= \|(\lambda - KP_n)^{-1}\| \|K(I - P_n)u\|; \\
\|u - \hat{u}_n\| &\leq \|(\lambda - KP_n)^{-1}\| \|K(I - P_n)\| \|(I - P_n)u\|; \\
\|u - \hat{u}_n\| &\leq \|(\lambda - KP_n)^{-1}\| \|(I - P_n)K^*\| \|(I - P_n)u\|.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Portanto, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)u\| = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)K^*\| = 0$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - \hat{u}_n\| = 0.$$

Primeiro vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)u\| = 0$.

Suponha que a sequência de subespaços V_n tem a seguinte propriedade: para cada $v \in V$ existe uma sequência (v_n) com $v_n \in V_n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\| = 0$. Combinando esta propriedade com as propriedades do operador projeção ortogonal P_n em espaços de Hilbert obtemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)u\| = 0$.

Agora, vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)K^*\| = 0$.

Como K é um operador compacto temos que seu adjunto K^* também é um operador compacto. Combinando este resultado com o Lema 3.2 e usando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)u\| = 0$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)K^*\| = 0. \tag{3.57}$$

Para finalizar devemos mostrar que $(\lambda - KP_n)^{-1}$ existe e é uniformemente limitado. De fato, aplicando o Teorema 3.1 garantimos a existência e limitação uniforme de $(\lambda - P_nK)^{-1}$ para n suficientemente grande, digamos $n \geq n_0$; e do Lema 3.3 segue o resultado.

Portanto, de (3.56), concluímos que $\|u - \hat{u}_n\|$ converge para zero mais rapidamente que $\|(I - P_n)u\|$ (ou equivalentemente, $\|u - u_n\|$). Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u - \hat{u}_n\|}{\|u - u_n\|} = 0.$$

Observação 3.4. Para $V = L^2(\Omega)$, o adjunto do operador integral K é dado por

$$K^*v(x) = \int_{\Omega} k(y, x)v(y) dy, \quad v \in L^2(\Omega).$$

Exemplo 3.3. Considere a equação do Exemplo 3.2. Vamos resolver, agora, com o método exposto acima para os mesmos valores de n do Exemplo 3.2.

Solução: Para resolvermos este exemplo usamos o comando `Galerkin_Iterativo(f1,k1,lambda,a,b,n,m)`. O valor n é a quantidade de subintervalos dada no Método de Galerkin, e m é o número de iterações.



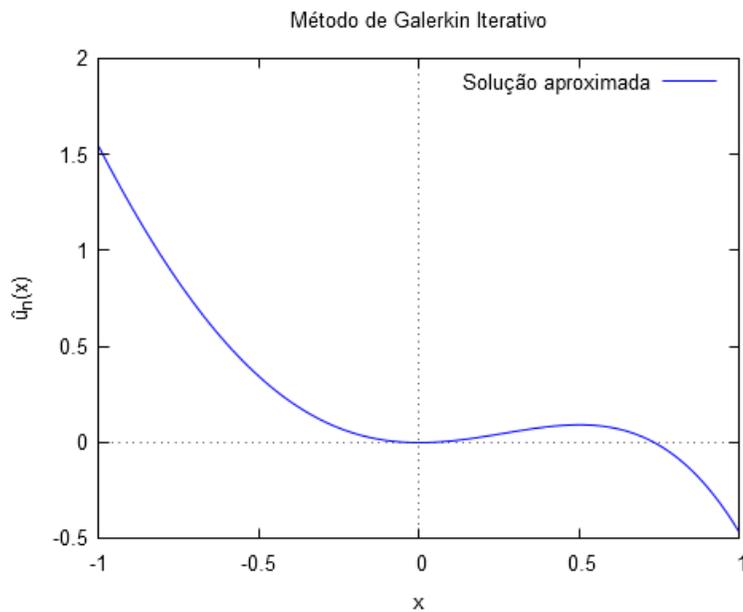
Exemplo 3.3

Aqui exibiremos a solução aproximada para $n = 4$.

```
(%i2) Galerkin_Iterativo(3*x^2*cos(x)+(10*cos(1)-6*sin(1))*%e^-x-3*x^3,
    %e^x*sin(y),3,-1,1,4,2);
```

Solução aproximada: $\hat{u}_n(x)$

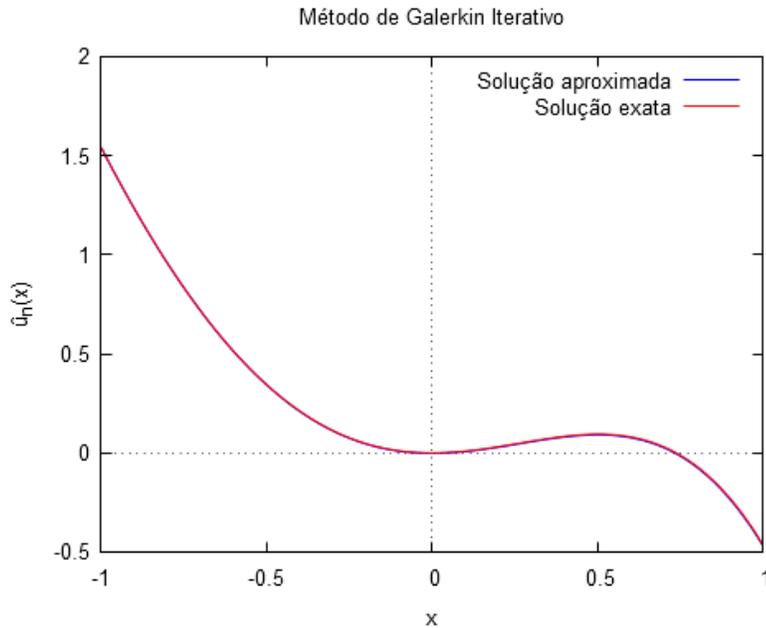
```
(%t2)
```



Vamos desenhar as soluções aproximada e exata.

```
(%i3) wxplot2d([\hat{u}_n(x),x^2*cos(x)-x^3],[x,-1,1],[legend,"Solução aproximada",
    "Solução exata"],[ylabel,"\hat{u}_n(x)"],[title,"Método de Galerkin iterativo"]);
```

```
(%t3)
```



Graficamente já percebe-se uma melhora da solução aproximada (veja o gráfico do Exemplo 3.2).

A seguinte tabela mostra os erros para cada $n \in \{4, 16\}$.

	Método de Galerkin	Método de Galerkin Iterativo
n	$\ u - u_n\ _\infty$	$\ u - \hat{u}_n\ _\infty$
4	$1,34649 \cdot 10^{-1}$	$6,07079 \cdot 10^{-3}$
16	$1,58507 \cdot 10^{-2}$	$5,94851 \cdot 10^{-3}$

■

3.2.2 Método da Colocação Iterativo

O Método da Colocação Iterativo é obtido usando-se as sucessivas aproximações combinadas com o Método da Colocação. Neste caso, a solução do Método de Projeção Iterativo \hat{u}_n nem sempre melhora da aproximação dada pelo Método da Colocação u_n , mas em muitos casos é interessante aplicarmos o método.

Pela análise do erro, sabemos que é baseada na expressão

$$u - \hat{u}_n = (\lambda - KP_n)^{-1}K(I - P_n)u. \quad (3.58)$$

Observe que neste caso o operador projeção P_n é um operador interpolador, como em

(3.11). Diferente do Método de Galerkin, não temos que $\|K(I - P_n)\|$ converge para zero. De fato, podemos mostrar que

$$\|K(I - P_n)\| \geq \|K\|.$$

Assim, para analisarmos a rapidez da convergência de \hat{u}_n devemos analisar caso a caso. Para alguns podemos ter um aproximação melhor. Vamos tratar um caso simples para ilustrar as principais ideias.

Suponha que queremos resolver a equação integral

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.59)$$

usando o Método da Colocação com P_n o operador interpolador quadrático por partes.

Para isto, considere $n \geq 2$ algum inteiro par e defina $h = (b - a)/n$ e os nodais $x_j = a + (j - 1)h$ para $j = 1, \dots, n + 1$. Escolhe-se V_n como o conjunto das funções contínuas que são polinômios quadráticos em cada subintervalo $[x_1, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_{n+1}]$. É fácil ver que a dimensão de V_n é $n + 1$. Seja P_n o operador projeção interpolador definido de $V = C([a, b])$ para V_n . Podemos escrever P_n na forma de Lagrange

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{n+1} u(x_j)l_j(x). \quad (3.60)$$

Devemos diferenciar as funções base de Lagrange $l_j(x)$ para os índices j ímpares e pares. Para os índices j pares, temos

$$l_j(x) = \begin{cases} -(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})/h^2 & \text{se } x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]; \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]. \end{cases}$$

Para os índices j ímpares com $3 \leq j \leq n - 1$, temos

$$l_j(x) = \begin{cases} (x - x_{j-1})(x - x_{j-2})/2h^2 & \text{se } x \in [x_{j-2}, x_j]; \\ (x - x_{j+1})(x - x_{j+2})/2h^2 & \text{se } x \in [x_j, x_{j+2}]; \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{j-2}, x_{j+2}]. \end{cases}$$

As funções $l_1(x)$ e $l_{n+1}(x)$ são modificações adequadas deste último caso.

Se j é ímpar, temos duas fórmulas para o erro de interpolação em $[x_{j-1}, x_j]$:

$$u(x) - P_n u(x) = (x - x_{j-2})(x - x_{j-1})(x - x_j)u[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x] \quad (3.61)$$

e

$$u(x) - P_n u(x) = \frac{(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})(x - x_j)}{6} u''(x), \quad x_{j-2} \leq x \leq x_j \quad (3.62)$$

para algum $c_x \in [x_{j-2}, x_j]$ e $u \in C^3([a, b])$.

A quantidade $u[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x]$ chama-se *Diferença Dividida de Newton* de ordem três para função $u(x)$ e da Análise Numérica, temos que

$$\|u - P_n u\|_\infty \leq \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 \|u'''\|_\infty, \quad u \in C^3[a, b]. \quad (3.63)$$

Para maiores detalhes sobre limitantes e das diferenças divididas consulte [2, 23].

Em resumo, para o Método da Colocação com interpolação quadrática por partes para resolvermos (3.59), o resultado (3.63) implica que

$$\|u - u_n\|_\infty = \mathcal{O}(h^3) \quad (3.64)$$

com $u \in C^3([a, b])$.

Para obtermos o erro de \hat{u}_n , vamos investigar a expressão $K(I - P_n)u$. Para isto, por (3.60) tem-se

$$K(I - P_n)u(x) = \int_a^b k(x, y) \left[u(y) - \sum_{j=1}^{n+1} u(x_j) l_j(y) \right] dy.$$

De (3.61) segue

$$K(I - P_n)u(x) = \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} k(x, y) (y - x_{2j-1})(y - x_{2j})(y - x_{2j+1}) u[x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2j+1}, y] dy. \quad (3.65)$$

Para examinar a integral com mais detalhes escrevemos

$$\int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} g_x(y) \omega(y) dy \quad (3.66)$$

com

$$\omega(y) = (y - x_{2j-1})(y - x_{2j})(y - x_{2j+1})$$

e

$$g_x(y) = k(x, y) u[x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2j+1}, y].$$

Fazendo

$$\nu(y) = \int_{x_{2j-1}}^y \omega(\xi) d\xi, \quad x_{2j-1} \leq x \leq x_{2j+1}$$

tem-se $\nu'(y) = \omega(y)$, $\nu(y) \geq 0$ e $\nu(x_{2j-1}) = \nu(x_{2j+1}) = 0$.

Portanto, a integral (3.66) torna-se

$$\int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} g_x(y)\nu'(y)dy = \underbrace{\nu(y)g_x(y)}_{=0} \Big|_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} - \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} g'_x(y)\nu(y)dy.$$

Logo,

$$\left| \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} g'_x(y)\nu(y)dy \right| \leq \|g'_x\|_\infty \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} \nu(y)dy = \frac{4h^5}{15} \|g'_x\|_\infty$$

com

$$\begin{aligned} g'_x(y) &= \frac{\partial}{\partial y} \{k(x, y)u[x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2j+1}, y]\} \\ &= \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} u[x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2j+1}, y] \\ &\quad + k(x, y)u[x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2j+1}, y, y]. \end{aligned}$$

Esta última fórmula é um resultado clássico da diferenciação das Diferenças Divididas de Newton⁵. Podemos efetuar esta diferenciação para $u \in C^4([a, b])$ e $k_x \in C^1[a, b]$, pois, neste caso, temos que $g \in C^1([a, b])$.

Combinando estes resultados concluímos que

$$K(I - P_n)u(x) = \mathcal{O}(h^4). \quad (3.67)$$

Em resumo:

Teorema 3.2. *Supondo que a equação integral (3.59) tem uma única solução para toda $f \in C([a, b])$. Além disso, suponha que $u \in C^4([a, b])$ e que a função núcleo $k(x, y)$ é continuamente diferenciável em y . Seja P_n o operador projeção (3.60) definido com a interpolação quadrática por partes.*

Então, usando o método da Colocação para resolvermos a equação $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$ obtemos uma única solução para todo n suficientemente grande, digamos $n \geq n_0$. Além disso, as inversas $(\lambda - P_n K)^{-1}$ são uniformemente limitadas por $M > 0$ e

$$\|u - u_n\|_\infty \leq \|\lambda\|M \|u - P_n u\|_\infty \leq \frac{\sqrt{3}|\lambda|M}{27} h^3 \|u'''\|_\infty, \quad n \geq n_0. \quad (3.68)$$

⁵Cf. K. Atkinson, [2], p. 147.

Para o Método da Colocação Iterativo tem-se

$$\|u - \hat{u}_n\|_\infty \leq ch^4 \quad (3.69)$$

com $c > 0$ uma constante adequada. Consequentemente,

$$\max_{j=1, \dots, n+1} |u(x_j) - u_n(x_j)| = \mathcal{O}(h^4). \quad (3.70)$$

Demonstração: A primeira fórmula de (3.68) segue do Teorema 3.1 aplicado com o operador interpolador P_n considerado. A última desigualdade resulta de (3.63). De (3.58) e (3.67) obtemos o limitante em (3.69). Note que a propriedade (3.44) do operador projeção P_n implica

$$u_n(x_j) = \hat{u}_n(x_j), \quad j = 1, \dots, n+1$$

e combinando este resultado com (3.69) resulta em (3.70). ■

Este teorema, em particular (3.69), mostra que a solução do Método de Colocação Iterativo \hat{u}_n , com interpolação quadrática por partes converge mais rapidamente que as aproximações u_n do Método da Colocação com interpolação quadrática por partes. Porém, quando usamos interpolação linear por partes a solução \hat{u}_n , em geral, não converge com maior rapidez do que a solução u_n .

3.3 Caso não linear

Nesta seção aplicaremos o Método da Colocação para resolução de um classe de equações integrais não lineares. Vamos considerar o problema como um problema de ponto fixo do tipo

$$u = Tu \quad (3.71)$$

com $T : H \subset V \rightarrow V$ um operador completamente contínuo. O espaço V é de Banach, e H é um subconjunto aberto de V . Tomamos o operador T na forma

$$Tu(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y, u(y)) dy \quad (3.72)$$

com $g \in C([a, b])$, $k \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$.

Devemos explicitar as condições da função $k(x, y, z)$ para garantirmos que T seja um operador completamente contínuo em H .

No que segue, vamos apresentar uma modificação do Método da Colocação adequada para resolvermos um caso não linear. Mostraremos alguns resultados sobre a convergência, para os quais usaremos a ideia de “soluções geometricamente isoladas”. Programamos o método com o aplicativo *Maxima* e os resultados obtidos, assim como as ilustrações, serão mostrados no final da seção.

3.3.1 Um exemplo não linear

Considere a equação integral não linear dada por

$$u(x) = f(x) + \int_{\Omega} k(x, y, u(y)) dy \equiv Tu(x), \quad x \in \Omega$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

Sejam V um espaço de Banach, $T : V \rightarrow V$ e V_n o espaço n -dimensional do qual, em analogia com o método da Seção 3.1, tomamos uma projeção u_n de u .

Então,

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.73)$$

com $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_n}\}$ base de V_n .

Mais especificamente, considere V o espaço das funções contínuas e $P_n : V \rightarrow V_n$ o operador projeção interpolador nos nodais $\{x_j; 1 \leq j \leq k_n\}$. Então, resolver a equação aproximada $u_n = P_n T u_n$ é equivalente a encontrar u_n na forma (3.73) cujos $\{c_j\}$ satisfazem o sistema não linear

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = f(x_i) + \int_{\Omega} k \left(x_i, y, \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(y) \right) dy, \quad i = 1, \dots, k_n. \quad (3.74)$$

Como trata-se de um sistema não linear, usualmente é resolvido pelo Método de Newton.

Para ilustrar vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 3.4. *Vamos considerar o problema integral equivalente ao seguinte problema de contorno, que modela problemas da hidrodinâmica⁶:*

$$\begin{cases} u''(x) - e^{u(x)} = 0, & x \in (0, 1); \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.75)$$

⁶Cf. S. Kumar & I. Sloan [19], opus cit., p. 591.

A única solução do problema (3.75) é dada por

$$u^*(x) = -\ln(2) + 2 \ln \left(\frac{c}{\cos(c(x - 1/2)/2)} \right)$$

com $\frac{c}{\cos(c/4)} = \sqrt{2} \Rightarrow c \approx 1,336055694906108$.

