UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Tiago Leandro Coelho Coelho

Problemas variacionais envolvendo integrais múltiplas

BELÉM - PA

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Tiago Leandro Coelho Coelho

Problemas variacionais envolvendo integrais múltiplas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

BELÉM - PA

2017

Dados Internacionais de Catalogação - na - Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós-Graduação do ICEN/UFPA

Coelho, Tiago Leandro Coelho
Problemas variacionais envolvendo integrais múltiplas/ Tiago Leandro Coelho Coelho; orientador, Cristina Lúcia Dias Vaz.-2017.
83f. il. 29 cm
Inclui bibliografias
Dissertação (Mestrado)) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2017.

.

1. Cálculo das variações. 2. Equações Lagrange. 3. Método Ritz. 4. Integrais múltiplas. 5. Máxima (Software). I. Vaz, Cristina Lúcia Dias, orient. II. Título.

CDD – 22 ed. 515.64

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Tiago Leandro Coelho Coelho

Problemas variacionais envolvendo integrais múltiplas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 28 de Junho de 2017.

Resultado: Aprovado

Banca Examinadora

Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz - Orientadora
PPGME/UFPA

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior - Membro
PPGME/UFPA
PDM/UFPA

Prof. Dr. Mario Tanaka Filho - Membro
UFOPA

Dedicatória

Aos meus pais, Djacir e Márcia;
Minha namorada, Valeska Santos;
Minha irmã, Tainá Coelho.

Agradecimentos

Agradeço, antes de tudo, ao Deus único e verdadeiro, infinito em misericórdia, soberano sobre todas as coisas, bondoso, longânimo, justo e eterno. Sem Ele, eu nada seria, pois Ele é tudo para mim. A Ele seja dada toda a honra e toda a glória, agora e para sempre.

Agradeço ao meu pai, Djacir Coelho, à minha mãe, Márcia Coelho, e à minha irmã, Tainá Coelho, pois sempre estiveram presentes, dando-me apoio e sustento. Muito do meu caráter tem como base a educação que me deram.

Agradeço à minha namorada, Valeska Santos, porque não deixou de segurar a minha mão, mesmo nas horas mais difíceis. Desfrutei de alegrias indizíveis graças à sua companhia e, juntos, vencemos tempestades. Ela se tornou meu exemplo de coragem e determinação. Se hoje consigo ver estrelas, ela é quem as fez brilhar. A ela dou meu eterno amor.

Agradeço imensamente à minha orientadora Cristina Vaz, porque esteve comigo desde o início da faculdade e acompanhou todo o meu progresso acadêmico. Com muita paciência e carinho, me ensinou a estudar matemática, me falou sobre a beleza dos números e abriu a minha mente para ser um questionador. Todo este material é resultado de uma longa caminhada junto dela. Agradeço o privilégio de ter suas orientações, que me levaram a crescer não só na matemática, mas na vida.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar os aspectos teóricos e as aplicações dos métodos clássicos do Cálculo Variacional. O Método Indireto tratado foi a Equação de Euler-Lagrange e o Método Direto foi o Método de Ritz. Na abordagem teórica da Equação de Euler-Lagrange, os resultados fundamentais são a primeira variação de Gâteaux e a derivada de Fréchet. A abordagem teórica do Método de Ritz trata fundamentalmente de construir sequências minimizantes convergindo para o mínimo do funcional. Nosso enfoque maior foram os problemas variacionais envolvendo integrais múltiplas. Obtivemos a Equação de Euler-Lagrange no caso da corda e da membrana e aplicamos o Método de Ritz no funcional quadrático. Para auxiliar no cálculo das soluções, utilizamos o software MAXIMA, o qual trabalha com manipulação de expressões simbólicas e numéricas.

Palavras-chave: Cálculo Variacional, Equação de Euler-Lagrange, Método de Ritz, MAXIMA.

Abstract

The objective of this work is to study the theoretical aspects and the applications of the classical methods of Variational Calculus. The Indirect Method treated was the Euler-Lagrange Equation and the Direct Method was the Ritz Method. In the theoretical approach of the Euler-Lagrange Equation, the fundamental results are the first variation of Gâteaux and the derivative of Fréchet. The theoretical approach of the Ritz Method is fundamentally to construct minimizing sequences converging to the minimum of the functional. Our major focus was on variational problems involving multiple integrals. We obtained the Euler-Lagrange Equation in the case of the string and the membrane and applied the Ritz Method in the quadratic functional. To assist in the calculation of the solutions, we used MAXIMA software, which works with manipulation of symbolic and numerical expressions.

Key Words: Variational Calculus, Euler-Lagrange Equation, Ritz Method, MAXIMA.

Sumário

Introdução **1**

1 Método Indireto: Equação de Euler-Lagrange **4**

1.1 Cálculo diferencial no espaço $\mathbb{R}^n$ 4

1.2 Cálculo diferencial em espaços de Banach 8

1.3 Equação de Euler-Lagrange 15

1.3.1 Problemas variacionais unidimensionais 15

1.3.2 Problemas variacionais bidimensionais 17

1.3.3 Problemas variacionais tridimensionais 22

2 Método Direto: Método de Ritz **26**

2.1 Um breve histórico 26

2.2 Descrição do Método 28

2.3 Viga de Euler-Bernoulli 39

2.4 Funcional Quadrático 48

Considerações Finais **55**

A Conceitos Importantes **57**

A.1 Espaço Vetorial 57

A.2 Combinação Linear 58

A.3 Base 59
A.4 Norma 59
A.5 Produto Interno 60
A.6 Espaço de Banach 60
A.7 Base de Schauder 61
A.8 Operador Linear 61
A.9 Funcional 61
A.10 Espaço Reflexivo 62
A.11 Curva de Jordan 62
A.12 Superfície Regular 63
A.13 Superfície Orientada 63

B Introdução ao aplicativo MAXIMA **64**

B.1 Funções 64
B.2 Sistema de Equações 65
B.3 Somatórios 66
B.4 Derivadas 67
B.5 Integrais 68
B.6 Gráficos 69
B.7 Comando *do* 70
B.8 Comando *ev* 71
B.9 Comando *flatten* 72
B.10 Comando *makelist* 72

Referências Bibliográficas **72**

Introdução

O Cálculo Variacional (ou Cálculo das Variações) é o ramo da Matemática que estuda e generaliza a teoria de máximos e mínimos. Suas aplicações podem ser encontradas em diversos ramos da ciência e até mesmo durante o nosso cotidiano, pois não é raro nos depararmos com situações do dia-a-dia em que queremos, por exemplo, calcular o lucro máximo com a venda de um produto ou saber qual caminho devemos percorrer para chegar no local almejado gastando o menor tempo possível.

Segundo a lenda, a rainha Dido de Cartago, durante o período da Grécia Antiga, foi a primeira pessoa da História a formular e resolver um problema variacional de forma excepcional. Foi prometido a Dido que ela teria toda a extensão de terra que ela conseguisse cercar com o couro de um boi. A pergunta a ser respondida era: Qual seria a curva que daria à rainha a extensão máxima de terra? Ela preparou uma extensa correia com o couro do boi e cercou um terreno semi-circular, beirando o Mar Mediterrâneo. Essa é então a lendária história da fundação de Cartago contada por Virgilio (70 a.C.- 19 a.C.) no livro Eneida.

Muitos anos depois, em 1696, Issac Newton deu início a um grande avanço no Cálculo das Variações. Ele utiliziou princípios variacionais para determinar a forma de um corpo que se move no ar, de modo que a resistência seja mínima. Ainda no final do século XVII, Jean Bernoulli propôs o famoso *Problema da Braquistócrona*, ou seja, encontrar a curva que minimiza o tempo de queda de um corpo entre dois pontos num plano vertical sujeito apenas à força da gravidade, e Jackes Bernoulli propôs e discutiu o problema das figuras isoperimétricas, isto é, caminhos planos fechados de uma dada espécie e perímetro fixo que abarcam uma área máxima (como o problema

da rainha Dido). Por causa dessas grandes contribuições dos irmãos Bernoulli, eles são considerados por muitos os inventores do Cálculo Variacional.

Em 1755, Lagrange havia escrito a Euler, o qual tinha um trabalho semelhante, sobre os métodos gerais que tinha desenvolvido para problemas de isoperimetria. Estes dois matemáticos desenvolveram então um importante método para tratar problemas variacionais, hoje conhecido como *Método Indireto*. Esse método tem esse nome porque não trabalha diretamente com o funcional, mas o transforma em uma equação diferencial e mostra que há uma equivalência na solução dos dois problemas. É neste contexto que surge a famosa *Equação de Euler-Lagrange* e desenvolve-se uma nova abordagem para calcular máximos e mínimos.

No século XIX, mais precisamente em 1857, B. Riemann assumiu, sem provar, um princípio que utilizou como base da sua teoria sobre as funções complexas, por ele chamado *Princípio de Dirichlet*, o qual garante a existência de mínimo para um problema bidimensional, e teve grande importância devido à sua relação com a equação de Laplace e por ser um problema que envolvia integrais múltiplas. Entretanto, por causa de um contraexemplo apresentado por Weierstrass nessa época, o Problema de Dirichlet ficou em aberto e muitos matemáticos tentaram salvar o trabalho de Riemann.

No início do século XX, ainda no intuito de resolver o problema exposto por Weierstrass, Walter Ritz desenvolveu o método que ficou conhecido como *Método de Ritz*, o qual foi utilizado por Hilbert na mesma época. O método proposto por Hilbert foi, essencialmente, o que hoje é conhecido como *Método Direto*. Houve então um salto de qualidade no cálculo variacional, pois, nesta nova abordagem, o objetivo passou a ser encontrar o mínimo ou o máximo a partir do próprio funcional, construindo sequências minimizantes e provando que convergem para a solução. Esta abordagem é até hoje utilizada em vários problemas da física e da engenharia. O *Método dos Elementos Finitos*, por exemplo, o qual é um dos mais utilizados atualmente, é um método direto que originou-se a partir dos trabalhos de Ritz.

Dado o resumo histórico do Cálculo Variacional, esta dissertação tem o intuito de apresentar as principais ideias e resultados dos Métodos Indiretos e dos Métodos Diretos - em especial, da Equação de Euler-Lagrange e do Método de Ritz, respectivamente - para problemas variacionais que envolvem integrais múltiplas. A importância do trabalho consiste em investigar problemas variacionais que são pouco abordados na literatura clássica.

O trabalho está organizado do seguinte modo:

No capítulo 1, serão apresentados os principais conceitos usados no trabalho do cálculo diferencial em espaços de Banach e a obtenção da Equação de Euler-Lagrange. Aplicaremos os resultados em exemplos clássicos da Física: a corda vibrante e a membrana.

No capítulo 2, apresentaremos as principais ideias do Método de Ritz e o principal teorema que garante a eficácia do método. Aplicaremos o método em problemas que envolvem funcionais quadráticos.

Capítulo 1

Método Indireto: Equação de Euler-Lagrange

Neste capítulo, serão apresentados os principais conceitos usados no trabalho do cálculo diferencial em espaços de Banach. Para melhor entendimento, apresentaremos primeiramente os conceitos do cálculo diferencial para os espaços $\mathbb{R}^n$. Por fim, obteremos a Equação de Euler-Lagrange para problemas variacionais envolvendo integrais múltiplas e descreveremos as aplicações clássicas da Física, a saber: corda vibrante e membrana, tendo como base a referência [1].

1.1 Cálculo diferencial no espaço $\mathbb{R}^n$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Uma δ-vizinhança de x_0 é um subconjunto $V_\delta(x_0)$ tal que

$$x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow \|x - x_0\| < \delta.$$

Para $h \in \mathbb{R}^n$, se $x = x_0 + h$, então $V_\delta(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n;\ \|h\| < \delta\}$.

O limite (quando existe)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \tag{1.1}$$

é chamado *derivada direcional* de f no ponto x_0 na direção de h.

Quando $h = e_i$, temos que a derivada direcional (quando existe) é chamada *derivada parcial* e é representada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

Dizemos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *derivável* quando as derivadas parciais existem. O vetor dado por

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

é chamado *vetor gradiente*.

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *diferenciável* em x_0 se existe um funcional $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e uma δ-vizinhança de x_0 tais que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = df_{x_0}(h) + \epsilon(h) \tag{1.2}$$

com

$$\lim_{h \to 0} \frac{\epsilon(h)}{\|h\|} = 0.$$

Dizemos então que df_{x_0} é o *diferencial* de f em x_0.

Quando estamos trabalhando na reta (espaço $\mathbb{R}$), as definições de derivabilidade e diferenciabilidade são equivalentes. Porém, quando passamos para os espaços $\mathbb{R}^n$, esta equivalência não acontece, mas é possível usar o vetor gradiente $\nabla f(x_0)$ para caracterizar o diferencial df_{x_0}. Para isso, usaremos os resultados abaixo:

Proposição 1.1. *O funcional $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é linear se, e somente se, existe um único vetor $\nu \in \mathbb{R}^n$ tal que $J[h] = \nu \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ e com $\cdot$ sendo o produto escalar de vetores.*

Demonstração:

Primeiramente, vamos provar a ida, ou seja, vamos provar que, se o funcional $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é linear, então existe um único vetor $\nu \in \mathbb{R}^n$ tal que $J[h] = \nu \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Então, para todo $h \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Como J é linear, podemos escrever:

$$J[h] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i J[e_i] = \nu \cdot h,$$

com $\nu_i = J[e_i]$. Suponha agora que existem ν_1 e ν_2 tais que $J[h] = \nu_1 \cdot h$ e $J[h] = \nu_2 \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$. Então:

$$\begin{aligned} \nu_1 \cdot h &= \nu_2 \cdot h \\ (\nu_1 - \nu_2) \cdot h &= 0. \end{aligned}$$

Como a igualdade é válida para todo $h \in \mathbb{R}^n$, tomando $h = (\nu_1 - \nu_2)$, obtemos que $\nu_1 = \nu_2$.