O problema integral equivalente é dado por

$$u(x) = \int_0^1 k(x,y)e^{u(y)} dy, \quad x \in [0,1] \quad (3.76)$$

cujos núcleo

$$k(x,y) = \begin{cases} -y(1-x), & y \leq x, \\ -x(1-y), & y > x, \end{cases}$$

é a função de Green para o problema homogêneo acima.

Solução: Para resolvermos o problema integral usaremos o comando `colocacaoIN_hat(f,k,g,a,b,k_n)`, que, essencialmente, trabalha com uma malha uniforme, as funções da base são as hat-functions, usa a regra de Simpson para avaliar as integrais e o Método de Newton para resolver o sistema não linear resultante. Apresentaremos o cálculo para $k_n = 9$.



Resolvendo o Exemplo 3.4

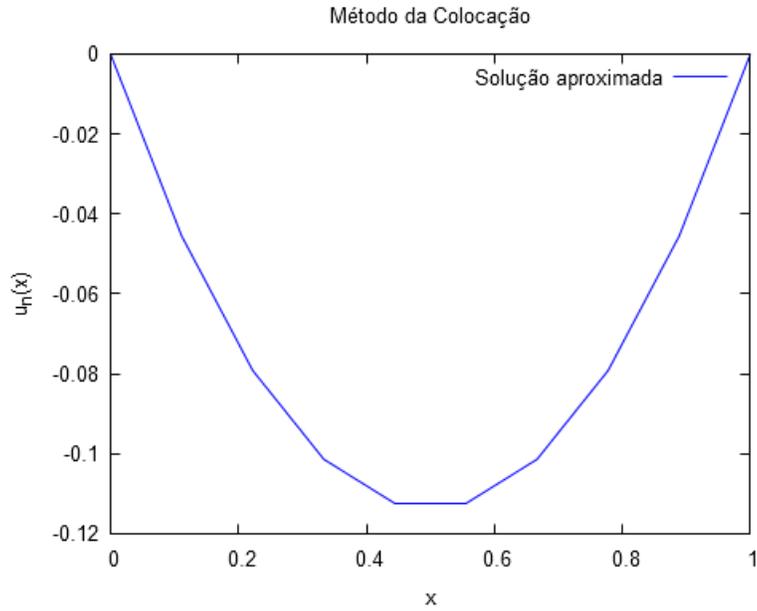
Definindo f , k e g .

```
(%i5) f(x):=0$
      k(x,y):=if (0<=y) and (y<=x) then -y*(1-x) else if
      (x<=y) and (y<=1) then -x*(1-y)$
      g(y,z):=%e^(z)$

(%i6) colocacaoIN_hat(f,k,g,0,1,9);
```

Solução aproximada: $u_n(x)$

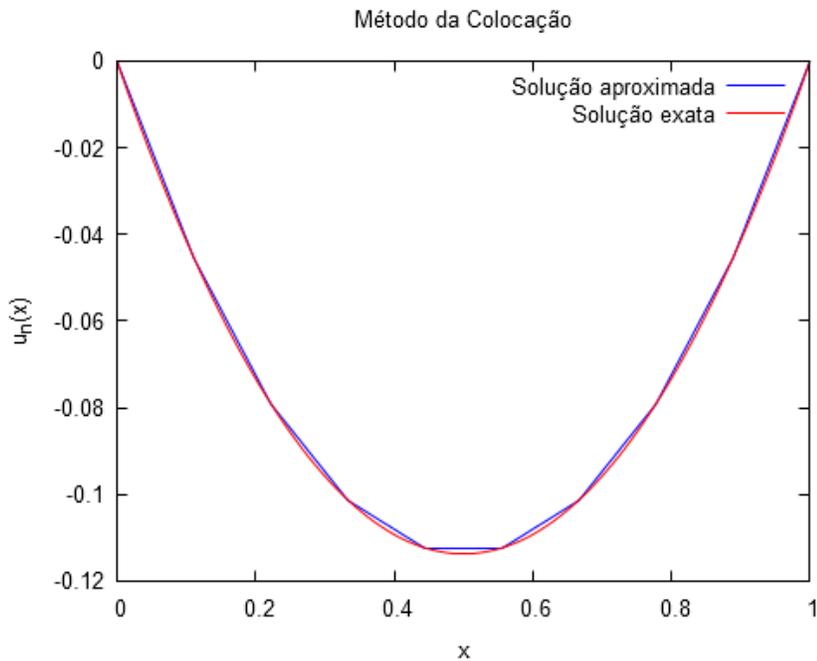
```
(%t6)
```



Comparação gráfica entre soluções aproximada e exata.

```
(%i7) wxplot2d([u_n(x), -log(2)+2*log(c/(cos(c*(x-1/2)/2)))] , [x,0,1],
[legend,"Solução aproximada","Solução Exata"], [ylabel,"u_n(x)"],
[title,"Método da Colocação"]);
```

(%t7)



Observação 3.5. Depois vamos comparar os resultados aqui obtidos pelo Método da Colocação clássico com resultados obtidos pelo Método da Colocação Modificado para a equação integral não linear de Hammerstein.

3.3.2 Equação integral de Hammerstein

Vamos agora apresentar, com um pouco mais de rigor, um Método da Colocação Modificado para a solução da equação integral de Hammerstein. Considere

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, y)g(y, u(y))dy, \quad x \in [a, b] \quad (3.77)$$

em que $-\infty < a < b < \infty$.

Suponhamos a função $g(y, v)$ não linear em v e que as funções f , k e g têm regularidade tal que a expressão

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, y)g(y, u(y))dy = Tu(x), \quad x \in [a, b]$$

define um operador T que é completamente contínuo no espaço de Banach V .

No início desta seção aplicamos o Método da Colocação clássico na equação integral não linear geral, o que resultou no sistema não linear dado em (3.74). Analogamente, podemos aplicar o mesmo procedimento⁷ à equação de Hammerstein.

Considere as mesmas hipóteses da construção de (3.73). Substituindo u_n dada em (3.73) na equação (3.77) e escolhendo como pontos de colocação os pontos nodais $\{x_1, \dots, x_{k_n}\}$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = f(x_i) + \int_{\Omega} k(x_i, y)g\left(y, \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(y)\right) dy, \quad i = 1, \dots, k_n. \quad (3.78)$$

Em acordo com Kumar & Sloan [19] este sistema não linear pode ser resolvido por algum método iterativo. Neste caso, apresenta a desvantagem de termos que calcular numericamente integrais definidas complexas em cada iteração (geralmente, calculadas por algum método de quadratura). Podemos fazer uma modificação no método para evitar esta dificuldade.

⁷Aplicado no Exemplo 3.4.

A ideia é a seguinte: introduzimos uma nova variável dada por

$$z(x) = g(x, u(x)), \quad a \leq x \leq b. \quad (3.79)$$

Substituindo (3.79) em (3.77) obtemos

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, y)z(y)dy, \quad x \in [a, b]. \quad (3.80)$$

Para calcular z devemos resolver a equação integral não linear

$$z(x) = g\left(x, f(x) + \int_a^b k(x, y)z(y)dy\right), \quad x \in [a, b]. \quad (3.81)$$

Resolvendo (3.81) pelo Método da Colocação clássico temos que

$$z_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} d_j \varphi_j(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.82)$$

e os coeficientes $\{d_j\}$ são determinados resolvendo-se (3.81) nos nodais $\{x_j; 1 \leq j \leq k_n\}$, ou seja, resolvendo-se

$$\sum_{j=1}^{k_n} d_j \varphi_j(x_i) = g\left(x_i, f(x_i) + \sum_{j=1}^{k_n} d_j \int_a^b k(x_i, y) \varphi_j(y) dy\right), \quad i = 1, \dots, k_n. \quad (3.83)$$

A aproximação u_n de u de (3.77) é obtida substituindo a aproximação z_n em (3.80). Assim, a aproximação u_n é dada por

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{k_n} d_j \int_a^b k(x, y) \varphi_j(y) dy. \quad (3.84)$$

Os dois procedimentos são equivalentes. Além disso, f , k e g devem satisfazer as seguintes propriedades:

- I.** $f \in C[a, b]$;
- II.** $\sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x, y)| dy < \infty$ e $\lim_{x \rightarrow \xi} \int_a^b |k(x, y) - k(\xi, y)| dy = 0$, $\xi \in [a, b]$;
- III.** A função $g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Além das propriedades acima, o operador integral K deve ser compacto para garantirmos que o operador T seja completamente contínuo. Se $K : L^\infty[a, b] \rightarrow C([a, b])$ ou $K : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ temos que K é compacto.

Considere os seguintes operadores:

$$T(u)(x) = f(x) + Ku(x), \quad x \in [a, b], \quad u \in C([a, b]), \quad (3.85)$$

$$G(u)(x) = g(x, u(x)), \quad x \in [a, b], \quad u \in C[a, b]. \quad (3.86)$$

chamado operador “*substituição*”.

O operador substituição $G(u)$ é contínuo e limitado em $C([a, b])$ (consulte [16, p. 81]).

Assim, as equações integrais (3.77) e (3.81) tornam-se, respectivamente,

$$u = TG(u), \quad u \in C([a, b]), \quad (3.87)$$

$$z = GT(z), \quad z \in C([a, b]). \quad (3.88)$$

Usando a generalização⁸ da Proposição 1.4 como T é completamente contínuo e G é limitado tem-se TG completamente contínuo em $C([a, b])$ e GT é completamente contínuo em $C([a, b])$.

O seguinte lema é o resultado fundamental do método:

Lema 3.4. *Sejam $A = \{u \in C([a, b]); TG(u) = u\}$ e $B = \{z \in C([a, b]); GT(z) = z\}$. Então, $G : A \rightarrow B$ é bijetor e T é sua inversa.*

Este método está interessado em soluções u^* de (3.87) que sejam *geometricamente isoladas*, isto é, que existe uma bola $\{u \in C[a, b]; \|u^* - u\| \leq \alpha\}$, com $\alpha > 0$, que não contém outra solução de (3.87) a não ser u^* .

Lema 3.5. *Se u^* é uma solução geometricamente isolada de (3.87), então $z^* = G(u^*)$ é uma solução geometricamente isolada de (3.88). Reciprocamente, se z^* é uma solução geometricamente isolada de (3.88), então $y^* = T(z^*)$ é uma solução geometricamente isolada de (3.87).*

A abordagem considera importantes atribuições ao *índice* da solução geometricamente isolada, que são os valores da *rotação* do campo vetorial $I - TG$ sobre uma pequena esfera centrada em u^* . Sob poucas suposições da suavidade de g , o operador GT em (3.88) é Fréchet diferenciável.

Para a prova do seguinte resultado consulte [14, p. 499] e [16, p. 81].

⁸Cf. S. Kumar & I. Sloan [19], opus cit., p. 588.

Lema 3.6. *Considere que as hipóteses **I** a **III** são satisfeitas. Suponha que a derivada parcial $g_v(x, v) = \frac{\partial g(x, v)}{\partial v}$ existe e é contínua para $a \leq x \leq b$, $-\infty < v < \infty$. Então o operador G é continuamente Fréchet diferenciável em $C([a, b])$; sua derivada de Fréchet em $u \in C([a, b])$ é um operador linear multiplicativo $G'(u)$ dado por*

$$[G'(u)w](x) = g_v(x, u(x))w(x), \quad x \in [a, b], \quad w \in C([a, b]). \quad (3.89)$$

Além disso, o operador GT é continuamente Fréchet diferenciável em $C([a, b])$ e sua derivada de Fréchet em $z \in C([a, b])$ é um operador linear completamente contínuo $(GT)'(z)$ dado por

$$[(GT)'(z)w](x) = g_v(x, f(x) + (Kz)(x))(Kw)(x), \quad x \in [a, b], \quad C([a, b]). \quad (3.90)$$

No que segue, apresentaremos alguns resultados de convergência e depois ilustraremos o método resolvendo o Exemplo 3.4.

Seja P_n o operador projeção interpolador. Vamos supor que os subespaços V_n e os nodais $\{x_i \in [a, b]; 1 \leq i \leq k_n\}$ são tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w - P_n w\| = 0, \quad \forall w \in C[a, b]. \quad (3.91)$$

Então, segue do Teorema de Banach-Steinhaus 1.5 que P_n é uniformemente limitado. Usando o operador P_n na equação (3.83) obtemos

$$z_n = P_n GT(z_n), \quad z_n \in V_n. \quad (3.92)$$

Do Lema 3.4 ao 3.6 e aplicando diretamente o Teorema 19.7 de Krasnosel'skii [15] obtemos:

Teorema 3.3. *Sejam $u^* \in C[a, b]$ uma solução geometricamente isolada de (3.87) e z^* a solução correspondente de (3.88). Suponha que as hipóteses **I** à **III** são satisfeitas e o operador interpolador P_n satisfaz (3.91).*

(i) *Se u^* possui um índice não nulo, então existe um n_0 tal que para $n \geq n_0$, (3.92) possui uma única solução $z_n \in V_n$ satisfazendo*

$$\|z^* - z_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) Suponha que a derivada parcial $g_v(x, v)$ existe e é contínua para $a \leq x \leq b$, $-\infty < v < \infty$, e 1 não é autovalor do operador linear $(GT)'(z^*)$. Então existe uma vizinhança de z^* e um n_1 tal que para $n \geq n_1$ uma solução z_n de (3.92) é única nessa vizinhança, também

$$c_2 \|z^* - P_n z^*\| \leq \|z^* - z_n\| \leq c_3 \|z^* - P_n z^*\|,$$

em que $c_2, c_3 > 0$ não dependem de n .

Corolário 3.1. Sob às hipóteses do Teorema 3.3 (ii) existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$\|z^* - z_n\| \leq c_4 \inf_{\varphi \in V_n} \|z^* - \varphi\|.$$

Demonstração: Para qualquer $\varphi \in V_n$,

$$\|z^* - P_n z^*\| = \|(I - P_n)(z^* - \varphi)\| \leq (1 + \|P_n\|) \|z^* - \varphi\|.$$

O resultado segue da limitação uniforme de P_n . ■

A convergência de u_n é dada no seguinte resultado:

Teorema 3.4. Sejam $u^* \in C[a, b]$ uma solução geometricamente isolada de (3.87) e z^* a solução correspondente de (3.88). Suponha que as hipóteses **I** à **III** são satisfeitas e o operador interpolador P_n satisfaz (3.91).

(i) Se u^* possui um índice não nulo, então com z_n como no Teorema 3.3 (i), e $n \geq n_0$, (3.84) define uma aproximação $u_n \in C[a, b]$ satisfazendo

$$\|u^* - u_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) Suponha que a derivada parcial $g_v(x, v)$ existe e é contínua para $a \leq x \leq b$, $-\infty < v < \infty$, e 1 não é autovalor do operador linear $(GT)'(z^*)$. Então para $n \geq n_1$ a aproximação u_n dada por (3.84), com z_n como no Teorema 3.3(ii), satisfaz

$$\|u^* - u_n\| \leq c_5 \inf_{\varphi \in V_n} \|z^* - \varphi\|,$$

em que $c_5 > 0$ não depende de n .

Demonstração: (i) Desde que T seja uma aplicação de $L_\infty[a, b]$ para $C[a, b]$, segue imediatamente da definição $u_n = T(z_n)$ que $u_n \in C[a, b]$. Pelo Lema 3.4,

$$u^* = T(z^*) = f + Kz^*,$$

e, desde que

$$\|u^* - u_n\| = \|K(z^* - z_n)\| \leq \|K\| \|z^* - z_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

em que

$$\|K\| = \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x, y)| dy < \infty.$$

(ii) Segue analogamente, com a ajuda do Corolário 3.1. ■

Assim, a razão de convergência de u_n para u^* é bem menor que a melhor taxa de convergência de z_n para z^* em V_n .

Exemplo 3.5. *Vamos resolver o mesmo problema do Exemplo 3.4, só que agora com o Método da Colocação Modificado. Vamos obter soluções aproximadas para os mesmos valores de k_n utilizados no exemplo citado.*

Solução: Usaremos o comando `colocacaoMDIN_hat` nas mesmas condições anteriores. Apresentaremos os resultados para $k_n = 9$.