Agora, para provarmos a volta, considere $J[h] = \nu \cdot h$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$. Então obtemos que

$$\begin{aligned} L\left[\alpha h + \beta k\right] &= \nu \cdot (\alpha h + \beta k) \\ &= \alpha\nu \cdot h + \beta\nu \cdot k \\ &= \alpha J\left[h\right] + \beta J\left[k\right]. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.2. *Se f é diferenciável em x_0, então existem as derivadas parciais em x_0 e*

$$df_{x_0}(h) = \nabla f\left(x_0\right) \cdot h, \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração:

Como f é diferenciável em x_0, a igualdade (1.2) é válida. Tomando $h = te_i$, com $t \in \mathbb{R}$ e $t \neq 0$, obtemos que

$$\|t\| < \delta \Rightarrow f(x_0 + te_i) - f(x_0) = df_{x_0}\left(te_i\right) + \epsilon\left(te_i\right),$$

com

$$\lim_{t \to 0} \frac{\epsilon\left(te_i\right)}{t} = 0.$$

Dividindo a expressão obtida por t e usando a linearidade de df_{x_0}, segue que

$$\|t\| < \delta \Rightarrow \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = df_{x_0}(e_i) + \frac{\epsilon(te_i)}{t},$$

o que implica que as derivadas parciais existem e $df_{x_0}(e_i) = D_i f(x_0)$.

Como df_{x_0} é um funcional linear, pela Proposição 1.1, temos que $\nu_i = D_i f(x_0)$. Logo, concluímos que

$$df_{x_0}(h) = \nabla f(x_0) \cdot h, \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

■

Portanto, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então f é derivável e podemos identificar o diferencial df_{x_0} como o vetor gradiente.

Dizemos que x_0 é um extremo local de f se a diferença $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ não muda de sinal numa vizinhança de x_0, ou seja, se existe um $\delta > 0$ tal que

- $\|h\| < \delta \Rightarrow \Delta f \geq 0$, então x_0 é um mínimo local;
- $\|h\| < \delta \Rightarrow \Delta f \leq 0$, então x_0 é um máximo local.

Para encontrar o extremo local de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, precisamos de uma condição necessária, a qual será detalhada no teorema abaixo:

Teorema 1.1. *Uma condição necessária para que a função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tenha um extremo local em $\overline{x}$ é $\nabla f(\overline{x}) = 0$ numa vizinhança de $\overline{x}$.*

Demonstração:

Suponha que $\overline{x}$ é o mínimo de f (a demonstração para o máximo é análoga). Como f é diferenciável, existe um δ tal que a igualdade (1.2) é verdadeira para todo h com $\|h\| < \delta$. Escolhendo, em particular, $h = t\, h_0$, com $t \in \mathbb{R}$, $\|h_0\| \neq 0$, $|t| \leq 1$ e $\|h_0\| < \delta$, temos que

$$f(\overline{x} + th_0) - f(\overline{x}) = df_{\overline{x}}(th_0) + \epsilon(th_0)$$

com

$$\lim_{t\to 0}\frac{\epsilon(th_0)}{t}=0.$$

Como $\overline{x}$ é o mínimo de f, segue que

$$f(\overline{x}+th_0)-f(\overline{x})=df_{\overline{x}}(th_0)+\epsilon(th_0)\geq 0.$$

Considerando $0<t\leq 1$ e usando a linearidade de $df_{\overline{x}}$, obtemos que

$$df_{\overline{x}}(h_0)+\frac{\epsilon(th_0)}{t}\geq 0.$$

Como $\lim \frac{\epsilon(th_0)}{t}=0$, então

$$df_{\overline{x}}(h_0)\geq 0.$$

De maneira análoga, para $-1\leq t<0$, temos que

$$df_{\overline{x}}(h_0)\leq 0.$$

Portanto, $df_{\overline{x}}(h_0)=\nabla f(\overline{x})\cdot h_0=0$ para todo $\|h_0\|<\delta$. Como h_0 é arbitrário, então $\nabla f(\overline{x})=0$ na δ-vizinhança de $\overline{x}$, o que implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})=0,\ \ i=1,2,\ldots,n.$$

■

1.2 Cálculo diferencial em espaços de Banach

O objetivo nesta seção é generalizar os conceitos vistos até aqui para espaços mais gerais. Para isso, serão considerados um espaço de Banach X e um funcional $J:X\to\mathbb{R}$.

Uma δ-vizinhança de $\overline{u}$ é um subconjunto $V_\delta(\overline{u})$ de X tal que

$$u\in V_\delta(\overline{u})\Rightarrow\|u-\overline{u}\|<\delta.$$

Para $h \in X$, se $u = \overline{u} + h$, então $V_\delta(\overline{u}) = \{h \in X;\ \|h\| < \delta\}$. Sejam $V(\overline{u}) \subseteq X$ uma vizinhança de $\overline{u}$ e $J : V(\overline{u}) \to \mathbb{R}$. Para $h \in X$ fixo, considere a função

$$\phi(t) = J\left[\overline{u} + th\right],$$

com $t \in \mathbb{R}$ um parâmetro na vizinhança de $t = 0$.

Definição 1.1. *(Primeira Variação de Gâteaux)*

Seja $\overline{u}$ um extremo de J. A primeira variação de Gâteaux de J em $\overline{u}$ em relação a h, representada por $\delta J(\overline{u}; h)$, é definida por

$$\begin{aligned} \delta J(\overline{u}; h) = \phi'(0) &= \frac{d}{dt} J[\overline{u} + th]\bigg|_{t=0} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{J[\overline{u} + th] - J[\overline{u}]}{t} \end{aligned}$$

quando o limite existe para $h \in X, t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2. *(Primeira Derivada de Gâteaux)*

Diz-se que $J : X \to \mathbb{R}$ tem primeira derivada de Gâteaux no extremo $\overline{u}$ em relação a h se, e somente se, existe $\delta J(\overline{u}; h)$ para todo $h \in X$ e existe um operador $J_{\overline{u}} : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$J_{\overline{u}}[h] = \delta J(\overline{u}; h),\ \forall h \in X.$$

Note que a primeira variação e a primeira derivada de Gâteaux não apresentam necessariamente linearidade. Porém, é importante destacar que elas possuem a propriedade de serem homogêneas de grau 1, como demonstrado abaixo.