Resolvendo o Exemplo 3.5

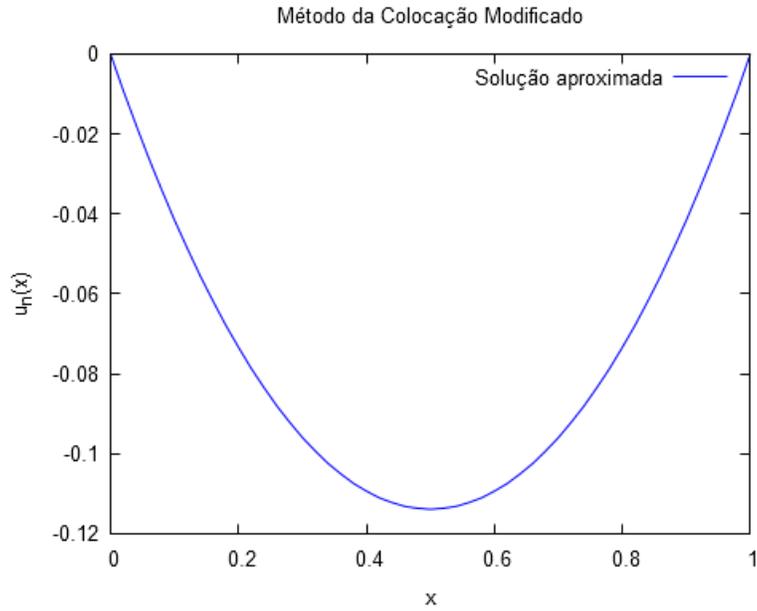
Definindo f , k e g .

```
(%i5) f(x):=0$
      k(x,y):=if (0<=y) and (y<=x) then -y*(1-x) else
      if (x<=y) and (y<=1) then -x*(1-y)$
      g(y,z):=%e^(z)$

(%i6) colocacaoMDIN_hat(f,k,g,0,1,9);
```

Solução aproximada: $u_n(x)$

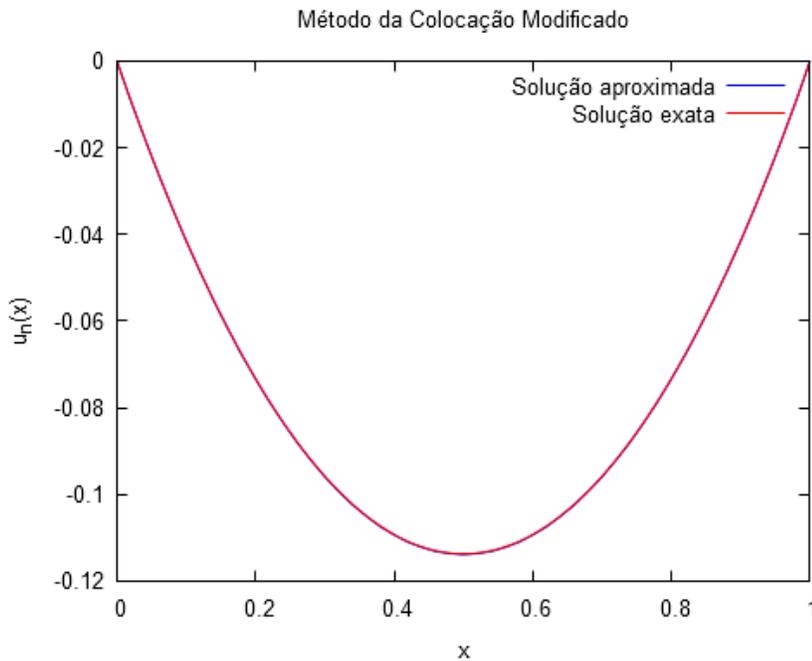
```
(%t6)
```



Comparação gráfica entre soluções aproximada e exata.

```
(%i7) wxplot2d([u_n(x), -log(2)+2*log(c/(cos(c*(x-1/2)/2)))] , [x,0,1],
[legend,"Solução aproximada","Solução exata"], [ylabel,"u_n(x)"],
[title,"Método da Colocação Modificado"]);
```

(%t7)



Na tabela apresentamos as estimativas dos erros para o Método da Colocação clássico e o Modificado, considerando as aproximações z_n de z^* e u_n de u^* .

Método da Colocação		Método da Colocação Modificado	
n	$\ u - P_n u\ _\infty$	$\ z^* - z_n\ _\infty$	$\ u^* - u_n\ _\infty$
5	$4,69891 \cdot 10^{-3}$	$5,16774 \cdot 10^{-3}$	$3.93489 \cdot 10^{-4}$
9	$1,48689 \cdot 10^{-3}$	$1,70441 \cdot 10^{-3}$	$1.61319 \cdot 10^{-4}$
17	$4,21965 \cdot 10^{-4}$	$4.96968 \cdot 10^{-4}$	$8.86112 \cdot 10^{-5}$
33	$1,13415 \cdot 10^{-4}$	$1.13549 \cdot 10^{-4}$	$6.72206 \cdot 10^{-5}$
65	$2,94131 \cdot 10^{-5}$	$3,54314 \cdot 10^{-5}$	$6,14363 \cdot 10^{-6}$

Com as estimativas do erro e a comparação entre os gráficos, verificamos que as aproximações foram melhoradas (volte no Exemplo 3.4). Além disso, verifica-se a maior rapidez de convergência de u_n para u^* comparada com a rapidez da convergência de z_n para z^* . ■

Capítulo 4

O Método de Nyström

Originalmente introduzido baseado na integração numérica de operadores integrais na equação

$$\lambda u(x) - \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.1)$$

A solução resultante é obtida primeiramente num conjunto de pontos nodais da quadratura e então é estendida para todos os pontos de Ω por um método de interpolação. O método é de simples implementação computacional, porém a análise de erro é mais sofisticada do que os métodos de projeção.

4.1 O Método de Nyström para núcleos contínuos

Seja uma integração numérica dada por

$$\int_{\Omega} g(y)dy \approx \sum_{j=1}^{q_n} \omega_j g(x_j), \quad g \in C(\Omega). \quad (4.2)$$

Suponhamos que para todo $g \in C(\Omega)$, a integração numérica converge para o valor da integral original. Isto implica

$$c_I \equiv \sup_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{q_n} |\omega_j| < \infty. \quad (4.3)$$

Seja $k(x, y)$ uma função contínua $\forall x, y \in \Omega$, com Ω compacto em \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Usando

um esquema de quadratura para aproximar a integral em (4.1), obtemos

$$\lambda u_n(x) - \sum_{j=1}^{q_n} \omega_j k(x, x_j) u_n(x_j) = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.4)$$

Para encontrar a solução $u_n(x)$, tomamos x como os pontos nodais da quadratura x_i , o que resulta no seguinte sistema linear

$$\lambda u_n(x_i) - \sum_{j=1}^{q_n} \omega_j k(x_i, x_j) u_n(x_j) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, q_n \quad (4.5)$$

cuja incógnita é o vetor $\mathbf{u}_n = (u_n(x_1), \dots, u_n(x_{q_n}))^T$.

Cada solução de (4.4) é uma solução de (4.5), o inverso também é verdade. Para cada solução de (4.5) $\mathbf{z}_n = (z_1, \dots, z_{q_n})^T$, existe uma única solução de (4.4) que se iguala nos pontos nodais. Isso se verifica utilizando-se

$$z(x) = \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \sum_{j=1}^{q_n} \omega_j k(x, x_j) z_j \right], \quad x \in \Omega \quad (4.6)$$

que é uma fórmula de interpolação. A fórmula (4.6) é chamada de *Fórmula de Interpolação de Nyström*.

Ilustraremos o método com o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1. *Considere a equação*

$$u(x) = xe^x - x + \int_0^1 xu(y)dy,$$

cuja solução exata é $u(x) = xe^x$. Calcule-a usando o Método de Nyström com a regra de Simpson para $n = 4$ subintervalos (o que significa que $q_n = n + 1$).

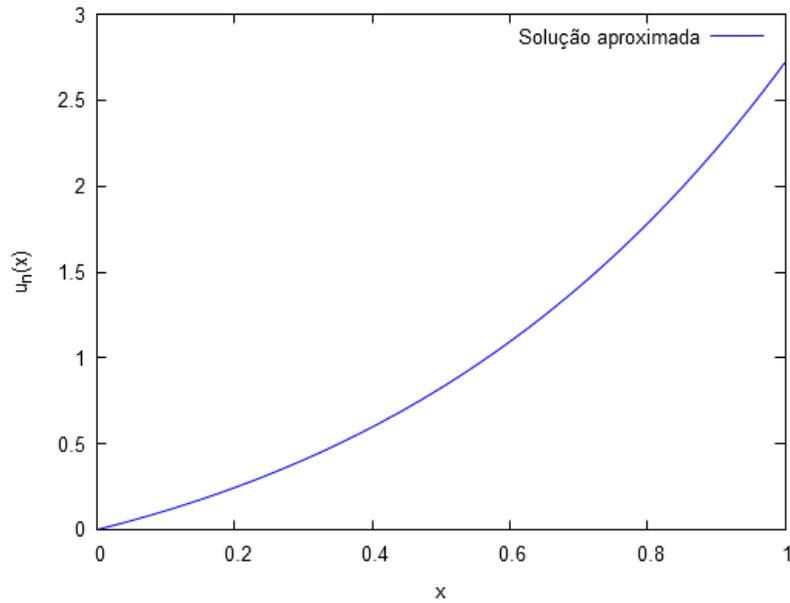
Solução: Utilizaremos o comando `nystrom_Simpson(f(x),k(x,y),lambda,a,b,n)`.



Exemplo 4.1

```
(%i2) nystrom_Simpson(x*e^x-x,x,1,0,1,4);
```

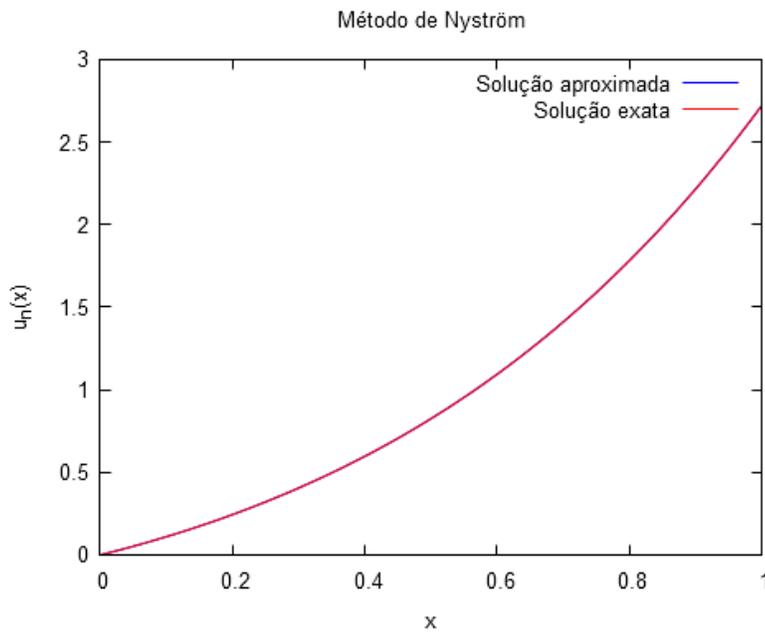
```
(%t2)
```



Vamos desenhar as soluções aproximada e exata.

```
(%i3) wxplot2d([u_n(x),x*exp(x)], [x,0,1], [legend,"Solução aproximada",
      "Solução exata"], [ylabel,"u_n(x)"], [title,"Método de Nyström"]);
```

```
(%t3)
```



Perceba a precisão mostrada no último gráfico, isso se deve, principalmente, à eficiência do método e da linearidade do problema. ■

4.1.1 Análise de erro do Método de Nyström

Considere (4.1) na forma

$$(\lambda - K)u = f$$

e a equação integral aproximada (4.4) dada por

$$(\lambda - K_n)u_n = f.$$

Para $V = C(\Omega)$ o operador integração numérica

$$K_n u(x) = \sum_{j=1}^{q_n} \omega_j k(x, x_j) u(x_j), \quad x \in \Omega, \quad u \in V \quad (4.7)$$

é definido em V , é um operador limitado, com posto finito e norma dada por

$$\|K_n\| = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{q_n} |\omega_j k(x, x_j)|. \quad (4.8)$$

A análise do erro nos métodos de projeção dependiam de que $\|K - K_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, com $K_n = P_n K$ a aproximação do operador integral K . Isso não pode ser feito aqui, pois

$$\|K - K_n\| \geq \|K\|,$$

Vamos buscar outras estimativas para o erro.

Lema 4.1. *Sejam Ω um compacto em \mathbb{R}^d e $k(x, y)$ uma função contínua $\forall x, y \in \Omega$. Considere que o esquema de quadratura (4.2) converge. Defina*

$$e_n(x, y) = \int_{\Omega} k(x, v) k(v, y) dv - \sum_{j=1}^{q_n} \omega_j k(x, x_j) k(x_j, y), \quad x, y \in \Omega, \quad n \geq 1 \quad (4.9)$$

o erro da integração numérica para o integrando $k(x, \cdot) k(\cdot, y)$. Então, para $z \in C(\Omega)$ tem-se

$$(K - K_n)Kz(x) = \int_{\Omega} e_n(x, y) z(y) dy, \quad (4.10)$$

$$(K - K_n)K_n z(x) = \sum_{j=1}^{q_n} \omega_j e_n(x, x_j) z(x_j). \quad (4.11)$$

Além disso, temos também

$$\|(K - K_n)K\| = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |e_n(x, y)| dy \quad (4.12)$$

$$\|(K - K_n)K_n\| = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{q_n} |\omega_j e_n(x, x_j)|. \quad (4.13)$$

Finalmente, o erro da integração numérica converge uniformemente para zero em Ω , ou seja,

$$c_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x, y \in \Omega} |e_n(x, y)| = 0 \quad (4.14)$$

o que implica

$$\|(K - K_n)K\|, \quad \|(K - K_n)K_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Demonstração: As igualdades em (4.10) e (4.11) são apenas manipulações simples e omitiremos aqui. Sabemos que $(K - K_n)K$ é um operador integral em $C(\Omega)$, por (4.10) e por (4.12) temos que ele é limitado. A prova de (4.13) é imediata.

Para provar (4.14), vamos mostrar que $\{e_n(x, y); n \geq 1\}$ é uma família uniformemente limitada e equicontínua tal que converge pontualmente para 0 no compacto Ω e então $e_n(x, y) \rightarrow 0$ uniformemente em Ω pelo Teorema de Arzelà-Ascoli.

De fato, por hipótese temos que a regra de integração numérica (4.2) converge para todo $g \in C(\Omega)$, temos que para cada $x, y \in \Omega$, implica $e_n(x, y) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

A limitação segue de

$$|e_n(x, y)| \leq (c_\Omega + c_I)c_k^2$$

com

$$c_\Omega = \int_{\Omega} dy, \quad c_k = \max_{x, y \in \Omega} |k(x, y)|, \quad c_I = \sup_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{q_n} |\omega_j|.$$

Para a equicontinuidade fazemos

$$|e_n(x, y) - e_n(\xi, \eta)| \leq |e_n(x, y) - e_n(\xi, y)| + |e_n(\xi, y) - e_n(\xi, \eta)|,$$

$$|e_n(x, y) - e_n(\xi, y)| \leq c_k(c_\Omega + c_I) \max_{y \in \Omega} |k(x, y) - k(\xi, y)| \quad e$$

$$|e_n(\xi, y) - e_n(\xi, \eta)| \leq c_k(c_\Omega + c_I) \max_{x \in \Omega} |k(x, y) - k(x, \eta)|$$

pela continuidade uniforme de $k(x, y)$ no compacto Ω , isso mostra a equicontinuidade de $\{e_n(x, y)\}$ e a prova de (4.14) está completa.

A prova de (4.15) segue de

$$\|(K - K_n)K\| \leq c_\Omega \max_{x, y \in \Omega} |e_n(x, y)|, \quad \|(K - K_n)K_n\| \leq c_I \max_{x, y \in \Omega} |e_n(x, y)|.$$

■

Teorema 4.1. *Sejam V um espaço de Banach, S e T contínuos com S compacto. Para cada $\lambda \neq 0$ dado, suponhamos $\lambda - T : V \rightarrow V$ bijetor, então $(\lambda - T)^{-1}$ existe e é limitado.*

Assuma

$$\|(T - S)S\| < \frac{|\lambda|}{\|(\lambda - T)^{-1}\|}. \quad (4.16)$$

Então $(\lambda - S)^{-1}$ existe e é limitado, com

$$\|(\lambda - S)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(\lambda - T)^{-1}\| \|S\|}{|\lambda| - \|(\lambda - T)^{-1}\| \|(T - S)S\|}. \quad (4.17)$$

Se $(\lambda - T)u = f$ e $(\lambda - S)z = f$, então

$$\|u - z\| \leq \|(\lambda - S)^{-1}\| \|Tu - Su\|. \quad (4.18)$$

Demonstração: Se $(\lambda - S)^{-1}$ existe, então satisfaz

$$(\lambda - S)^{-1}(\lambda - S) = I \Rightarrow (\lambda - S)^{-1} = \frac{1}{\lambda}[I + (\lambda - S)^{-1}S]. \quad (4.19)$$

Da Teoria de aproximação por uma família de operadores compactos (que veremos a seguir na Subsecção 4.1.2) podemos considerar a aproximação

$$(\lambda - S)^{-1} \approx \frac{1}{\lambda}[I + (\lambda - T)^{-1}S]. \quad (4.20)$$

Calculemos

$$\frac{1}{\lambda}[I + (\lambda - T)^{-1}S](\lambda - S) = I + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}(T - S)S. \quad (4.21)$$

O lado direito é invertível pelo Teorema das séries geométricas 1.1, devido a

$$\frac{1}{|\lambda|} \|(\lambda - T)^{-1}\| \|(T - S)S\| < 1,$$

também,

$$\|[\lambda + (\lambda - T)^{-1}(T - S)S]^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|(\lambda - T)^{-1}\| \|(T - S)S\|}. \quad (4.22)$$

Desde que o lado direito de (4.21) seja invertível o lado esquerdo também é. Isso implica que $(\lambda - S)$ é injetivo, caso contrário não teríamos o resultado. Como S é compacto a Alternativa de Fredholm 1.8 garante que $(\lambda - S)^{-1}$ existe e é limitado. Em particular,

$$(\lambda - S)^{-1} = [\lambda + (\lambda - T)^{-1}(T - S)S]^{-1}[I + (\lambda - T)^{-1}S]. \quad (4.23)$$

A desigualdade (4.17) segue diretamente de (4.22).

Para o erro $u - z$, reescrevemos $(\lambda - T)u = f$ como $(\lambda - S)u = f + (T - S)u$ e subtraindo $(\lambda - S)u = f$ resulta

$$(\lambda - S)(u - z) = (T - S)u \quad (4.24)$$

$$u - z = (\lambda - S)^{-1}(T - S)u, \quad (4.25)$$

tomando a norma

$$\|u - z\| \leq \|(\lambda - S)^{-1}\| \|(T - S)u\|.$$

■

Teorema 4.2. *Sejam Ω um compacto de \mathbb{R}^d e $k(x, y)$ contínua para $x, y \in \Omega$. Considere o esquema de quadratura (4.2) convergente para toda função contínua em Ω . Além disso, suponha que a equação integral (4.1) possui única solução para uma dada $f \in C(\Omega)$, com $\lambda \neq 0$. Então, existe n_0 tal que para cada $n \geq n_0$, a inversa aproximante $(\lambda - K_n)^{-1}$ existe e é uniformemente limitada,*

$$\|(\lambda - K_n)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(\lambda - K)^{-1}\| \|K_n\|}{|\lambda| - \|(\lambda - K)^{-1}\| \|(K - K_n)K_n\|} \leq c_y, \quad n \geq n_0.$$

Com cada $c_y < \infty$. Para as equações $(\lambda - K)u = f$ e $(\lambda - K_n)u_n = f$, temos

$$\|u - u_n\|_\infty \leq \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \|(K - K_n)u\|_\infty \leq c_y \|(K - K_n)u\|_\infty, \quad n \geq n_0. \quad (4.26)$$

Demonstração: Esta demonstração é uma simples aplicação do Teorema 4.1, com $S = K_n$ e $T = K$. Do Lema 4.1, temos que $\|(K - K_n)K_n\| \rightarrow 0$ e portanto (4.16) é satisfeita para $n \geq n_0$. De (4.8), da limitação de $k(x, y)$ sobre Ω e também de (4.3) temos que

$$\|K_n\| \leq c_I c_k, \quad n \geq 1.$$

Então

$$c_y \equiv \sup_{n \geq n_0} \frac{1 + \|(\lambda - K)^{-1}\| \|K_n\|}{|\lambda| - \|(\lambda - K)^{-1}\| \|(K - K_n)K_n\|} < \infty. \quad (4.27)$$

■

O último teorema fornece todas informações necessárias para a análise de convergência do Método de Nyström (4.4)-(4.6). O termo $\|(K - K_n)K_n\|$ pode ser analisado de (4.13)

observando o erro $e_n(x, y)$ (de (4.9)) da integração numérica. Do limitante do erro (4.26), a rapidez com que $\|u - u_n\|_\infty$ converge à zero é limitada pelo erro da integração numérica

$$\|(K - K_n)u\|_\infty = \max_{x \in \Omega} \left| \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy - \sum_{j=1}^{q_n} \omega_j k(x, x_j)u(x_j) \right|. \quad (4.28)$$

De fato, o erro $\|u - u_n\|_\infty$ converge à zero com exatamente esta rapidez. De fato, de (4.24) tem-se

$$(\lambda - K_n)(u - u_n) = (K - K_n)u.$$

Do qual resulta

$$\|(K - K_n)u\|_\infty \leq \|(\lambda - K_n)\| \|u - u_n\|_\infty.$$

Quando combinado com (4.26), temos que $\|u - u_n\|_\infty$ e $\|(K - K_n)u\|_\infty$ convergem à zero com a mesma rapidez.

4.1.2 Aproximação por uma família de operadores compactos

A análise de erro do Método de Nyström foi principalmente desenvolvida durante o período de 1940 à 1970, com muitos pesquisadores envolvidos. Inicialmente com apenas um objetivo: mostrar que o método tinha estabilidade e convergência.

Com o primeiro objetivo alcançado, o segundo objetivo foi criar uma teoria geral para o método que possibilitasse sua aplicação em problemas com operadores aproximantes e não apenas o caso particular dos operadores integrais ou esquemas de quadratura. Os últimos resultados obtidos foram devido a P. M. Anselone, que nomeou de *Teoria de aproximação por uma família de operadores compactos*. Com esta teoria é possível analisar um número significativo de variações do Método de Nyström.

Nesta seção vamos analisar as propriedades e características dos operadores integrais numéricos os quais satisfaçam $\|(K - K_n)K_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Suponhamos que $\{K_n; n \geq 1\}$ satisfaça as seguintes propriedades:

- A1. V é um espaço de Banach; K e K_n , $n \geq 1$ são operadores lineares de V em V ;
- A2. $K_n u \rightarrow K u$ quando $n \rightarrow \infty$, $\forall u \in V$;

A3. O conjunto $\{K_n; n \geq 1\}$ é uma família de operadores compactos, o que significa que o conjunto

$$S = \{K_n v; n \geq 1 \text{ e } \|v\| \leq 1\} \quad (4.29)$$

possui fecho compacto em V .

Vamos nos referir à família $\{K_n\}$ que satisfaz as propriedades A1-A3 como uma *família de operadores compactos e pontualmente convergentes*.

Lema 4.2. *Considere as propriedades A1-A3. Então:*

(1). K é compacto;

(2). $\{K_n; n \geq 1\}$ é uniformemente limitado;

(3). Para algum operador compacto $M : V \rightarrow V$,

$$\|(K - K_n)M\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

(4). $\|(K - K_n)K_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$.

Demonstração: (1). Para mostrar que K é compacto é suficiente mostrar que o conjunto

$$\{Kv; \|v\| \leq 1\}$$

possui fecho compacto em V . Por A2 esse conjunto está contido em \overline{S} ; e esse por A3 é compacto.

(2). Segue diretamente da definição da norma de operadores e da limitação do conjunto \overline{S} .

(3). Usando a definição da norma de operadores

$$\begin{aligned} \|(K - K_n)M\| &= \sup_{\|v\| \leq 1} \|(K - K_n)Mv\| \\ &= \sup_{z \in M(B)} \|(K - K_n)z\| \end{aligned} \quad (4.30)$$

com $B = \{v; \|v\| \leq 1\}$. Da compacidade de M , o conjunto $M(B)$ possui fecho compacto. Usando o Lema 3.1 temos que (4.30), quando $n \rightarrow \infty$, converge para zero.

(4). Novamente, usando a definição de norma

$$\|(K - K_n)K_n\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|(K - K_n)K_nv\| = \sup_{z \in S} \|(K - K_n)z\|. \quad (4.31)$$

Usando A3, S é relativamente compacto; em seguida pelo Lema 3.1 temos que (4.31) converge para zero, quando $n \rightarrow \infty$. ■

Retornando à prova do Teorema 4.1. A motivação de uma certa aproximação com $S = K_n$ e $T = K$, (4.19) e (4.20) são

$$(\lambda - K_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda} [I + (\lambda - K_n)^{-1} K_n] \quad (4.32)$$

$$(\lambda - K_n)^{-1} \approx \frac{1}{\lambda} [I + (\lambda - K)^{-1} K_n]. \quad (4.33)$$

Se K_n não converge, na norma, para K , não podemos esperar que $(\lambda - K_n)^{-1} \approx (\lambda - K)^{-1}$ seja uma boa aproximação. Contudo, torna-se uma aproximação muito melhor quando os operadores atuam num subconjunto compacto de V . Uma vez que a família $\{K_n\}$ é uma família compacta, (4.33) é uma boa aproximação de (4.32).

4.2 Produto Integração

Esta seção trata do método de resolução numérica de equações integrais de segunda espécie com núcleos singulares (mas para algum operador integral compacto em $C(\Omega)$), em particular $k(x, y) = g(x, y) \ln|x - y|$, o qual vamos tratar no Capítulo 5.

Este método usa uma interpolação do integrando, similar ao Método de Nyström (inclusive sua análise de erro usará alguns destes resultados), e nos subintervalos em que o núcleo é singular calcula-se tais integrais diretamente.

A ideia do método se estende para funções de várias variáveis, entretanto, é mais intuitivo apresentar a ideia do método para equações integrais de uma variável, em particular, para o caso linear

$$\lambda u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, y)u(y)dy \quad a \leq x \leq b. \quad (4.34)$$

com a função núcleo $k(x, y)$ tendo uma singularidade.

Os exemplos mais importantes são $\ln|x - y|$, $|x - y|^{\gamma-1}$ (para $0 < \gamma < 1$) e suas variantes.

Introduziremos a ideia de produto integração e aplicaremos no caso especial

$$\lambda u(x) = f(x) + \int_a^b l(x, y) \ln |y - x| u(y) dy, \quad a \leq x \leq b. \quad (4.35)$$

Observe que o núcleo é dado pelo produto

$$k(x, y) = l(x, y) \ln |y - x|. \quad (4.36)$$

Assumiremos que $l(x, y)$ é bem regular e vamos supor que a incógnita $u(x)$ também é bem regular. Para resolver (4.35) definiremos um método chamado de *Regra do Produto Trapezoidal*.

Seja $n \geq 1$ um inteiro, $h = (b - a)/n$, e $x_j = a + (j - 1)h$ para $j = 1, \dots, n + 1$. Para $u \in C[a, b]$, definamos

$$[l(x, y)u(y)]_n = \frac{1}{h} [(x_j - y)l(x, x_{j-1})u(x_{j-1}) + (y - x_{j-1})l(x, x_j)u(x_j)], \quad (4.37)$$

para $x_j \leq y \leq x_{j+1}$, $j = 1, \dots, n$ e $a \leq x \leq b$.

Note que (4.37) é linear por partes em y e interpola $l(x, y)u(y)$ nos nodais $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, $\forall x \in [a, b]$.

Definamos a integração numérica do operador integral em (4.35) por

$$K_n u(x) \equiv \int_a^b [l(x, y)u(y)]_n \ln |y - x| dy, \quad a \leq x \leq b. \quad (4.38)$$

Isto também pode ser escrito como

$$K_n u(x) = \sum_{j=1}^{n+1} w_j(x) l(x, x_j) u(x_j) \quad (4.39)$$

com pesos

$$w_1(x) = \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - y) \ln |x - y| dy, \quad (4.40)$$

$$w_{n+1}(x) = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (y - x_n) \ln |x - y| dy, \quad (4.41)$$

$$w_j(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (y - x_{j-1}) \ln |x - y| dy + \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - y) \ln |x - y| dy, \quad j = 2, \dots, n. \quad (4.42)$$

Para aproximar a equação integral (4.35) usamos

$$\lambda u_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n+1} w_j(x) l(x, x_j) u_n(x_j), \quad a \leq x \leq b. \quad (4.43)$$

Como no Método de Nyström (4.4)-(4.6), fazemos

$$\lambda u_n(x_i) = f(x_i) + \sum_{j=1}^{n+1} w_j(x_i) l(x_i, x_j) u_n(x_j), \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (4.44)$$

Resolvido o sistema linear cujo vetor incógnita é $\mathbf{u}_n = (u_n(x_1), \dots, u_n(x_{n+1}))^T$, estendemos a solução para todo $\Omega = [a, b]$ usando a Fórmula de Interpolação de Nyström (4.6) ou alguma outra.

Observação 4.1. *Com esse método aproximamos a parte do integrando de (4.35) que pode ser aproximada por interpolação linear, e integramos diretamente a parte do integrando que é mais singular. Em vez da interpolação linear, um esquema de interpolação mais preciso pode ser usado para obter uma convergência mais rápida do método numérico. Outra função núcleo singular, tratada de maneira análoga a (4.35) é*

$$\lambda u(x) = f(x) + \int_a^b l(x, y) g(x, y) u(y) dy, \quad a \leq x \leq b, \quad (4.45)$$

em que

$$g(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{1-\gamma}}$$

para algum $\gamma > 0$. Para aproximar (4.45) usamos (4.37). Então

$$K_n u(x) = \int_a^b [l(x, y) u(y)]_n g(x, y) dy, \quad a \leq x \leq b, \quad (4.46)$$

e ficamos com

$$\lambda u_n(x) = f(x) + \int_a^b [l(x, y) u(y)]_n g(x, y) dy, \quad a \leq x \leq b. \quad (4.47)$$

Todos os argumentos são exatamente como antes. Para avaliar $K_n u(x)$ precisamos dos pesos (4.40)-(4.42) análogos, que são avaliados, para o presente caso, substituindo $\ln|x - y|$ por $g(x, y)$.

4.2.1 Análise de erro

Consideremos a equação (4.45) e $l(x, y)$ contínua. Além disso, vamos supor que $g(x, y)$ satisfaz

$$c_g \equiv \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |g(x, y)| dy < \infty, \quad (4.48)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0, \quad (4.49)$$

com

$$\omega_g(h) \equiv \sup_{\substack{|x-\tau| \leq h \\ a \leq x, \tau \leq b}} \int_a^b |g(x, \tau) - g(\tau, y)| dy.$$

Pode ser mostrado que essas duas propriedades são verdadeiras para $\ln|x-y|$ e $|x-y|^{\gamma-1}$, $\gamma > 0$. Tais hipóteses já foram usadas na Subseção 1.2.2 para mostrar a compacidade de operadores integrais.

Teorema 4.3. *Suponha que a função $g(x, y)$ satisfaça as hipóteses (4.48)-(4.49), e assumamos que $l(x, y)$ seja contínua para $a \leq x, y \leq b$. Para uma dada $f \in C([a, b])$, suponha que a equação integral*

$$\lambda u(x) - \int_a^b l(x, y)g(x, y)u(y)dy = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

tem uma única solução.

Considere a aproximação numérica (4.46), com $[l(x, y)u(y)]_n$ definido com a interpolação linear por partes, como em (4.37). Então para todo n suficientemente grande, digamos $n \geq n_0$, a equação (4.47) tem uma única solução e os operadores inversos são uniformemente limitados para cada n . Além disso,

$$\|u - u_n\|_\infty \leq c \|Ku - K_n u\|_\infty, \quad n \geq n_0, \quad (4.50)$$

para uma adequada constante $c > 0$.

Demonstração: Mostraremos que os operadores $\{K_n\}$ de (4.46) formam uma família de operadores compactos e uma família pontualmente convergente em $C([a, b])$. Isso provará as hipóteses **A1-A3** da Subseção 4.1.2; e, pelo Lema 4.2 podemos aplicar o Teorema 4.2. Notamos que **A1** é óbvio pela definição de K e K_n .

Seja $\mathcal{S} = \{K_n v; n \geq 1 \text{ e } \|v\|_\infty \leq 1\}$. Para limitar $\|K_n u\|_\infty$, primeiro observe que a interpolação linear por partes de uma função $z \in C[a, b]$ satisfaz

$$\|z_n\|_\infty \leq \|z\|_\infty.$$

Com isto, fica fácil ver que

$$\|K_n u\|_\infty \leq c_l c_g, \quad u \in C[a, b], \quad \|u\|_\infty \leq 1$$

com

$$c_l \equiv \max_{a \leq x, y \leq b} |l(x, y)|.$$

Isto também mostra a limitação uniforme de $\{K_n\}$, com

$$\|K_n\| \leq c_l c_g, \quad n \geq 1.$$

Para a equicontinuidade de \mathcal{S} escreva

$$\begin{aligned} K_n u(x) - K_n u(\xi) &= \int_a^b [l(x, y)u(y)]_n g(x, y) dy - \int_a^b [l(\xi, y)u(y)]_n g(\xi, y) dy \\ &= \int_a^b \{[l(x, y) - l(\xi, y)]u(y)\}_n g(x, y) dy \\ &\quad + \int_a^b [l(\xi, y)u(y)]_n [g(x, y) - g(\xi, y)] dy. \end{aligned}$$

Nesta última passagem utilizamos a linearidade da interpolação. As hipóteses de $g(x, y)$ e $l(x, y)$ em conjunto com $\|u\|_\infty \leq 1$ implicam que

$$\left| \int_a^b \{[l(x, y) - l(\xi, y)]u(y)\}_n g(x, y) dy \right| \leq c_g \|u\|_\infty \max_{a \leq y \leq b} |l(x, y) - l(\xi, y)|.$$

Também,

$$\left| \int_a^b [l(\xi, y)u(y)]_n [g(x, y) - g(\xi, y)] dy \right| \leq c_l \|u\|_\infty \omega_g(|x - \xi|).$$

Combinando esses resultados mostramos a equicontinuidade desejada de \mathcal{S} e provamos a propriedade **A3**.

A condição **A2** segue de (4.48) e pelo fato de $l, u \in C([a, b])$, o que significa afirmar que a integração numérica converge. Para completar a prova aplicamos o Lema 4.2 e o Teorema 4.2. A constante c é um limitante uniforme com $\|(\lambda - K)^{-1}\|$ para $n \geq n_0$. ■

Exemplo 4.2. Aplicamos a interpolação de Lagrange linear por partes em (4.47). Se $l(x, \cdot), u \in C^2([a, b])$, $x \in [a, b]$, então por (3.34) e (4.50) temos

$$\|u - u_n\|_\infty \leq \frac{ch^2}{8} \max_{a \leq x, y \leq b} \left| \frac{\partial^2 l(x, y) u(y)}{\partial y^2} \right|, \quad n \geq n_0. \quad (4.51)$$

As ideias da resolução de (4.47) podem ser generalizadas para graus maiores da interpolação polinomial por partes. Todos os elementos da prova podem ser generalizados e obtemos um teorema análogo ao Teorema 4.3. Em particular, suponha $[l(x, y)u(y)]_n$ definido usando interpolação polinomial por partes de grau $m \geq 0$. Assumindo $l(x, \cdot), u \in C^{m+1}([a, b])$, $x \in [a, b]$. Então

$$\|u - u_n\|_\infty \leq ch^{m+1} \max_{a \leq x, y \leq b} \left| \frac{\partial^{m+1} l(x, y) u(y)}{\partial y^{m+1}} \right|, \quad n \geq n_0, \quad (4.52)$$

para alguma constante adequada $c > 0$. Quando usado interpolação quadrática por partes, o método (4.46) é chamado Regra do Produto de Simpson; e de acordo com (4.52) sua razão de convergência é $\mathcal{O}(h^3)$.