Proposição 1.3. *A primeira variação do funcional $J[u]$ em $u = \overline{u}$ é homogênea de grau 1, ou seja, $\forall h \in X$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $\delta J(\overline{u}; \lambda h) = \lambda\, \delta J(\overline{u}; h)$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} \delta J(\overline{u}; \lambda h) &= \lim_{t \to 0} \frac{J[\overline{u} + t\lambda h] - J[\overline{u}]}{t} \\ &= \lim_{\nu \to 0} \lambda \left(\frac{J[\overline{u} + \nu h] - J[\overline{u}]}{\nu} \right) = \lambda\, \delta J(\overline{u}; h). \end{aligned}$$

■

Definição 1.3. *(Segunda Variação de Gâteaux)*

Sejam X um espaço normado, $J : X \to \mathbb{R}$ e $\overline{u}$ o extremo de J. A segunda variação de Gâteaux de J em $\overline{u}$, representada por $\delta^2 J(\overline{u}; h, k)$, é definida por

$$\begin{aligned} \delta^2 J(\overline{u}; h, k) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} J(\overline{u} + sk + th)\Big|_{t=s=0} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{\delta J(\overline{u} + sk; h) - \delta J(\overline{u}; h)}{s} \end{aligned}$$

quando o limite existe para $h, k \in X, t, s \in \mathbb{R}$.

Definição 1.4. *(Segunda Derivada de Gâteaux)*

Diz-se que $J : X \to \mathbb{R}$ tem segunda derivada de Gâteaux no extremo $\overline{u}$ se, e somente se, existe $\delta^2 J(\overline{u}; h, k)$ para todo $h, k \in X$ e existe um operador $D^2 J_{\overline{u}} : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

$$D^2 J_{\overline{u}}[h, k] = \delta^2 J(\overline{u}; h, k), \ \forall h, k \in X.$$

Observe que a derivada de Gâteaux generaliza o conceito de derivabilidade para funções de espaços de Banach. A definição seguinte generaliza o conceito de diferenciabilidade.

Definição 1.5. *(Derivada de Fréchet)*

Diz-se que $J : X \to \mathbb{R}$ é Fréchet Diferenciável (ou que tem derivada de Fréchet) no extremo $\overline{u}$ em relação a h se existe um $\delta > 0$ tal que, $\forall h \in X$,

$$\|h\| < \delta \Rightarrow J[\overline{u} + h] - J[\overline{u}] = J_{\overline{u}}[h] + \epsilon(h), \tag{1.3}$$

sendo o operador $J_{\overline{u}}$ linear e contínuo e

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\epsilon(h)}{\|h\|} = 0.$$

De maneira análoga à Proposição 1.2, iremos mostrar a relação entre as derivadas de Fréchet e Gâteaux a partir da proposição abaixo:

Proposição 1.4. *Se $J : X \to \mathbb{R}$ tem derivada de Fréchet no extremo $\overline{u}$, então J também tem derivada de Gâteaux em $\overline{u}$.*

Demonstração:

Tome $h = th_0$, com $h_0 \neq 0$, $|t| \leq 1$ e $\|h_0\| < \delta$. Então (1.3) implica que

$$|t|\,\|h_0\| < \delta \Rightarrow J[\overline{u} + th_0] - J[\overline{u}] = J_{\overline{u}}[th_0] + \epsilon(th_0)$$

com

$$\lim_{t\to 0} \frac{\epsilon(th_0)}{t} = 0.$$

Pela definição de Derivada de Fréchet, como o operador $J_{\overline{u}}$ é linear, para $t \neq 0$, temos que

$$|t| < \frac{\delta}{\|h_0\|} \Rightarrow \frac{J[\overline{u} + th_0] - J[\overline{u}]}{t} = J_{\overline{u}}[h_0] + \frac{\epsilon[th_0]}{t}.$$

Segue então que

$$J_{\overline{u}}[h_0] = \lim_{t\to 0} \frac{J[\overline{u} + th_0] - J[\overline{u}]}{t} = \delta J(\overline{u}; h_0).$$

Como h_0 é arbitrário, a proposição é provada.

■

Logo, como a existência da derivada de Fréchet implica na existência da derivada de Gâteaux, serão considerados para este documento funcionais que têm derivada de Fréchet, ou seja, que são diferenciáveis.

Dizemos que $\overline{u} \in X$ é um extremo local de $J : X \to \mathbb{R}$ se a diferença

$$\Delta J_{\overline{u}}[h] = J[\overline{u} + h] - J[\overline{u}]$$

não muda de sinal para todo h numa δ-vizinhança de $\overline{u}$, ou seja, se existe um $\delta > 0$ tal que

- $\|h\| < \delta \Rightarrow \Delta J_{\overline{u}}[h] \geq 0$, então $\overline{u}$ é um mínimo local;
- $\|h\| < \delta \Rightarrow \Delta J_{\overline{u}}[h] \leq 0$, então $\overline{u}$ é um máximo local.

Antes de verificarmos uma condição necessária para encontrar extremos de funcionais $J : X \to \mathbb{R}$, vale ressaltar que não estamos interessados em buscar extremos em todo o espaço X, mas, sim, em um subconjunto no qual certas condições, como, por exemplo, as de fronteira, são satisfeitas. Porém, normalmente, esse subconjunto não é um espaço vetorial, sendo necessário então definirmos o seguinte espaço:

Definição 1.6. *(Espaço das Variações Admissíveis)*

Seja $\mathcal{X}$ o subconjunto de X tal que as condições de fronteira do problema variacional são satisfeitas. Dizemos que $\mathcal{V} \subset X$ é um espaço das variações admissíveis de $\mathcal{X}$ se para toda $u \in \mathcal{X}$ e toda $h \in \mathcal{V}$ tem-se que $u + h \in \mathcal{X}$.

Exemplo 1.1. *Se $\mathcal{X} = \{u \in C^1([a,b]); u(a) = u_a, u(b) = u_b\}$, então*
$\mathcal{V} = \{h \in C^1([a,b]); h(a) = 0, h(b) = 0\}$ é um espaço de variações admissíveis de $\mathcal{X}$.