Observação 4.2. Muitas equações integrais singulares não podem facilmente ser escritas na forma de (4.45) com uma $l(x, y)$ regular e uma função $g(x, y)$ para o qual os pesos tais como (4.40)-(4.42) podem facilmente ser calculados. Para essas equações mais complicadas supomos que a função núcleo singular pode ser escrito na forma

$$k(x, y) = \sum_{j=1}^r l_j(x, y) g_j(x, y) \quad (4.53)$$

com cada $l_j(x, y)$ e $g_j(x, y)$ satisfazendo as propriedades listadas para $l(x, y)$ e $g(x, y)$. Escrevemos o operador, agora, como uma soma de operadores integrais da forma usada em (4.45):

$$Ku(x) = \sum_{j=1}^r K_j u(x) = \sum_{j=1}^r \int_a^b l_j(x, y) g_j(x, y) u(y) dy, \quad u \in C[a, b].$$

Para ilustrar isto, vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 4.3. Considere a equação integral

$$u(x) - \int_0^\pi \ln |\cos(x) - \cos(y)| u(y) dy = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (4.54)$$

Uma possibilidade para a função núcleo $k(x, y) = \ln |\cos(x) - \cos(y)|$ é que pode ser escrito como

$$k(x, y) = \underbrace{|x - y|^{1/2} \ln |\cos(x) - \cos(y)|}_{=l(x,y)} \underbrace{|x - y|^{-1/2}}_{=g(x,y)}.$$

Infelizmente, esta escolha de $l(x, y)$ apesar de ser contínua não é diferenciável. E temos que ter diferenciabilidade para que o método numérico tenha uma ordem de convergência com rapidez adequada.

Uma outra escolha é usar

$$\begin{aligned} k(x, y) &= \ln \left| 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - y) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + y) \right| \\ &= \ln \left[\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - y) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + y)}{(x - y)(x + y)(2\pi - x - y)} \right] + \ln |x - y| \\ &\quad + \ln(x + y) + \ln(2\pi - x - y). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Essa é a forma (4.53) com $g_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$ e

$$\begin{aligned} l_1(x, y) &= \ln \left[\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - y) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + y)}{(x - y)(x + y)(2\pi - x - y)} \right], \\ g_2(x, y) &= \ln |x - y|, \\ g_3(x, y) &= \ln |x + y|, \\ g_4(x, y) &= \ln |2\pi - x - y|. \end{aligned}$$

A função $l_1(x, y)$ é infinitamente diferenciável em $[0, 2\pi]$; e as funções g_2 , g_3 e g_4 são singulares para as quais os pesos são facilmente calculados.

Para resolver (4.54) com a Regra do Produto Trapezoidal ou Simpson usamos a decomposição (4.55). A solução exata dessa equação é

$$u(x) = \frac{1}{1 + \pi \ln 2}.$$

Capítulo 5

Equações Integrais de Contorno: uma introdução

Até a década de 1970 as abordagens para obtenção da solução numérica de $\Delta u \equiv 0$ mais comuns foram os métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas. A partir dessa década houve um aumento significativo na popularidade do uso de equações integrais de contorno para resolver a equação de Laplace e muitas outras equações elípticas, incluindo a equação biarmônica, a equação de Helmholtz, as equações de elasticidade e as equações para o fluxo de Stokes. Neste trabalho trataremos apenas da equação de Laplace, contudo ressaltamos que muitos dos resultados apresentados podem ser generalizados para outras equações elípticas.

Neste capítulo vamos introduzir o tratamento numérico teórico das equações integrais de contorno. Como ilustração dos métodos apresentaremos alguns exemplos numéricos, que foram implementado com o aplicativo *Maxima*.

5.1 Duas classes de equações integrais de contorno

Nesta seção apresentaremos dois tipos de equações integrais de contorno. Nas Subseções 1.3.1 e 1.3.2, introduzimos os principais conceitos e resultados que usaremos neste capítulo.

5.1.1 Equações integrais de contorno do tipo direto

As equações (1.22) e (1.24) são representações de funções harmônicas em Ω_i e Ω_e , respectivamente, em termos de u e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ à fronteira dessas regiões. Métodos numéricos são baseados em (1.22) e (1.24) as quais são ditas do "tipo direto", porque esses métodos querem encontrar u ou $\partial u/\partial \eta$ no contorno, sendo essas quantidades muitas vezes de imediato interesse físico. Quando dada uma dessas funções de contorno, as equações (1.22) e (1.24) podem ser usadas para obter outras funções de contorno. Ilustraremos algumas dessas possibilidades.

O problema de Dirichlet interior (1.19)

A condição de contorno é $u(z) = f(z)$ em S , disso e de (1.24) podemos escrever

$$\frac{1}{\pi} \int_S \rho(x) \ln |z - x| dS = g(z), \quad z \in S \quad (5.1)$$

com $\rho(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial \eta}$, $g(z) = f(z) + \frac{1}{\pi} \int_S f(x) \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |z - x|] dS$.

A equação (5.1) é de primeira espécie, e isso foi usado como protótipo no estudo das equações integrais de contorno de primeira espécie. Em [5, sec. 7.3] é encontrado um estudo da solução de (5.1) com mais detalhes.

O problema de Neumann interior (1.20)

A condição de fronteira é $\frac{\partial u}{\partial \eta} = f$ em S , com isso reescrevemos (1.24) como

$$u(z) + \frac{1}{\pi} \int_S u(x) \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |z - x|] dS = \frac{1}{\pi} \int_S f(x) \ln |z - x| dS, \quad z \in S. \quad (5.2)$$

Essa é uma equação integral de segunda espécie. Infelizmente ela não possui única solução, e isso não é surpresa tratando-se do problema de Neumann.

A equação (5.2) tem uma única solução se, e só se, a função de contorno satisfaz a condição (1.21). Um caminho simples de mostrar a existência e unicidade de solução de (5.2) é introduzir uma condição adicional tal como

$$u(z^*) = 0$$

para algum ponto fixo de $z^* \in S$. Combinando isso com a discretização da equação integral para obter uma adequada aproximação numérica de u . Existem outros caminhos para a conversão de (5.2) numa equação que tem uma única solução e alguns deles são discutidos em [6]. Uma alternativa é converter num problema exterior usando a transformação de Kelvin, e aplicar métodos para esse tipo de equação.

O problema de Neumann exterior (1.30)

A condição de contorno é $\frac{\partial u}{\partial \eta} = f$ em S . Usando isso e (1.24) temos

$$u(z) - \frac{1}{\pi} \int_S u(x) \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |z - x|] dS = -\frac{1}{\pi} \int_S f(x) \ln |z - x| dS, \quad z \in S \quad (5.3)$$

tem uma única solução, como veremos em (5.18). Na Seção 5.2 também veremos sua solução numérica.

Usando a parametrização $r(t) = (\zeta(t), \vartheta(t))$ com $0 \leq t \leq L$, de S , e multiplicando por $-\pi$, podemos escrever (5.3) como

$$-\pi u(t) + \int_0^L k(t, s) u(s) ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq L \quad (5.4)$$

$$k(t, s) = \frac{\vartheta'(s)[\zeta(t) - \zeta(s)] - \zeta'(s)[\vartheta(t) - \vartheta(s)]}{[\zeta(t) - \zeta(s)]^2 + [\vartheta(t) - \vartheta(s)]^2}, \quad s \neq t \quad (5.5)$$

$$k(t, t) = \frac{\vartheta'(t)\zeta''(t) - \zeta'(t)\vartheta''(t)}{2[\zeta'(t)^2 + \vartheta'(t)^2]} \quad (5.6)$$

$$g(t) = \int_0^L f(r(s)) \sqrt{\zeta'(s)^2 + \vartheta'(s)^2} \ln |r(t) - r(s)| ds. \quad (5.7)$$

Em (5.4) usamos $u(t) \equiv u(r(t))$ por simplicidade de notação. A segunda fração em (5.5) usa a primeira e a segunda ordem das Diferenças Divididas de Newton, para obter mais facilmente o valor limite em (5.6). O valor de $k(t, t)$ é a curvatura média de S por $r(t)$.

Escrevemos (5.4) simbolicamente como

$$(-\pi + K)u = g, \quad (5.8)$$

e examinando o núcleo observamos que se

$$r \in C^\kappa[0, L] \Rightarrow K \in C^{\kappa-2}([0, L] \times [0, L]). \quad (5.9)$$

O núcleo K é suave, periódico com período L , como também são as funções u e g . Introduzimos o espaço $C_p^l(L)$ como sendo o conjunto de todas as funções h continuamente diferenciáveis l -vezes em $(-\infty, \infty)$ para o qual $h(t+L) = h(t)$.

Para a norma, use

$$\|h\|_l = \max \left\{ \|h\|_\infty, \|h'\|_\infty, \dots, \|h^{(l)}\|_\infty \right\}.$$

Com essa norma $C_p^l(L)$ é um espaço de Banach. Identificamos $C_p(L) = C_p^0(L)$ e se $r \in C^\kappa[0, L]$ com $\kappa \geq 2$, K é um operador compacto de $C_p(L)$ à $C_p(L)$. Além disso, por (5.9) K é um aplicação de $C_p(L)$ à $C_p^{\kappa-1}(L)$. A solução numérica de (5.4) será examinada com mais detalhes na Seção 5.2 com relação às equações integrais.

5.1.2 Equação integral de contorno do tipo indireto

Métodos de *equações integrais de contorno do tipo indireto* são baseados na representação de funções harmônicas como *potencial de camada simples*

$$u(y) = \int_S \rho(y) \ln |y - x| dS, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad (5.10)$$

ou um *potencial de camada dupla*

$$u(y) = \int_S \rho(y) \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |y - x|] dS, \quad y \in \mathbb{R}^2. \quad (5.11)$$

Observe que essas equações, a priori, são dadas em todo \mathbb{R}^2 e a partir delas, por meio da diferença das representações nas regiões exterior e interior, conseguimos as equações integrais de contorno, por isso “indiretas”. O procedimento é como segue.

Seja $u_i \in C^1(\overline{\Omega}_i)$ harmônica em Ω_i , e seja $u_e \in C^1(\overline{\Omega}_e)$ harmônica em Ω_e com

$$\sup_{y \in \overline{\Omega}_e} |u_e(y)| < \infty.$$

As funções u_i e u_e satisfazem as fórmulas de representação. Introduzimos a notação

$$\begin{aligned} [u(z)] &= u_i(z) - u_e(z), \quad z \in S \\ \left[\frac{\partial u(z)}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial u_i(z)}{\partial \eta} - \frac{\partial u_e(z)}{\partial \eta}, \quad z \in S. \end{aligned}$$

Através das representações de funções harmônicas em regiões interiores e exteriores, conseguimos algumas fórmulas que serão úteis. Para detalhes das duas próximas equações consulte [5, sec. 7.3].

$$u_i(y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \eta} \right] \ln |y - x| dS - \frac{1}{2\pi} \int_S [u(x)] \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |y - x|] dS, \quad y \in \Omega_i. \quad (5.12)$$

Também,

$$u_e(y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \eta} \right] \ln |y - x| dS + \frac{1}{2\pi} \int_S [u(x)] \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |y - x|] dS, \quad y \in \Omega_e. \quad (5.13)$$

E de (1.22) e (1.24) tem-se

$$u_i(z) + u_e(z) = \frac{1}{\pi} \int_S \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \eta} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |z - x|] dS - \int_S [u(x)] \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |z - x|] dS, \quad z \in S. \quad (5.14)$$

Potenciais de camada dupla

Dada uma função harmônica $u_i \in C(\overline{\Omega}_i)$, construímos uma nova função (no caso (5.15)) tomando a função harmônica u_e como solução do problema de Neumann exterior e supondo também

$$\frac{\partial u_e(z)}{\partial \eta} = \frac{\partial u_i(z)}{\partial \eta}, \quad z \in S.$$

Então, segue de (5.12) que

$$u_i(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_S [u(x)] \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |y - x|] dS, \quad y \in \Omega_i.$$

Reescrevemos essa função como

$$u_i(y) = \int_S \rho(x) \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |y - x|] dS, \quad y \in \Omega_i \quad (5.15)$$

com

$$\rho(x) = -\frac{1}{2\pi} [u(x)].$$

A integral em (5.15) é conhecida como *potencial de camada dupla*¹, e a função ρ é chamada de *função densidade de camada dupla*.

¹Fredholm usou (5.15) para mostrar a solvabilidade do problema de Dirichlet interior para a equação de Laplace, e mostrou a unicidade para toda $f \in C(S)$ utilizando (5.16).

Para usar essa representação integral, resolvemos diretamente por ρ . Suponhamos u_i solução do problema de Dirichlet interior com $u_i \equiv f$ em S . Então usamos (1.23) tomando o limite em (5.15) quando $y \rightarrow z \in S$. Isso resulta em

$$-\pi\rho(z) + \int_S \rho(x) \frac{\partial}{\partial\eta} [\ln|z-x|] dS = f(z), \quad z \in S. \quad (5.16)$$

Observe que o lado esquerdo tem a forma de (5.4) para um problema de Neumann exterior. A discussão de sua solução numérica será feita em detalhes na próxima seção.

Potenciais de camada simples

Dada uma função harmônica $u_i \in C(\overline{\Omega}_i)$, usamos de u_e como solução do problema de Dirichlet exterior (1.29) com dados na fronteira $f \equiv u_i|_S$. Então (5.12) implica

$$u_i(y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\frac{\partial u(x)}{\partial\eta} \right] \ln|y-x| dS.$$

Introduzimos, agora,

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial\eta} \right]$$

e reescrevemos a representação integral como:

$$u_i(y) = \int_S \rho(x) \ln|y-x| dS, \quad y \in \Omega_i.$$

O operador integral é chamado de *potencial de camada simples*, e a função ρ é chamada de *função densidade de camada simples*. Veja Kellogg [17] para origens físicas e suas nomenclaturas tanto para este caso como para o anterior.

5.2 Equações integrais de contorno de 2ª espécie

A teoria original de Fredholm para equações integrais foi desenvolvida no estudo de equações integrais considerados nesta seção, e essas equações vem também sendo usadas como ferramentas para resolver a equação de Laplace. Nesta seção apresentaremos a análise numérica teórica das equações integrais de contorno de segunda espécie. Nesse primeiro momento obteremos resultados para o problema de Dirichlet interior para a equação de Laplace, em seguida, especificamente nas duas últimas seções, tomaremos esses resultados juntamente com a análise dos problemas de Neumann exterior e interior respectivamente.

Relembre da representação de camada dupla (5.15) para uma função harmônica u em Ω_i . Para resolver o problema de Dirichlet interior (1.19), resolvemos a equação integral de contorno obtendo a densidade ρ dada em

$$-\pi\rho(z) + \int_S \rho(x) \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |z - x|] dS = f(z), \quad z \in S \quad (5.17)$$

com f sendo valores de u em S .

Quando usamos a parametrização de S a equação integral torna-se

$$-\pi\rho(t) + \int_0^L k(t, s)\rho(s)ds = f(t), \quad 0 \leq t \leq L \quad (5.18)$$

com $k(t, s)$ dada em (5.5)-(5.6) e $f(t) = f(r(t))$. Simbolicamente, escrevemos (5.18) como

$$(-\pi + K)\rho = f.$$

O operador $(-\pi + K)^{-1}$ existe e é limitado² de $C_p(L)$ para $C_p(L)$.

Porque o núcleo k e as funções f e ρ são periódicas sobre $[0, L]$, e porque k e ρ são usualmente suaves, o método mais eficiente na resolução numérica de (5.18) é geralmente o Método de Nyström com a regra dos trapézios. A equação de aproximação é da forma

$$-\pi\rho_n(t) + h \sum_{j=1}^{n+1} k(t, t_j)\rho_n(t_j) = f(t), \quad 0 \leq t \leq L \quad (5.19)$$

com $h = L/n$, $t_j = (j - 1)h$ para $j = 1, \dots, n + 1$. Simbolicamente, escrevemos isso como $(-\pi + K_n)\rho_n = f$, com o operador integração numérica

$$K_n u(t) = h \sum_{j=1}^{n+1} k(t, t_j)u(t_j), \quad 0 \leq t \leq L.$$

Nos pontos nodais, obtemos o sistema linear

$$-\pi\rho_n(t_i) + h \sum_{j=1}^{n+1} k(t_i, t_j)\rho_n(t_j) = f(t_i), \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (5.20)$$

cuja solução é $[\rho_n(t_1), \dots, \rho_n(t_{n+1})]^T$. Então, usando a interpolação de Nyström obtemos $\rho_n(t)$:

$$\rho_n(t) = \frac{1}{\pi} \left[-f(t) + h \sum_{j=1}^{n+1} k(t, t_j)\rho_n(t_j) \right], \quad 0 \leq t \leq L. \quad (5.21)$$

²Cf. Kress, [18], cap. 6.

A análise de erro é facilmente obtida através do Teorema 4.2. Esse teorema mostra que (5.19) possui única solução para todo n suficientemente grande, digamos $n \geq n_0$. Portanto

$$\|\rho - \rho_n\|_\infty \leq \|(-\pi + K_n)^{-1}\| \|K\rho - K_n\rho\|_\infty, \quad n \geq n_0. \quad (5.22)$$

Pela rapidez da convergência da integração numérica (pelo fato do integrando ser periódico), temos que $\rho_n \rightarrow \rho$ terá uma rapidez de convergência similar.

Exemplo 5.1. *Seja o contorno S a elipse*

$$r(t) = (c \cos t, d \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (5.23)$$

E, nesse caso o núcleo (5.5) pode ser reduzido para

$$k(t, s) = \kappa \left(\frac{s+t}{2} \right), \quad \kappa(\theta) = \frac{-cd}{2[c^2 \sin^2 \theta + d^2 \cos^2 \theta]}$$

e a equação integral (5.18) torna-se

$$-\pi\rho(t) + \int_0^{2\pi} \kappa \left(\frac{s+t}{2} \right) \rho(s) ds = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (5.24)$$

Consideraremos os resultados dessa equação para

$$f(x, y) = e^x \cos y, \quad (x, y) \in S. \quad (5.25)$$

Obtemos uma precisão bastante boa ³ para valores de n suficientemente grandes.

Solução: Resolveremos com o comando `nystrom_trapez(f,k,lambda,a,b,n)`. Usaremos $c = 1$ e $d = 5$. Vamos comparar os resultados com $n = 10$, $n = 16$ e $n = 32$ subintervalos de $[a, b] = [0, 2\pi]$.



Resolvendo o Exemplo 5.1

Definindo $c=1$ e $d=5$

```
(%i3) c:1$; d:5$;
```

Para $n_1 \in \{10, 16, 32\}$

³Cf. K. Atkinson [5], opus cit., p. 322.

```
(%i4) nystrom_trapez(-%e^(c*cos(x))*cos(d*sin(x)),-c*d/(2*(c^2*sin((x+y)/2)^2+
      d^2*cos((x+y)/2)^2)),%pi,0,2*%pi,n_1);
```

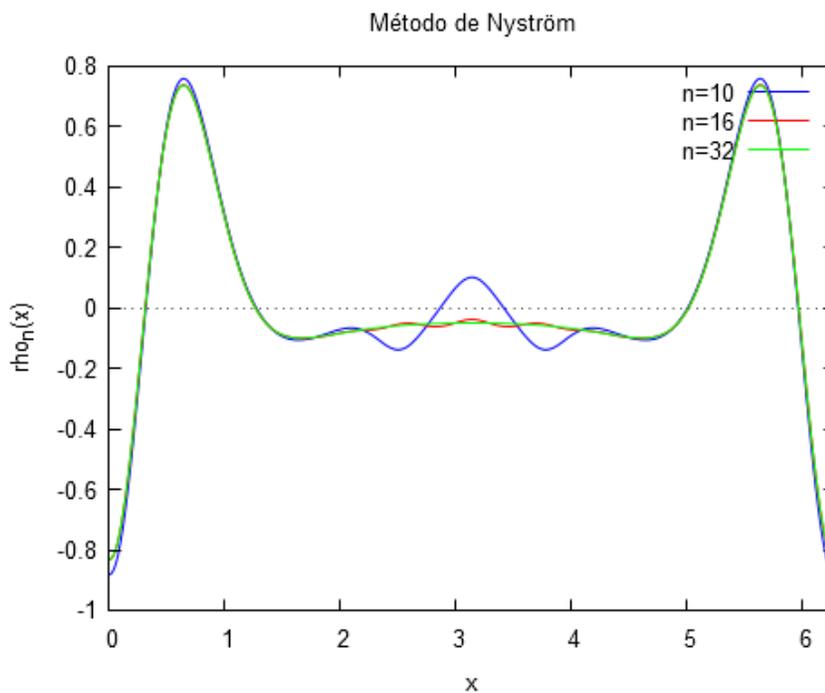
Solução aproximada: rho_n(x)

```
(%t4)
```

Comparação gráfica entre soluções aproximadas.

```
(%i5) wxplot2d([rho_10(x),rho_16(x),rho_32(x)], [x,0,2*%pi],
      [legend,"n=10","n=16","n=32"], [ylabel,"rho_n(x)"],
      [title,"Método de Nyström"]);
```

```
(%t5)
```



Quando c é bem maior (ou menor) que d , forma-se uma espécie de “pico” em S , pois a elipse se alonga. Essa deformação faz com que núcleo perca regularidade e para contornar o problema devemos tomar n bem grande. ■

5.2.1 Avaliação do potencial de camada dupla

Usando uma parametrização para S , a fórmula da integral dupla (5.15) torna-se

$$u(x, y) = \int_0^L M(x, y, s) \rho(s) ds, \quad (x, y) \in \Omega_i$$

$$M(x, y, s) = \frac{-\vartheta'(s)[\zeta(s) - x] + \zeta'(s)[\vartheta(s) - y]}{[\zeta(s) - x]^2 + [\vartheta - y]^2}.$$

O núcleo deforma-se num “pico” quando (x, y) aproxima-se de S . Para ver isso mais claramente, seja S a circunferência unitária dada por $r(s) = (\cos s, \sin s)$, $0 \leq s \leq 2\pi$. Então

$$M(x, y, s) = \frac{-\cos s[\cos s - x] - \sin s[\sin s - y]}{[\cos s - x]^2 + [\sin s - y]^2}.$$

Com o objetivo de facilitar a visualização do comportamento de (x, y) aproximando-se de $r(s)$, examinamos a tendência ao longo de

$$(x, y) = q(\cos s, \sin s), \quad 0 \leq q < 1.$$

Assim, tem-se

$$M(q \cos s, q \sin s, s) = \frac{1}{1 - q}.$$

Para resolver o problema de Dirichlet (1.19), primeiramente aproximamos a densidade ρ , obtendo ρ_n , e então integramos numericamente a integral dupla baseada em ρ_n .

Com objetivo de simplificar os estudos, estamos utilizando a notação $u(x, y)$. Seja $u_n(x, y)$ o potencial de camada dupla usando a aproximação da densidade ρ_n obtidos através do Método de Nyström como em (5.19):

$$u_n(x, y) = \int_0^L M(x, y, s) \rho_n(s) ds, \quad (x, y) \in \Omega_i.$$

Seja $u_{n,m}(x, y)$ denotando o resultado da aproximação $u_n(x, y)$ usando a regra dos trapézios:

$$u_{n,m}(x, y) = h \sum_{j=1}^m M(x, y, t_j) \rho_n(t_j), \quad (x, y) \in \Omega_i. \quad (5.26)$$

Para analisar o erro, observe que $u - u_n$ é uma função harmônica, logo, pelo Princípio do Máximo temos

$$\max_{(x,y) \in \Omega_i} |u(x, y) - u_n(x, y)| = \max_{(x,y) \in S} |u(x, y) - u_n(x, y)|. \quad (5.27)$$

Desde que $u - u_n$ seja um potencial de camada dupla, o mesmo argumento que aplicamos à equação integral original (5.15) para obter (5.17) também implica

$$u(x, y) - u_n(x, y) = -\pi[\rho(x, y) - \rho_n(x, y)] + \int_S [\rho(z, w) - \rho_n(z, w)] \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |(x, y) - (z, w)|] dS$$

com $(x, y) \in S$. Aplicando os limitantes, segue

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leq [\pi + \|K\|] \|\rho - \rho_n\|_\infty, \quad (x, y) \in S.$$

Combinando com (5.27),

$$\max_{(x, y) \in \Omega_i} |u(x, y) - u_n(x, y)| \leq [\pi + \|K\|] \|\rho - \rho_n\|_\infty, \quad (x, y) \in S. \quad (5.28)$$

Se a região Ω_i é convexa, então o potencial de camada dupla é estritamente negativo, e pode-se mostrar⁴ que

$$\|K\| = \pi.$$

Portanto, para regiões convexas

$$\max_{(x, y) \in \overline{\Omega}_i} |u(x, y) - u_n(x, y)| \leq 2\pi \|\rho - \rho_n\|_\infty. \quad (5.29)$$

Para completar a tarefa de avaliação de $u_n(x, y)$ para dados valores de (x, y) , usamos a regra dos trapézios (5.26), variando m para uma desejada precisão em $u_{n,m}(x, y)$. O erro total conseguimos com

$$|u(x, y) - u_{n,m}(x, y)| \leq |u(x, y) - u_n(x, y)| + |u_n(x, y) - u_{n,m}(x, y)| = \left\{ \frac{c}{n^{\kappa-2}} (\pi + \|K\|) + \frac{c'}{\delta^{\kappa-2} m^{\kappa-2}} \right\} \|\rho^{\kappa-2}\|_\infty.$$

Este limitante é encontrado em Atkinson & Jeon [3], sendo c, c' constantes adequadas e

$$\delta = \min_{(x, y) \in S} |(z, w) - (x, y)|.$$

A potência de δ advém de C^ρ de (5.9), em que ρ é mínimo dentre eles.

⁴K. Atkinson, [4], opus cit., p. 570.

Exemplo 5.2. Continuemos com o exemplo precedente (5.23)-(5.25) para o cálculo da densidade ρ_n . Consideremos os mesmos valores de c e d . Resolveremos (5.26) com $n = 16$ e $m = 16$.

Solução: Observe que (5.26) pode ser interpretada como a interpolação de Nyström. Portanto, aplicaremos o comando `interpol_nystrom(f,k,lambda,a,b,m)`.



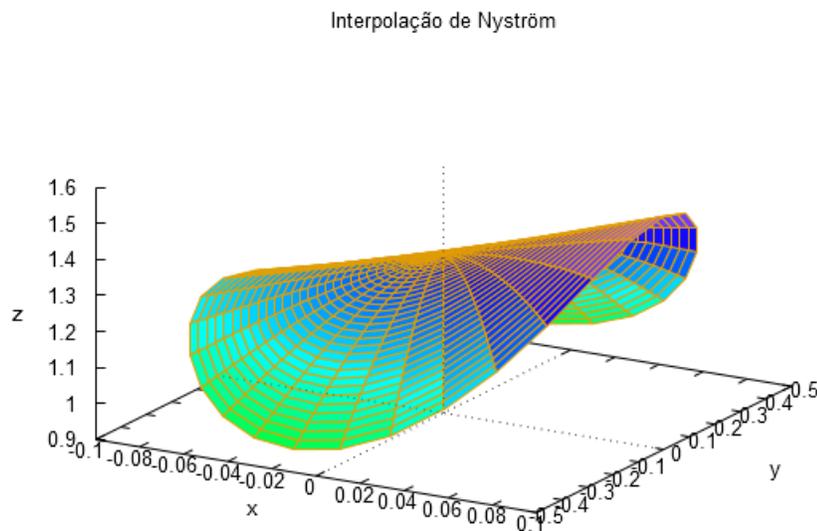
Resolução do Exemplo 5.2

```
(%i2) interpol_nystrom(0,(-d*cos(t)*(c*cos(t)-x)-c*sin(t)*(d*sin(t)-y))/
      ((c*cos(t)-x)^2+(d*sin(t)-y)^2),1,0,2*pi,16);
```

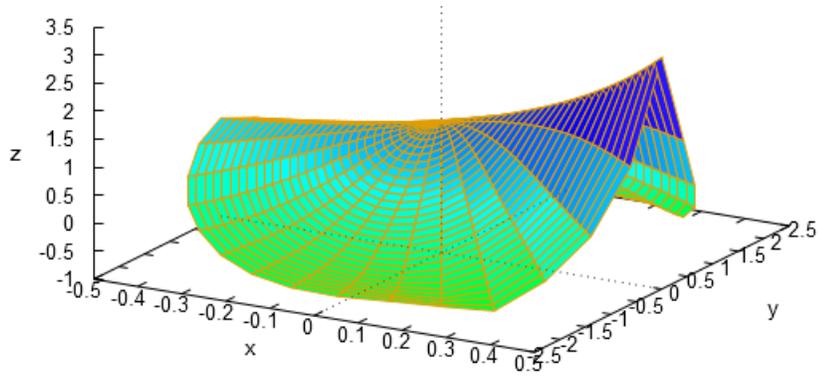
Solução aproximada: $u_{nm}(x,y)$

```
(%t2)
```

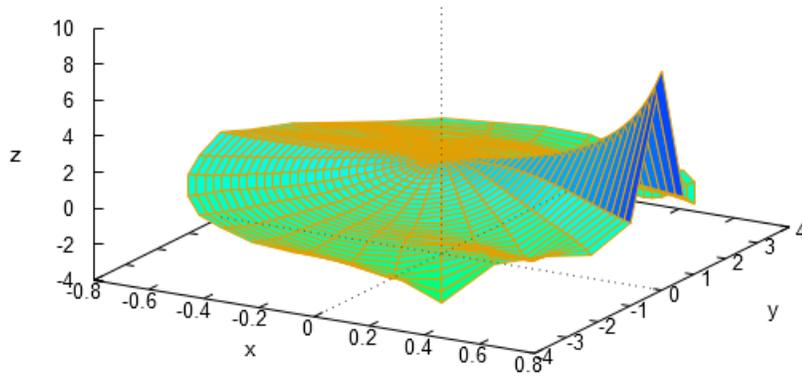
Exibiremos as imagens para $\text{diâmetro}(\Omega)/R$ sendo $R \in \{10, 2, 1.25\}$ respectivamente.



Interpolação de Nyström



Interpolação de Nyström



Observe a deformação anteriormente declarada, de fato, quando $q \rightarrow 1^-$. ■

5.2.2 O problema de Neumann exterior

Relembre a resolução do problema (1.20) com a fórmula de representação integral (1.22) e a equação integral de contorno (5.3). Reescrevemos essa última como

$$-\pi u(z) + \int_S u(x) \frac{\partial}{\partial \eta} [\ln |z - x|] dS = \int_S f(x) \ln |z - x| dS, \quad z \in S.$$

O lado esquerdo dessa equação é o mesmo que (5.17), portanto apenas nos concentraremos no lado direito. Lembre-se de (5.7), note que pode ser aproximada usando a técnica Produto Integração da Seção 4.2, mas consideraremos um método mais eficiente.

Para simplificar a notação, consideremos $r(t)$ definida no intervalo $[0, 2\pi]$, e introduzimos

$$\varphi(s) = f(r(s)) \sqrt{\zeta'(s)^2 + \vartheta'(s)^2},$$

logo, (5.7) fica

$$g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s) \ln |r(t) - r(s)| ds, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (5.30)$$

O núcleo escrevemos na forma

$$\begin{aligned} \ln |r(t) - r(s)| &= \ln \left| 2e^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{t-s}{2} \right) \right| + B(t, s) \\ B(t, s) &= \begin{cases} \ln \frac{|e^{\frac{1}{2}} [r(t) - r(s)]|}{|2 \operatorname{sen}(\frac{t-s}{2})|}, & t - s \neq 2m\pi \\ \ln |e^{\frac{1}{2}} r'(t)|, & t - s = 2m\pi, \end{cases} \end{aligned}$$

com m inteiro não nulo (a partir daqui consideraremos sempre $m \in \mathbb{Z}$).

A integral (5.30) fica então

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{2\pi} \varphi(s) \ln \left| 2e^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{t-s}{2} \right) \right| ds + \int_0^{2\pi} B(t, s) \varphi(s) ds \\ &\equiv -\pi \mathcal{A} \varphi(t) + \mathcal{B} \varphi(t). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Assumindo $r \in C_p^\kappa(2\pi)$, o núcleo $B \in C^{\kappa-1}([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$, e B é periódica em ambas as variáveis. Consequentemente, a segunda integral $\mathcal{B} \varphi(t)$ em (5.31) pode ser melhor aproximada usando a regra dos trapézios.

A primeira integral em (5.31) é uma pequena modificação do operador integral associado ao núcleo $\ln |z - x|$ para S sendo a circunferência unitária centrada na origem já introduzida

$$\mathcal{A}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \ln \left| 2e^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{t-s}{2} \right) \right| ds, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (5.32)$$

Tendo em vista algumas propriedades, escrevemos a expansão em séries de Fourier de uma $\varphi \in L^2(0, 2\pi)$ arbitrária

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(m) e^{ims}, \\ \widehat{\varphi}(m) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(s) e^{-ims} ds.\end{aligned}$$

Então, pode-se mostrar que

$$\mathcal{A}\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\widehat{\varphi}(0) + \sum_{|m|>0} \frac{\widehat{\varphi}(m)}{|m|} e^{imt} \right]. \quad (5.33)$$

Essa é uma expansão de $\mathcal{A}\varphi$ usando as autofunções $\psi_m(t) \equiv e^{imt}$ e os correspondentes autovalores de \mathcal{A} . Para uma prova desse resultado e uma ampla discussão das propriedades de \mathcal{A} , consulte Yan & Sloan [25].

Mais tarde precisaremos de limitantes de $\mathcal{A}\varphi(t)$. Quando \mathcal{A} é considerado um operador de $C_p(2\pi)$ para $C_p(2\pi)$, podemos usar

$$\|\mathcal{A}\| = \max_t \int_0^{2\pi} \left| \ln \left| 2e^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \left(\frac{t-s}{2} \right) \right| \right| ds.$$

Um limitante, vem diretamente da fórmula (5.33). Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nessa fórmula, temos

$$|\mathcal{A}\varphi(t)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{|m|>0} \frac{1}{m^2} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(m)|^2 \right]. \quad (5.34)$$

Usando a igualdade de Parseval,

$$\|\varphi\|_{L^2(0,2\pi)} = \sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(m)|^2},$$

também, usando a série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a igualdade (5.34) implica

$$|\mathcal{A}\varphi(t)| \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \right)} \|\varphi\|_{L^2(0,2\pi)}. \quad (5.35)$$

Tendo

$$\|\varphi\|_{L^2(0,2\pi)} \leq \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_{\infty}$$

o limitante (5.35) implica

$$\|\mathcal{A}\varphi\|_\infty \leq \sqrt{1 + \frac{\pi}{3}} \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi \in C_p(2\pi). \quad (5.36)$$

Que implica

$$\|\mathcal{A}\| \leq \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{3}}.$$

Para aproximar $\mathcal{A}\varphi$, aproximaremos φ usando interpolação trigonométrica, e então (5.33) é usado para avaliar exatamente a aproximação resultante de $\mathcal{A}\varphi$.