Uma vez que está bem definido onde iremos buscar os extremos de um funcional, usaremos os resultados abaixo:

Proposição 1.5. *$\delta J(\overline{u}; h)$ é a primeira variação de Gâteaux do funcional $J : X \to \mathbb{R}$ em $\overline{u}$ se, e somente se, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\|h\| < \delta \Rightarrow J[\overline{u} + h] - J[\overline{u}] = \delta J(\overline{u}; h) + \epsilon(h)$$

com

$$\lim_{t \to 0} \frac{\epsilon(h)}{t} = 0.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $\delta J(\overline{u}; h)$ é a 1ª variação do funcional $J[\overline{u}]$, então o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{J[\overline{u} + th] - J[\overline{u}]}{t}$$

existe para $t \in \mathbb{R}$.

Sendo assim, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|th\| < \delta \Rightarrow J[\overline{u} + th] - J[\overline{u}] = t\, \delta J(\overline{u}; h) + \alpha[th]t$$

com

$$\lim_{t\to 0} \alpha[th] = 0.$$

Usando a Proposição 1.3, segue que

$$\|th\| < \delta \Rightarrow J[\overline{u} + th] - J[\overline{u}] = \delta J(\overline{u}; th) + \alpha[th]t$$

Fazendo $k = th$:

$$\|k\| < \delta \Rightarrow J[\overline{u} + k] - J[\overline{u}] = \delta J(\overline{u}; k) + \epsilon[k]$$

com

$$\lim_{t\to 0} \frac{\epsilon[k]}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha[th]}{t} t = 0.$$

($\Leftarrow$) Tome $h = th_0$, com $h_0 \neq 0$, $|t| \leq 1$ e $\|h_0\| < \delta$.

Então temos que

$$|t|\,\|h_0\| < \delta \Rightarrow J[\overline{u} + th_0] - J[\overline{u}] = \delta J(\overline{u}; th_0) + \epsilon[th_0]$$

com

$$\lim_{t\to 0} \frac{\epsilon[th_0]}{t} = 0.$$

Logo, pela Proposição 1.3 e para $t \neq 0$:

$$|t| < \frac{\delta}{\|h_0\|} \Rightarrow \frac{J[\overline{u} + th_0] - J[\overline{u}]}{t} = \delta J(\overline{u}; h_0) + \frac{\epsilon[th_0]}{t}.$$

Segue que

$$\delta J(\overline{u}; h_0) = \lim_{t\to 0} \frac{J[\overline{u} + th_0] - J[\overline{u}]}{t}.$$

Como h_0 é arbitrário, a proposição é provada.

■

Teorema 1.2. *Se $\overline{u}$ é um extremo local do funcional $J[u]$, então*

$$\delta J(\overline{u}; h) = 0, \ \ \forall h \in \mathcal{V}.$$

Demonstração:

Suponha que $\overline{u}$ é um mínimo local de $J[u]$. Então, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta_1 \Rightarrow \Delta J[\overline{u}] = J[\overline{u} + h] - J[\overline{u}] \geq 0.$$

Além disso, pela Proposição 1.5, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow J[\overline{u} + h] - J[\overline{u}] = \delta J(\overline{u}; h) + \epsilon[h]$$

com

$$\lim_{t \to 0} \frac{\epsilon[h]}{t} = 0.$$

Tomando $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, obtemos que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \delta J(\overline{u}; h) + \epsilon[h] \geq 0.$$

Sem alterar a desigualdade, fazendo $h = th_0$ com $h_0 \in \mathcal{V}$, $h_0 \neq 0$, $|t| < 1$ e $\|h_0\| < \delta$, temos que

$$|t| \, \|h_0\| < \delta \Rightarrow \delta J(\overline{u}; th_0) + \epsilon[th_0] \geq 0.$$

Usando agora a Proposição 1.3 e considerando $0 < t \leq 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 < t < \frac{\delta}{\|h_0\|} \quad &\Rightarrow \quad \delta J(\overline{u}; h_0) + \frac{\epsilon[th_0]}{t} \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \delta J(\overline{u}; h_0) \geq 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, considerando $-1 \leq t < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{\|h_0\|} < t < 0 \quad &\Rightarrow \quad \delta J(\overline{u}; h_0) + \frac{\epsilon[th_0]}{t} \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad \delta J(\overline{u}; h_0) \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\delta J(\overline{u}; h) = 0,$$

para todo $h \in \mathcal{V}$ tal que $\|h\| < \delta$.

■

A partir do Teorema 1.2 e usando a Proposição 1.4, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 1.1. *Se $J : X \to \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável no extremo $\overline{u}$, então*

$$J_{\overline{u}}[h] = 0, \ \ \forall h \in \mathcal{V}.$$

1.3 Equação de Euler-Lagrange

1.3.1 Problemas variacionais unidimensionais

Uma vez que obtemos uma condição necessária para encontrar extremos de funcionais, passaremos agora a trabalhar com funcionais menos gerais e utilizar os resultados obtidos na seção anterior para chegarmos na *Equação de Euler-Lagrange*, começando pelo caso unidimensional.

Sejam $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $f(x,y,z)$ uma função de classe C^2. Sejam ainda $X = C^2([a,b])$, $\mathcal{X} = \{u \in X;\ u(a) = u_1 \text{ e } u(b) = u_2\}$ e $\mathcal{V} = \{h \in X;\ h(a) = h(b) = 0\}$. Considere então o problema de minimizar o seguinte funcional:

$$\begin{cases} J[u] = \displaystyle\int_a^b f(x,u,u')dx, \ \ u \in C^2([a,b]) \\ u(a) = u_1,\ u(b) = u_2 \end{cases}$$

Suponha que $\overline{u} \in \mathcal{X}$ minimiza o funcional do problema. Então, pelo Teorema 1.2,

$$\delta J(\overline{u}; h) = 0,$$

para todo $h(x)$ admissível.

Fazendo $\phi(t) = J[\overline{u} + th]$ para uma função $h(x)$ fixa em $\mathcal{V}$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_a^b f(x, \overline{u} + th, \overline{u}' + th')dx. \\ \phi'(0) = \delta J(\overline{u}; h) &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial u'} h' \right) dx = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Considere

$$\nu(x) = \int_a^b f_u\left(s, u(s), u'(s)\right) dx.$$

Utilizando integração por partes, note que

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial u} h \, dx = h \, \nu|_a^b - \int_a^b \nu \, h' \, dx.$$

Como $h \in \mathcal{V}$, (1.4) torna-se

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial u'} - \nu \right) h' \, dx = 0, \ \ \forall h \in \mathcal{V}. \tag{1.5}$$

Provaremos agora o seguinte lema:

Lema 1.1. *(Lema de Dubois-Raymund)*

Se $\alpha(x) \in C([a,b])$ *e se*

$$\int_a^b \alpha(x)h'(x)dx = 0, \ \ \forall h \in \mathcal{V}, \tag{1.6}$$

então $\alpha(x) = c$ *para todo* $x \in [a,b]$*, sendo* c *uma constante.*

Demonstração:

Para $c = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \alpha(x)dx$, temos que

$$\int_a^b (c - \alpha(x))\, dx = 0. \tag{1.7}$$

Considere ainda uma função

$$\overline{h}(x) = \int_a^x (c - \alpha(s))\, ds.$$

Note que $\overline{h}(a) = \overline{h}(b) = 0$. Como $\overline{h} \in \mathcal{V}$, por hipótese, segue que

$$\int_a^b \alpha(x)\overline{h}'(x)dx = \int_a^b \alpha(x)\,(c - \alpha(x))\, dx = 0. \tag{1.8}$$

Multiplicando (1.7) por c e (1.8) por (-1) e somando o resultado, obtemos que

$$\begin{aligned} c\int_a^b (c - \alpha(x))\, dx - \int_a^b \alpha(x)\,(c - \alpha(x))\, dx &= 0 \\ \int_a^b \left(c^2 - 2c\alpha(x) + (\alpha(x))^2\right) dx &= 0 \\ \int_a^b (c - \alpha(x))^2\, dx &= 0. \end{aligned}$$

Como $(c - \alpha(x))^2 \geq 0$, concluímos que $\alpha(x) = c$ em $[a,b]$.

■

Sendo $\overline{\alpha}(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u'} - \nu(x)\right)$ uma função contínua, pelo Lema 1.1, (1.5) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u'} - \nu(x) &= c \\ \frac{\partial f}{\partial u'} &= \int_a^b f_u\,(s, u(s), u'(s))\, ds + c \end{aligned} \tag{1.9}$$

Derivando a expressão (1.9) em relação a x, obtemos a equação

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right) = 0, \tag{1.10}$$

a qual é chamada de *Equação de Euler-Lagrange* para o caso $u = u(x)$.

1.3.2 Problemas variacionais bidimensionais

Sejam $\partial\Omega$ uma curva de Jordan retificável, Ω um aberto limitado não vazio do $\mathbb{R}^2$ com fronteira $\partial\Omega$, $f(x, y, u, p, q)$ uma função com derivadas até 2^{a} ordem contínuas em todos os seus argumentos e $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Sejam ainda o espaço normado $X = C^2(\overline{\Omega})$ com a norma $\|u\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$, $\mathcal{X} = \{u \in X; u = g \text{ em } \partial\Omega\}$ e $\mathcal{V} = \{h \in X; h = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$. Considere então o problema de minimizar o seguinte funcional:

$$\begin{cases} J[u] = \displaystyle\int\int_\Omega f(x, y, u, u_x, u_y)dxdy, \ \ u \in C^2(\overline{\Omega}) \\ u = g \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha que $\overline{u} \in \mathcal{X}$ minimiza o funcional do problema. Então, pelo Teorema (1.2),

$$\delta J(\overline{u}; h) = 0,$$

para todo $h(x, y)$ admissível.

Fazendo $\phi(t) = J[\overline{u} + th]$ para uma função $h(x, y)$ fixa em $\mathcal{V}$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int\int_\Omega f(x, y, \overline{u} + th, \overline{u}_x + th_x, \overline{u}_y + th_y)dxdy. \\ \phi'(0) = \delta J(\overline{u}; h) &= \int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial u}h + \frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right) dxdy = 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Note que

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial u_x}h_x + \frac{\partial f}{\partial u_y}h_y\right)dxdy &= \int\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}h\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}h\right)\right)dxdy \\ &- \int\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right)h\,dxdy \\ &= \int\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}h\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial u_y}h\right)\right)dxdy \\ &- \int\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right)h\,dxdy.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Aplicando o Teorema de Green (veja A.1) em (1.12), obtemos que

$$\int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial u_x}h_x + \frac{\partial f}{\partial u_y}h_y\right)dxdy = \oint_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial f}{\partial u_y}\right)hd\Gamma - \int\int_\Omega \left(\frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y}\right)hdxdy. \tag{1.13}$$

Como $h(x,y)$ zera na fronteira, temos que

$$\int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right)dxdy = -\int\int_\Omega \left(\frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y}\right)hdxdy.$$

Logo, (1.11) torna-se

$$\int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right)h\,dxdy = 0,\ \ \forall h \in \mathcal{V}. \tag{1.14}$$

Vamos agora provar o *Lema Fundamental do Cálculo Variacional* para o caso bidimensional:

Lema 1.2. *Se $\alpha(x,y) \in C(\Omega)$ e se a integral*

$$\int\int_\Omega \alpha(x,y)h(x,y)dxdy = 0,\ \ \forall h \in \mathcal{V}, \tag{1.15}$$

então $\alpha(x,y) = 0$ em todo o seu domínio.

Demonstração:

Suponha, por contradição, que a função $\alpha(x,y)$ é positiva em algum ponto $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. Então, como $\alpha(x,y) \in C(\Omega)$, existe uma bola $B[a;r] \subset \Omega$ tal que

$$B\left[a;r\right] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq r\right\}.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} &\leq r \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 &\leq r^2 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Agora, considere uma função $\overline{h}(x,y)$ tal que

$$\overline{h}(x,y) = \begin{cases} \left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2\right]^3, \text{ se } (x,y) \in B[a;r] \\ 0, \text{ se } (x,y) \notin B[a;r]. \end{cases}$$

Note que $\overline{h}(x,y) \in \mathcal{V}$. Porém, neste caso, a integral (1.15) se reduz a uma integral ao longo da bola $B[a;r]$, sendo então diferente de zero. Esta contradição prova o lema.

■

Portanto, aplicando o Lema 1.2 em (1.14), obtemos a equação de Euler-Lagrange para o caso bidimensional:

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right) = 0. \tag{1.16}$$

■

Princípio de Hamilton

Um dos princípios que têm uma enorme importância para o cálculo variacional é o princípio de mínima ação. Este princípio é baseado na ideia de que a natureza sempre minimiza certas quantidades de energia quando ocorre um processo físico.

O primeiro de tais princípios de mínima ação foi desenvolvido no campo da óptica: Hero da Alexandria, no século II a.C., estabeleceu que a lei que governa a reflexão da luz podia ser obtida pela afirmação que um raio de luz, viajando de um ponto para outro de uma reflexão de um espelho plano, sempre toma a menor trajetória possível. Entretanto, o Princípio de Hero não pôde fornecer uma lei correta para a refração.

Pensando nisso, em 1657, Fermat reformulou o princípio de Hero, postulando que um raio de luz sempre viaja de um ponto para outro num meio por uma trajetória que requer o mínimo de tempo. O Princípio de Fermat do mínimo tempo nos leva para a lei correta da reflexão e para a lei de Snell, da refração.