Seja $n \geq 1$, $h = 2\pi/(2n + 1)$, e

$$t_j = (j - 1)h, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.37)$$

Seja $\mathcal{Q}_n\varphi$ denotando a interpolação trigonométrica de grau $\leq n$ que interpola $\varphi(t)$ nos nodais $\{t_j\}$, e é também periódica. Seja $T_n(\varphi)$ denotando a regra dos trapézios em $[0, 2\pi]$ com n subdivisões:

$$T_n(\varphi) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^n \varphi\left(\frac{2\pi(j-1)}{n}\right), \quad \varphi \in C_p(2\pi)$$

e introduzimos o produto interno discreto

$$\langle f, g \rangle_n = T_n(f\bar{g}) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{2\pi(j-1)}{n}\right) \bar{g}\left(\frac{2\pi(j-1)}{n}\right).$$

Consideremos

$$\psi_m(s) = e^{ims}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

É relativamente fácil mostrar que

$$T_n(\psi_m) = \begin{cases} 2\pi, & m = jn, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{outros valores.} \end{cases} \quad (5.38)$$

Usando o produto interno discreto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2n+1}$ em (5.38) segue que

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{2n+1} = \begin{cases} 2\pi, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5.39)$$

para $-n \leq i, k \leq n$. Isso implica que $\{\psi_{-n}, \dots, \psi_n\}$ é uma base ortogonal para $\mathcal{X}_n = \text{span}\{\psi_{-n}, \dots, \psi_n\}$ quando usado o produto interno discreto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2n+1}$.

Dado $\varphi \in C_p(2\pi)$, o polinômio interpolador $\mathcal{Q}_n\varphi$ é também a projeção ortogonal discreta em \mathcal{X}_n como pode ser visto em [5, sec. 4.4]. Com (5.39) conseguimos

$$\mathcal{Q}_n\varphi(t) = \sum_{j=-n}^n \alpha_j \psi_j(t) \quad (5.40)$$

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi} \langle \varphi, \psi_j \rangle_{2n+1}. \quad (5.41)$$

Para o erro em $\mathcal{Q}_n\varphi$, assumimos φ l -vezes continuamente diferenciável, e $\varphi^{(l)}$ é tal que satisfaz a condição de Hölder

$$|\varphi^{(l)}(s) - \varphi^{(l)}(t)| \leq c|s - t|^\alpha, \quad -\infty < s, t < \infty$$

com c uma constante. O resultado de Atkinson [4, p. 165] nos diz que

$$\|\varphi - \mathcal{Q}_n\varphi\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^{l+\alpha}}\right), \quad \varphi \in C_p^{l+\alpha}(2\pi). \quad (5.42)$$

Aproximamos $\mathcal{A}\varphi(t)$ usando $\mathcal{A}\mathcal{Q}_n\varphi(t)$. De (5.33),

$$\mathcal{A}\psi_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \frac{1}{|j|}\psi_j, & |j| > 0. \end{cases} \quad (5.43)$$

Aplicando isso em (5.40), temos

$$\mathcal{A}\varphi(t) \approx \mathcal{A}\mathcal{Q}_n\varphi(t) = \alpha_0 + \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^n \frac{\alpha_j}{|j|} \psi_j(t), \quad (5.44)$$

em que os coeficientes α_j são calculados em (5.41). Por (5.36) temos que

$$\|\mathcal{A}\varphi - \mathcal{A}\mathcal{Q}_n\varphi\|_\infty \leq \|\mathcal{A}\| \|\varphi - \mathcal{Q}_n\varphi\|_\infty.$$

A identidade (5.42) implica que

$$\|\mathcal{A}\varphi - \mathcal{A}\mathcal{Q}_n\varphi\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^{l+\alpha}}\right), \quad \varphi \in C_p^{l+\alpha}(2\pi) \quad (5.45)$$

é rapidamente convergente para $\mathcal{A}\varphi$.

Para completar a aproximação à equação integral original (5.31), aproximamos $\mathcal{B}\varphi(t)$ usando a regra trapezoidal com os nodais $\{t_j\}$ de (5.37)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\varphi(t) &\approx T_{2n+1}(B(t, \cdot)\varphi) \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} B(t, t_j)\varphi(t_j) \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\equiv \mathcal{B}_n\varphi(t). \quad (5.47)$$

Para limitar o erro podemos usar a fórmula de Euler-McLaurin que mostra

$$|\mathcal{B}\varphi(t) - \mathcal{B}_n\varphi(t)| \leq \mathcal{O}(n^{-l}), \quad (5.48)$$

isso assumindo que $r \in C_p^\kappa(2\pi)$ com $\kappa \geq l + 1$.

Para resolver a equação integral original do início desta subseção usamos no lado esquerdo o Método de Nyström como em (5.19)-(5.21) baseado na regra dos trapézios com os nodais $\{t_1, \dots, t_{2n+1}\}$. O lado direito de g em (5.31) é aproximado por (5.44) e (5.46), produzindo a equação de aproximação

$$(-\pi + K_n)u_n = -\pi\mathcal{A}\mathcal{Q}_n\varphi + \mathcal{B}_n\varphi. \quad (5.49)$$

O limitante do erro é resultado da combinação de (5.45) e (5.48) com a análise de erro precedente à (5.22).

5.2.3 Outros problemas de contorno

Nesta seção apresentaremos outra aproximação bem conhecida para a resolução do problema de Neumann interior.

Considere o problema de encontrar $u \in C^1(\bar{\Omega}_i) \cap C^2(\Omega_i)$ que satisfaça

$$\begin{aligned} \Delta u(z) &= 0, & z \in \Omega_i \\ \frac{\partial u(z)}{\partial \eta} &= f(z), & z \in S \end{aligned} \quad (5.50)$$

com

$$f \in C(S), \quad \text{em que} \quad \int_S f(z) dS = 0. \quad (5.51)$$

Para resolver esse problema, representamos u como um potencial de camada simples

$$u(y) = \int_S \rho(x) \ln |y - x| dS, \quad y \in \Omega_i.$$

Impondo a condição de fronteira do tipo Neumann em (5.50), ρ necessariamente satisfaz a equação integral

$$\pi u(z) + \int_S \rho(x) \frac{\partial}{\partial \eta} \ln |z - x| dS = f(z), \quad z \in S. \quad (5.52)$$

Esta equação tem a desvantagem de não ter uma única solução, e isto, obviamente, causará dificuldades para a sua solução numérica. Escrevendo (5.52) como

$$(\pi + K)\rho = f \quad (5.53)$$

consideramos o operador adjunto $\pi + K^*$. Conhecido por possuir um autoespaço unidimensional, ou seja,

$$(\pi + K^*)\varphi = 0$$

com φ alguma função constante. Para ver isso, retorne à fórmula de representação de Green e seja u uma função constante. Relembre⁵ que a equação $(\pi + K)\rho = 0$ possui um espaço de solução unidimensional se, para todas as funções múltiplas constantes de $\psi \in C(S)$:

$$(\pi + K)\psi = 0. \tag{5.54}$$

Também, do mesmo resultado, temos que

$$\begin{aligned} \psi &\perp \text{Im}(\pi + K^*) \\ \varphi &\perp \text{Im}(\pi + K) \end{aligned} \tag{5.55}$$

o que implica $\varphi \equiv 1$.

Para a maioria dos contornos S , a função ψ pode ser obtida como segue. Encontrar a densidade de camada simples ψ para a qual

$$\int_S \psi(x) \ln |y - x| dS = 1, \quad y \in \Omega_i.$$

A autofunção ψ produz um campo potencial constante dentro de Ω_i . Formando a derivada normal do lado esquerdo e tomando $y \rightarrow z \in S$, temos (5.54). Tais funções ψ não existem para curvas S chamadas de Γ -contornos⁶. Uma maneira de evitar tais Γ -contornos S é fazer Ω_i suficientemente pequeno, por exemplo, tome

$$\text{diâmetro}(\Omega_i) < 1.$$

Tal justificativa encontra-se em Yan & Sloan [25].

Usando a parametrização de S para $0 \leq t \leq 2\pi$, (5.52) torna-se

$$\pi\rho(t) + \int_0^{2\pi} k(t, s)\rho(s)ds = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{5.56}$$

Sendo $\rho(t) = \rho(r(t))$, assim como em f , por simplicidade. E,

$$k(t, s) = \frac{\vartheta'(s)[\zeta(t) - \zeta(s)] - \zeta'(s)[\vartheta(t) - \vartheta(s)]}{[\zeta(t) - \zeta(s)]^2 + [\vartheta(t) - \vartheta(s)]^2} \sqrt{\frac{\zeta'(s)^2 + \vartheta'(s)^2}{\zeta'(t)^2 + \vartheta'(t)^2}}, \quad s \neq t;$$

⁵Resultado da Análise Funcional, exemplo veja [5, teo. 1.4.2]

⁶Consulte subsec. 1.3.1.

$$k(t, t) = \frac{\vartheta'(t)\zeta''(t) - \zeta'(t)\vartheta''(t)}{2[\zeta'(t)^2 + \vartheta'(t)^2]}.$$

Como em (5.17) o Método de Nyström com a regra do trapézio pode ser usada em (5.56). Mas antes de tudo, a não unicidade de solução deve ser eliminada. Para termos unicidade vamos supor que

$$\int_S \rho(x) dS = 0$$

sob condições de que S não seja Γ -contorno. Fixando $z^* = r(s^*)$. Retornando à equação (5.53), introduzimos a equação integral

$$(\pi + K)R + R(z^*) = f. \quad (5.57)$$

Afirmamos que (5.57) tem uma única solução. Além disso, a condição de solvabilidade (5.51) é satisfeita, então a solução R é uma solução da equação original $(\pi + K)\rho = f$.

A equação (5.57) é da forma $(\pi + \mathcal{L})R = f$, com \mathcal{L} o operador compacto

$$\mathcal{L}g = Kg + g(z^*), \quad g \in C(S).$$

Para mostrar a existência e unicidade de solução, o teorema Alternativa de Fredholm 1.8 nos diz que apenas temos que mostrar

$$(\pi + \mathcal{L})g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0.$$

A condição $(\pi + \mathcal{L})g = 0$ pode ser escrita como

$$(\pi + K)g = -g(z^*)$$

em que o lado direito é uma função constante. O resultado (5.55) implica que

$$(\pi + K)g = 0, \quad g(z^*) = 0.$$

De (5.54), g é alguma múltipla da autofunção ψ de K , logo $g = c\psi$ para alguma constante c . Mas, desde que $g(z^*) = 0$, então $c\psi(z^*) = 0$. Pode-se mostrar que a função ψ é não nula em S , desde que não seja Γ -contorno, por exemplo veja Pogorzelski [21, p. 240]. Resulta então, que $c = 0$ e assim $g = 0$. Isso mostra que $\pi + \mathcal{L}$ é injetivo, e portanto (5.57) possui única solução para toda $f \in C(S)$.

Suponha agora que $f \in C(S)$, e que seja satisfeita (5.51). Reescrevemos a equação (5.57) como

$$(\pi + K)R - f = -R(z^*).$$

Por (5.55), $f \in \text{Im}(\pi + K)$ e portanto o lado esquerdo da equação está em $\text{Im}(\pi + K)$.

Novamente por (5.55), temos que

$$(\pi + K)R - f = 0 \quad R(z^*) = 0. \tag{5.58}$$

Isso mostra que a solução R de (5.57) é uma solução da equação integral original $(\pi + K)\rho = f$.

A equação integral (5.57) é um modo muito simples de resolver $(\pi + K)\rho = f$.

Podemos agora usar o Método de Nyström para a resolução de (5.57), novamente⁷ usando o método com a regra dos trapézios como integração numérica. A teoria do método numérico é quase idêntica ao dado anteriormente para a solução numérica de (5.17), e portanto não vamos trata-lá aqui. Para mais detalhes no tratamento de equações integrais em que falha a unicidade de solução, veja [6].

⁷Citamos, na maioria das vezes, a regra dos trapézios para a aplicação do Método de Nyström, o que não quer dizer que não pode ser usado outra fórmula de Newton-Cotes, até teríamos uma melhora na convergência e erro. Porém, muitas vezes citamos essa fórmula por ser a mais simples e de menor ordem de convergência, então obtendo resultados satisfatórios para esta as outras estão garantidas.

Considerações Finais

A Teoria das equações integrais, desde a segunda metade do século XX, vem, cada vez mais, se destacando como uma potente ferramenta na resolução de importantes problemas da Matemática, da Física e das Engenharias. Por esta razão, o desenvolvimento de métodos numéricos eficientes para a resolução deste tipo de equação é de grande importância no tratamento de tais problemas. Além disso, aliados aos aplicativos computacionais simbólicos, como o aplicativo *Maxima*, tais métodos tornam-se técnicas atraentes e interessantes para a resolução de muitos problemas complexos.

Este trabalho é uma análise numérica teórica e computacional dos principais métodos numéricos para a resolução de uma classe de equações integrais. Incluímos nesta classe a equação integral de Fredholm linear de segunda espécie, uma classe de equações de Fredholm não lineares e equações integrais de contorno oriundas da resolução de problemas clássicos que envolvem a equação de Laplace.

No caso linear, os métodos tratados foram os métodos de projeção, conhecidos como Método de Colocação, Método de Galerkin e Método de Projeção Iterativo, o método de quadratura conhecido com Método de Nystrom e o Método dos Elementos Finitos de Contorno. No caso não linear, aplicamos o Método da Colocação clássico e o Método da Colocação Modificado.

A ênfase no estudo de tais métodos foi teórica, mas apresentamos a implementação de alguns exemplos com o objetivo de ilustrar a eficiência dos métodos.

Apresentamos a análise de existência e unicidade de solução das equações integrais tratadas, a análise da convergência e estimativa do erro dos métodos investigados, tendo como base teórica os resultados da Análise Funcional, especialmente o Teorema de ponto Fixo de Banach, a teoria de operadores compactos, a teoria dos operadores de projeção,

a Alternativa de Fredholm, o Teorema da séries geométricas em espaços de Banach, entre outros.

Na abordagem computacional usamos como ferramenta o aplicativo *Maxima* e seus principais recursos. A eficiência de tal abordagem é bastante evidente. De fato, a programação torna-se bem simples, pois várias das dificuldades do processo, tais como implementação da resolução de sistemas não lineares e comparação gráfica, são facilmente contornadas usando-se a versátil biblioteca de comandos do aplicativo.

Destacamos como ponto importante deste trabalho a ênfase numa análise teórica sólida no estudo dos métodos numéricos, por acreditarmos que esta análise antecede qualquer outra abordagem e permite que possamos tratar os dados obtidos na implementação computacional com maior eficiência e segurança. Destacamos também o uso do aplicativo *Maxima* para a implementação dos exemplos, pois sua versatilidade permite, do ponto de vista computacional, a investigação e simulação de problemas bem complexos.

Para futuras investigações, destacamos algumas possibilidades, uma delas é o fato que, para as equações integrais de contorno, a maioria dos trabalhos teóricos existentes na literatura tratam das equações integrais de segunda espécie. Deste modo, seria interessante investigar a classe das equações de primeira espécie em espaços mais gerais. Sabemos que a maior dificuldade para o tratamento numérico deste tipo de equação integral é o fato do sistema resultante ser muito mal condicionado. Outra possibilidade é investigar problemas cujos operadores são *pseudodiferenciais*. Para estes casos, o método numérico é uma generalização do Método dos Elementos Finitos de Contorno. Também pode-se resolver problemas mais complexos como, por exemplo, a equação de Helmholtz, a equação biarmônica e a equação de Stokes, entre outras.

Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, T. **Mathematical Analysis**, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1981.
- [2] ATKINSON, K. **An Introduction to Numerical Analysis**, 2^a ed., New York: John Wiley, 1989.
- [3] ATKINSON, K.; JEON, Y. **Automatic boundary integral equation programs for the planar Laplace equation**. ACM Trans. on Math., n. 24, p. 395-417, 1998.
- [4] ATKINSON, K.; HAN, W. **Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework**, 3^a ed., New York: Springer, 2009.
- [5] ATKINSON, K. **The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind**, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [6] ATKINSON, K. **The solution of non-unique linear integral equations**. Numerische Mathematik, n. 10, p. 117-124, 1967.
- [7] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**, Rio de Janeiro: SBM - Textos Universitários, 2014.
- [8] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, New York: Springer, 2011.
- [9] COLTON, D. **Partial Differential Equations: An introduction**, New York: Random House, 1988.
- [10] GUENTHER, R.B.; LEE, J. **Partial Differential equations of Mathematical Physics and Integral equations**, New York: Dover Publications, INC., 1988.