No final do século XVII, o cálculo variacional começou a ser desenvolvido por Newton, Leibniz e Bernoulli e, em 1747, Maupertuis foi o primeiro a aplicar um princípio geral da mínima ação na mecânica, afirmando que a trajetória do movimento ocorre com a mínima ação, mas a definição de *ação* ainda não estava bem consolidada.

Por fim, em dois artigos publicados em 1834 e 1835, Willian Rowan Hamilton, um matemático escocês e astrônomo, anunciou o princípio dinâmico que seria a possível base para toda a mecânica e, além disso, para toda a física clássica. O *Princípio de Hamilton* enuncia que a real trajetória do movimento de um sistema físico é a que minimiza o *funcional ação*, dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt, \tag{1.17}$$

sendo T a energia cinética e U a energia potencial. O funcional L é então chamado de *Lagrangiano* do sistema.

Aliado com a Equação de Euler-Lagrange, o Príncipio de Hamilton é uma importante ferramenta na formulação de alguns problemas da física e da engenharia.

Problema da corda vibrante

Seja uma corda flexível sob a ação de uma tensão constante τ ao longo do eixo x, tendo as extremidades presas nos pontos $x = 0$ e $x = l$. A amplitude de vibração de um ponto da corda na posição x e no tempo t é dada por $u(x, t)$. Considere ainda que

- A inclinação $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ é muito pequena;
- A velocidade da corda é $\dfrac{\partial u}{\partial t}$;
- As condições de contorno são dadas por $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Supondo que a corda tem densidade de massa $\rho(x) > 0$, podemos calcular a energia cinética para um elemento infinitesimal dx da seguinte forma:

$$dT = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

Sendo assim, a energia cinética T é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \tag{1.18}$$

Por sua vez, a energia potencial U é o trabalho realizado pela resultante das forças externas aplicadas à corda. Considerando apenas a tensão τ, temos que o trabalho é dado por

$$U = \tau \left(\int_0^l ds - l \right) = \tau \left(\int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx - l \right).$$

Para pequenas vibrações, podemos considerar que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

Logo,

$$U = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \tag{1.19}$$

Usando (1.18) e (1.19), o lagrangiano do sistema torna-se

$$L = T - U = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx.$$

Aplicando o Princípio de Hamilton (equação (1.17)), obtemos que

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left(\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx dt. \tag{1.20}$$

Como

$$f(x,t,u,u_x,u_t) = \frac{1}{2}\left(\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right),$$

temos que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \ \ \frac{\partial f}{\partial u_x} = -\tau\frac{\partial u}{\partial x}, \ \ \frac{\partial f}{\partial u_t} = \rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange para o funcional ação J torna-se

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u_t}\right) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\end{gathered} \tag{1.21}$$

chamada de *equação diferencial da corda vibrante*, também conhecida por *equação da onda*.

■

1.3.3 Problemas variacionais tridimensionais

Sejam $\partial\Omega$ uma superfície regular orientada pela normal exterior η, Ω um aberto limitado não vazio do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$, $f(x,y,u,p,q,r,s)$ uma função com derivadas até 2ª ordem contínuas em todos os seus argumentos e $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Sejam ainda o espaço normado $X = C^2(\overline{\Omega})$ com a norma $\|u\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$, $\mathcal{X} = \{u \in X; u = g \text{ em } \partial\Omega\}$ e $\mathcal{V} = \{h \in X; h = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$. Considere então o problema de minimizar o seguinte funcional:

$$\begin{cases} J[u] = \int\int\int_\Omega f(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)dxdydz, \ \ u \in C^2(\overline{\Omega}) \\ u = g \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha que $\overline{u} \in X$ minimiza o funcional do problema. Então, pelo Teorema 1.2,

$$\delta J_{\overline{u}}[h] = 0,$$

para todo $h(x, y, z)$ admissível.

Fazendo $\phi(t) = J[\overline{u} + th]$ para uma função $h(x, y, z)$ fixa em $\mathcal{V}$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int\int\int_\Omega f(x, y, z, \overline{u} + th, \overline{u}_x + th_x, \overline{u}_y + th_y, \overline{u}_z + th_z) dxdydz. \\ \phi'(0) = \delta J_{\overline{u}}[h] &= \int\int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial u} h + \frac{\partial f}{\partial u_x} h_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} h_y + \frac{\partial f}{\partial u_z} h_z \right) dxdydz = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Note que

$$\begin{aligned} & \int\int\int_\Omega \left(f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y + f_{u_z} h_z \right) dxdydz \\ = & \int\int\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(f_{u_x} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_{u_y} h \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(f_{u_z} h \right) \right) dxdydz \\ - & \int\int\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial u_z} \right) \right) h \, dxdydz \end{aligned} \quad (1.23)$$

Aplicando o Teorema da Divergência (veja A.2) em (1.23), obtemos que

$$\begin{aligned} & \int\int\int_\Omega \left(f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y + f_{u_z} h_z \right) dxdydz \\ = & \int\int_{\partial\Omega} \left(f_{u_x} h \, dy \wedge dz + f_{u_y} h \, dz \wedge dx + f_{u_z} h \, dx \wedge dy \right) \\ - & \int\int\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial u_z} \right) \right) h \, dxdydz \end{aligned} \quad (1.24)$$

Como $h(x, y)$ zera na fronteira, segue que

$$\begin{aligned} & \int\int\int_\Omega \left(f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y + f_{u_z} h_z \right) dxdydz \\ = & -\int\int\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial u_z} \right) \right) h \, dxdydz. \end{aligned}$$

Logo, (1.22) torna-se

$$\int\int\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial u_z} \right) \right) h \, dxdydz = 0, \ \ \forall h \in \mathcal{V}. \quad (1.25)$$

Vamos agora enunciar o *Lema Fundamental do Cálculo Variacional* para o caso tridimensional, cuja demonstração é análoga à do caso bidimensional (Lema 1.2):

Lema 1.3. *Se $\alpha(x,y,z) \in C(\Omega)$ e se a integral*

$$\int\int\int_{\Omega} \alpha(x,y,z)h(x,y,z)dxdydz = 0, \ \ \forall h \in \mathcal{V}, \tag{1.26}$$

então $\alpha(x,y,z) = 0$ em todo o seu domínio.

Portanto, aplicando o Lema 1.3 em 1.25, obtemos a equação de Euler-Lagrange para o caso tridimensional:

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial u_z}\right) = 0. \tag{1.27}$$

■

Problema da membrana vibrante

Considere o movimento transversal de uma membrana flexível homogênea sob a ação de uma tensão constante τ ao longo de uma região plana Ω, tendo as extremidades presas. A amplitude de vibração de um ponto da superfície na posição (x,y) e no tempo t é dada por $u(x,y,t)$. Considere ainda que

- As inclinações $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ são muito pequenas;
- A velocidade da membrana é $\dfrac{\partial u}{\partial t}$;
- Não há deslocamento transversal nas extremidades.