- [11] HACKBUSCH, W. **Integral Equations: Theory and Numerical Treatment**, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1995.
- [12] HOCHSTADT, H. **Integral Equations**, New York: Wiley Classics Library, 1973.
- [13] KREISZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**, New York: Wiley Classics Library, 1989.
- [14] KANTOROVICH, L. V.; AKILOV, G. P. **Functional Analysis**, Oxford: Pergamon Press, 1982.
- [15] KRASNOSEL'SKII, M. A. et al. **Approximate Solution of Operator Equations**, Groningen: Wolters-Noordhoff, 1972.
- [16] KRASNOSEL'SKII, M. A.; ZABREIKO, P. P. **Geometrical Methods of Nonlinear Analysis**, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [17] KELLOGG, O. **Foundations of Potential Theory**, New York: reprinted by Dover Publications, 1929.
- [18] KRESS, R. **Linear Integral Equations**, 3^a ed., v. 82, Göttingen: Springer, 2014.
- [19] KUMAR, S.; SLOAN, I. **A New Collocation-Type Method for Hammerstein Integral equations**. Mathematics of Computation, v. 48, n. 178, pp. 585-593, 1987.
- [20] **Maxima homepage**: <http://maxima.sourceforge.net>.
- [21] POGORZELSKI, W. **Integral Equations and Their Applications**, Oxford: Pergamon Press, 1966.
- [22] PONCE, A. **Métodos Clássicos em Teoria do Potencial**, Rio de Janeiro: Impa, 2009.
- [23] RUGGIERO, M. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**, 3^a ed., v. 1, São Paulo: Harbra, 1994.
- [24] SLOAN, I. **Improvement by iteration for compact operator equations**. Mathematics of Computation, v. 30, n. 136, p. 758-764, 1976.

- [25] YAN, Y.; SLOAN, I. **On Integral Equations of the First Kind with Logarithmic Kernels**, J. Integral Eqns. Appl., v. 1, n. 4, p. 517-548, 1988.
- [26] VAZ, C. **O software Maxima e aplicações**, 1^a ed., Belém: UFPA-editAedi, 2016.

Apêndice A

Programação

Neste apêndice apresentaremos a programação de todos os comandos utilizados no trabalho. A versão do aplicativo *Maxima* (que pode ser baixada gratuitamente em [20]) utilizada foi a 5.38.1. Para maiores detalhes sobre os comandos básicos do aplicativo consulte [26].

A.1 A1. Método de projeção

Nesta seção apresentaremos a implementação dos métodos de projeção.

A.1.1 Método da Colocação

O comando `colocacaoIN_hat` resolve uma equação integral de Fredholm linear de segunda espécie pelo Método da Colocação utilizando como base as *hat-functions*. Usamos a *regra de Simpson* para resolver numericamente as integrais.



```

(%i1) colocacaoIN_hat(f1,k1,lambda,a,b,n):=block(define(f(x),f1),
define(k(x,y),k1),
(h:(b-a)/n),
(nod:makelist(a+(i-1)*h,i,1,n+1)),
([globalsolve: false, programmode: true, ratprint: false]),
(simpson(g1,var,a1,b1,n1):=block(define(g(var),g1),
(h1:(b1-a1)/n1),
(X2:makelist(a1+i*h1, i, 0, n1)),
(I_SR:float(h1/3*(g(X2[1])+4*sum(g(X2[2*i]),i,1,n1/2)+
2*sum(g(X2[2*i+1]),i,1,(n1-2)/2)+g(X2[n1+1]))))),
(eq[i]:=lambda*X[i]-(X[1]/h*simpson(k(nod[i],y)*
(nod[2]-y),y,nod[1],nod[2],20)+sum(X[j]/h*(simpson(k(nod[i],y)*
(y-nod[j-1]),y,nod[j-1],nod[j],20)+simpson(k(nod[i],y)*
(nod[j+1]-y),y,nod[j],nod[j+1],20))),j,2,n)+X[n+1]/h*simpson(k(nod[i],y)*
(y-nod[n]),y,nod[n],nod[n+1],20))-f(nod[i])),
(SS:flatten(float(solve(flatten(makelist(float(eq[i]=0), i, 1, n+1)),
flatten(makelist(X[i], i, 1, n+1)))))),
(makelist(l[j](x):=if x<nod[j-1] then 0 else if x<=nod[j] then
(x-nod[j-1])/h else if x>nod[j+1]
then 0 else if nod[j]<=x then (nod[j+1]-x)/h,j,2,n)),
(l[1](x):=if x<nod[1] then 0 else if x<=nod[2] then (nod[2]-x)/h else 0),
(l[n+1](x):=if x<nod[n] then 0 else if x<=nod[n+1] then (x-nod[n])/h else 0),
define(u_n(x),sum(float(rhs(SS[i]))*l[i](x),i,1,n+1)),
(print("Solução aproximada: u_n(x)")),
(wxplot2d(u_n(x),[x,a,b],[legend,"Solução aproximada"],[ylabel,"u_n(x)"])),
kill(f,k,h,eq))$

```

A.1.2 Método de Galerkin

O comando `GalerkinF2_hat` resolve uma equação integral de Fredholm linear de segunda espécie pelo Método de Galerkin utilizando como base as *hat-functions*. Usamos de

integração de *regra dos trapézios* para resolver numericamente as integrais.



```
(%i2) GalerkinF2_hat(f1,k1,lambda,a,b,n):=block(define(f(x),f1),
define(k(x,y),k1), h:(b-a)/n,
nod:makelist(a+(i-1)*h,i,1,n+1),
trapez(g1,var,a1,b1,n1):=block(define(g(var),g1),
(h1:(b1-a1)/n1),
(X1:makelist(a1+i*h1, i, 0, n1)),
(I_TR:float(h1/2*(g(X1[1])+2*sum(g(X1[i]), i, 2, n1)+g(X1[n1+1]))))),
makelist(l[j](x):=if x<nod[j-1] then 0 else if x<=nod[j] then (x-nod[j-1])/h
else if x>nod[j+1] then 0 else if nod[j]<=x then (nod[j+1]-x)/h,j,2,n),
l[1](x):=if x<nod[1] then 0 else if x<=nod[2] then (nod[2]-x)/h else 0,
l[n+1](x):=if x<nod[n] then 0 else if x<=nod[n+1] then (x-nod[n])/h else 0,
for i:1 thru n+1 do
for j:1 thru n+1 do
(F[i]:trapez(f(x)*l[i](x),x,a,b,20),
A[i,j]:lambda*trapez(l[j](x)*l[i](x),x,a,b,20)-trapez(trapez(k(x,y)*l[j](y)*
l[i](x),y,a,b,20),x,a,b,20)),
eq[i]:=sum(X[j]*A[i,j],j,1,n+1)=F[i],
[globalsolve: false, programmode: true, ratprint: false],
SS:flatten(float(solve(flatten(makelist(float(eq[i]),i,1,n+1)),
flatten(makelist(X[i],i,1,n+1))))),
define(u_n(x),sum(float(rhs(SS[i]))*l[i](x),i,1,n+1)),
wxplot2d(u_n(x),[x,a,b],[legend,"Solução aproximada"],
[ylabel,"u_n(x)],[title,"Método de Galerkin"]),
kill(f,k,g,trapez,eq))$
```

A.1.3 Método de Galerkin Iterativo

O comando `Galerkin_Iterativo` resolve uma equação integral de Fredholm linear de segunda espécie pelo Método de Galerkin Iterativo utilizando como base as *hat-functions*. Usamos a *regra dos trapézios* para resolver numericamente as integrais.



```

(%i3) Galerkin_Iterativo(f1,k1,lambda,a,b,n,m):=block(define(f(x),f1),
define(k(x,y),k1), h:(b-a)/n,
nod:makelist(a+(i-1)*h,i,1,n+1),
trapez(g1,var,a1,b1,n1):=block(define(g(var),g1),
(h1:(b1-a1)/n1),
(X1:makelist(a1+i*h1, i, 0, n1)),
(I_TR:float(h1/2*(g(X1[1])+2*sum(g(X1[i]), i, 2, n1)+g(X1[n1+1]))))),
makelist(l[j](x):=if x<nod[j-1] then 0 else if x<=nod[j] then (x-nod[j-1])/h
else if x>nod[j+1] then 0 else if nod[j]<=x then (nod[j+1]-x)/h,j,2,n),
l[1](x):=if x<nod[1] then 0 else if x<=nod[2] then (nod[2]-x)/h else 0,
l[n+1](x):=if x<nod[n] then 0 else if x<=nod[n+1] then (x-nod[n])/h else 0,
for i:1 thru n+1 do
for j:1 thru n+1 do
(F[i]:trapez(f(x)*l[i](x),x,a,b,20),
A[i,j]:lambda*trapez(l[j](x)*l[i](x),x,a,b,20)-trapez(trapez(k(x,y)*l[j](y)*
l[i](x),y,a,b,20),x,a,b,20)),
eq[i]:=sum(X[j]*A[i,j],j,1,n+1)=F[i],
[globalsolve: false, programmode: true, ratprint: false],
SS:flatten(float(solve(flatten(makelist(float(eq[i]),i,1,n+1))),
flatten(makelist(X[i],i,1,n+1))))),
u_n:sum(float(rhs(SS[i]))*l[i](y),i,1,n+1),
for i: 1 thru m do
(u1:1/lambda*(f(x)+trapez(k(x,y)*u_n,y,a,b,20)),u_n:subst(y,x,u1)),
define(u_n(x),u1),
print("Solução aproximada u_n(x)"),
wxplot2d(u_n(x),[x,a,b],[legend,"Solução aproximada"],[ylabel,"u_n(x)"],
[title,"Método de Galerkin Iterativo"]),
kill(f,k,g,trapez,eq,u_n,u1))$

```

A.1.4 Caso não linear: Método da Colocação

O comando `colocacaoIN_hat` resolve uma equação integral de Fredholm não linear de segunda espécie pelo Método da Colocação utilizando como base as *hat-functions*. Usamos a *regra de Simpson* para resolver numericamente as integrais e o Método de Newton para resolver o sistema não linear.



```
(%i4) load(mnewton)$
```

O código é similar ao do caso linear da Seção A.1.1, apenas substitua

```
(SS:flatten(float(solve(flatten(makelist(float(eq[i]=0),i,1,n+1)),  
flatten(makelist(X[i],i,1,n+1)))))),
```

por

```
(SS:flatten(float(mnewton(flatten(makelist(float(eq[i]=0),i,1,n+1)),  
flatten(makelist(X[i],i,1,n+1)),makelist(0,j,1,n+1))))),
```

A.1.5 Caso não linear: Método da colocação modificado

O comando `colocacaoMDIN_hat` resolve uma equação integral de Fredholm não linear pelo Método da Colocação Modificado utilizando como base as *hat-functions*. Usamos a *regra de Simpson* para resolver numericamente as integrais e o Método de Newton para resolver o sistema não linear.



```

(%i5) colocacaoMDIN_hat(f,k,g,a,b,n):=block((h:(b-a)/n),
(nod:makelist(a+(i-1)*h,i,1,n+1)),
([globalsolve: false, programmode: true, ratprint: false]),
(simpson(g1,var,a1,b1,n1):=block(define(g2(var),g1),
(h1:(b1-a1)/n1),
(X2:makelist(a1+i*h1, i, 0, n1)),
(I_SR:float(h1/3*(g2(X2[1])+4*sum(g2(X2[2*i]),i,1,n1/2)+
2*sum(g2(X2[2*i+1]),i,1,(n1-2)/2)+g2(X2[n1+1]))))),
(makelist(l[j](x):=if x<nod[j-1] then 0 else if x<=nod[j] then
(x-nod[j-1])/h else if x>nod[j+1] then 0 else if nod[j]<=x then
(nod[j+1]-x)/h,j,2,n)),
(l[1](x):=if x<nod[1] then 0 else if x<=nod[2] then (nod[2]-x)/h else 0),
(l[n+1](x):=if x<nod[n] then 0 else if x<=nod[n+1] then (x-nod[n])/h else 0),
(eq[i]:=X[i]=g(nod[i],f(nod[i]))+(X[1]*simpson(k(nod[i],y)*
(nod[2]-y)/h,y,nod[1],nod[2],50)+sum(X[j]*(simpson(k(nod[i],y)*
(y-nod[j-1])/h,y,nod[j-1],nod[j],50)+simpson(k(nod[i],y)*
(nod[j+1]-y)/h,y,nod[j],nod[j+1],50))),j,2,n)+X[n+1]*
simpson(k(nod[i],y)*(y-nod[n])/h,y,nod[n],nod[n+1],50)))),
(SS:flatten(float(mnewton(flatten(makelist(float(eq[i]),i,1,n+1)),
flatten(makelist(X[i],i,1,n+1)),makelist(0,j,1,n+1))))),
define(z_n(x),sum(float(rhs(SS[i]))*l[i](x),i,1,n+1)),
define(u_n(x),f(x)+sum(simpson(k(x,y)*float(rhs(SS[i]))*l[i](y),y,a,b,50),i,1,n+1)),
(print("Solução aproximada: u_n(x)")),
wxplot2d(u_n(x),[x,a,b],[legend,"Solução aproximada"],[ylabel,"u_n(x)"],
[title,"Método da Colocação Modificado"]),
kill(f,k,g,h,eq))$

```

A.2 A2. Método de quadratura

Nesta seção apresentaremos a implementação do Método de Nyström.

A.2.1 Fórmula de Interpolação de Nystrom

O comando `interpol_nystrom` interpola um conjunto de pontos $\{\rho_n(x_1), \dots, \rho_n(x_n)\}$ como resultado do Método de Nyström, utilizando a fórmula conhecida como *Fórmula de Interpolação de Nyström*.



```
(%i6) interpol_nystrom(f2,k2,lambda,a,b,m):=block(define(f(x),f2),
define(k(x,y,t),k2),
(h:(b-a)/m),
(Y:makelist(a+(i-1)*h,i,1,m+1)),
define(u_nm(x,y),1/lambda*(f(x)+(h/2*k(x,y,Y[1])*rho_n(Y[1])+
sum(h*k(x,y,Y[j])*rho_n(Y[j]),j,2,m)+
h/2*k(x,y,Y[m+1])*rho_n(Y[m+1])))),
(print("Solução aproximada: u_nm(x,y)")),
wxplot3d(u_nm(x,y),[x,a,b],[y,a,b],[title,"Interpolação de Nyström"],
[legend,"Solução aproximada"]),
kill(f,k,h,eq))$
```

A.2.2 Método de Nyström com a regra dos trapézios

O comando `nystrom_trapez` resolve uma equação integral de Fredholm linear de segunda espécie pelo Método de Nyström utilizando a regra dos trapézios. Para interpolar usamos a Fórmula de Interpolação de Nyström.



```
(%i7) nystrom_trapez(f1,k1,lambda,a,b,n):=block(define(f(x),f1),
define(k(x,y),k1),
(h:(b-a)/n),
(Y:makelist(a+(i-1)*h,i,1,n+1)),
for i:1 thru n+1 do
for j:1 thru n+1 do
(K[i,j]:k(Y[i],Y[j]), F[i]:f(Y[i])),
(eq[i]:=lambda*X[i]-(h/2*K[i,1]*X[1]+sum(h*K[i,j]*X[j],j,2,n)+
h/2*K[i,n+1]*X[n+1])=F[i], simpsum),
([globalsolve: false, programmode: true, ratprint: false]),
(solsist:flatten(float(solve(makelist(float(eq[i]),i,1,n+1),
makelist(X[i],i,1,n+1))))),
define(rho_n(x),1/lambda*(f(x)+(h/2*k(x,Y[1])*rhs(solsist[1])+
sum(h*k(x,Y[j])*rhs(solsist[j]),j,2,n)+
h/2*k(x,Y[n+1])*rhs(solsist[n+1])))),
(print("Solução aproximada: rho_n(x))),
(wxplot2d(rho_n(x),[x,a,b],[legend,"Solução aproximada"],
[ylabel,"rho_n(x)],[title,"Método de Nyström])),
kill(f,k,h,eq))$
```

A.2.3 Método de Nyström com a regra de Simpson

O comando `nystrom_Simpson` resolve uma equação integral de Fredholm linear de segunda espécie pelo Método de Nyström utilizando a regra de Simpson. Para interpolar usamos a *interpolação de Lagrange*.



```

(%i8) nystrom_Simpson(f1,k1,lambda,a,b,n):=block(define(f(x),f1),
define(k(x,y),k1),
(h:(b-a)/n),
(Y:makelist(a+(i-1)*h,i,1,n+1)),
for i:1 thru n+1 do
for j:1 thru n+1 do
(K[i,j]:k(Y[i],Y[j]), F[i]:f(Y[i])),
(eq[i]:=x[i]-lambda*(h/3*K[i,1]*x[1]+sum((4*h)/3*K[i,2*j]*x[2*j],j,1,n/2)
+sum((2*h)/3*K[i,2*j+1]*x[2*j+1],j,1,(n-2)/2)+h/3*K[i,n+1]*x[n+1])-F[i]),
([globalsolve: false, programmode: true, ratprint: false]),
(solsist:flatten(float(solve(makelist(float(eq[i]=0),i,1,n+1),
makelist(x[i],i,1,n+1))))),
(X2:makelist(float(Y[i]),i,1,n+1)),
(Y2:makelist(rhs(solsist[i]),i,1,n+1)),
(interpol_Lagrange(X2,Y2):=block(L3:makelist(product(if i#k then x-X2[i]
else 1,i,1,length(X2))/(product(if i#k then X2[k]-X2[i] else 1,i,1,length(X2))),
k,1,length(X2)),
u_n(x):=sum(Y2[k]*L3[k],k,1,length(X2))),
(interpol_Lagrange(X2,Y2)),
(wxplot2d(u_n(x),[x,a,b],[legend,"Solução aproximada"],[ylabel,"u_n(x)"])),
kill(f,k,h,eq))$

```