Supondo que a membrana tem como densidade de massa a constante $\rho > 0$, podemos calcular a energia cinética para um elemento infinitesimal dA da seguinte forma:

$$dT = \frac{1}{2}dm\, v^2 = \frac{1}{2}\rho dxdy\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

Sendo assim, a energia cinética T é dada por

$$T = \frac{\rho}{2}\int\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdy. \tag{1.28}$$

Por sua vez, a energia potencial U é o trabalho realizado pela resultante das forças externas aplicadas à membrana. Para calcular o trabalho, iremos considerar o elemento infinitesimal dA da membrana ocupando inicialmente a região $x_0 \leq x \leq x_0 + dx,\ y_0 \leq y \leq y_0 + dy$. Então o trabalho necessário para deformar dA é igual ao produto da tensão τ com o aumento da área dA sob deformação, ou seja, o trabalho necessário para deformar toda a membrana é dado por (veja Fomin [1], pág. 162)

$$U = \frac{\tau}{2} \int \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy. \tag{1.29}$$

Usando (1.28) e (1.29), o lagrangiano do sistema torna-se

$$L = T - U = \frac{1}{2} \int \int_{\Omega} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \tau \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy.$$

Aplicando o Princípio de Hamilton (equação 1.17), obtemos que

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int \int_{\Omega} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \tau \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdydt. \tag{1.30}$$

Como

$$f(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t) = \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \tau \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right],$$

temos que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0,\ \ \frac{\partial f}{\partial u_x} = -\tau \frac{\partial u}{\partial x},\ \ \frac{\partial f}{\partial u_y} = -\tau \frac{\partial u}{\partial y},\ \ \frac{\partial f}{\partial u_t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange para o funcional ação J torna-se

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial u_t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.31}$$

chamada de *equação diferencial da membrana vibrante*, também conhecida por *equação da onda* bidimensional.

Capítulo 2

Método Direto: Método de Ritz

Os Métodos Indiretos proporcionaram grandes avanços para o cálculo das variações, pois, por meio da Equação de Euler-Lagrange, o problema de minimizar o funcional tornava-se um problema equivalente de resolver uma equação diferencial ordinária, o que, para alguns casos, facilitava o problema.

Entretanto, nem sempre os métodos indiretos são eficazes, pois podem gerar uma equação diferencial ordinária (ou um sistema de equações diferenciais ordinárias) com um enorme grau de dificuldade. Para esses casos, é de grande importância adotar outra estratégia: a de encontrar o mínimo do funcional a partir dele mesmo. Métodos assim ganharam o nome de *Métodos Diretos*. Entre eles, encontra-se o *Método de Ritz*, o qual será apresentado e detalhado neste capítulo. Para mais detalhes sobre o método, as referências [2] e [3] podem ser consultadas.

2.1 Um breve histórico

No século XIX, surgiu um dos problemas mais famosos do Cálculo Variacional: o Problema de Dirichlet. Este problema apareceu em 1857, quando Riemann assumiu, sem provar, um princípio que utilizou como base da sua teoria sobre as funções complexas, por ele chamado Princípio de Dirichlet.

Entretanto, o trabalho de Riemann foi criticado por Weierstrass, o qual apresentou um contraexemplo para o princípio que não tinha sido provado. Perceberam, então, que havia um problema com a teoria de Riemann, e logo começou uma intensa busca por vários estudiosos para tentar salvá-la.

Muitas contribuições foram feitas para a resolução deste problema por Dirichlet, Gauss, Weierstrass, Thompson, Riemann, entre outros, mas foi Hilbert, no início do século XX, quem resolveu o problema. O método proposto por Hilbert foi, essencialmente, o que hoje é conhecido como *Método Direto*.

Walter Ritz nasceu durante essa época, em 1878. Em 1897, iniciou o curso de engenharia na Escola Politécnica de Zurique, mudando logo em seguida para matemática. Em 1900, contraiu tuberculose, a qual o acompanhou até o fim da vida. Ritz escreveu uma tese sobre linhas espectrais de átomos, obtendo o doutorado com distinção máxima. Em julho de 1904, sua doença agravou-se e ele voltou para Zurique. Após uma longa batalha contra a tuberculose, morreu em 1909.

Antes da sua doença se agravar, Ritz chegou a tratar o problema do princípio de Dirichlet utilizando aproximações, dando origem ao *Método de Ritz*, o qual foi usado na resolução de Hilbert. Além disso, em 1787, Ernst Chladni descobriu que, quando tocamos uma chapa metálica com certos objetos, ela vibra. Ao espalhar areia sobre a superfície de metal, esta se agita sobre a chapa, se acumulando nos pontos em que a chapa não está vibrando e formando figuras, hoje conhecidas como Figuras de Chladni. Após ganharem um modelo matemático, Ritz também usou seu método para essas figuras.

Timoshenko foi o primeiro a perceber a importância do método de Ritz para aplicações, e o utilizou em vigas. Em 1909, Galerkin fez uma longa viagem científica ao longo da Europa. Não se sabe exatamente como, mas foi durante essa viagem que Galerkin conheceu Ritz. Galerkin, na sua mais famosa publicação, faz várias referências aos trabalhos de Ritz, e, a partir dele, trabalha com seu próprio método. Por fim, sem uma data definida, surge o Método dos Elementos Finitos, os quais tiveram como base os trabalhos de Ritz.

2.2 Descrição do Método

Considere o problema de minimizar um funcional $J[u]$ definido num espaço de Banach $\mathcal{X}$ com base de Schauder. Para que o problema tenha sentido, vamos assumir que existem funções em $\mathcal{X}$ tais que $J[u] < \infty$ e

$$\inf J[u] = \beta > -\infty.$$

Sendo assim, pela definição de ínfimo, existe uma sequência de funções (u_n), chamada de *sequência minimizante*, tal que

$$\lim_{n\to\infty} J[u_n] = \beta. \tag{2.1}$$

Porém, o fato de que o limite de (2.1) é convergente não signica necessariamente que a sequência (u_n) também converge. Precisamos então provar que (u_n) converge para $\overline{u}$ e que o seguinte resultado é válido:

$$\begin{aligned} J\left[\overline{u}\right] &= \lim_{n\to\infty} J[u_n] \\ J\left[\lim_{n\to\infty} u_n\right] &= \lim_{n\to\infty} J[u_n]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Logo, $J\left[\overline{u}\right] = \beta$ e $\overline{u}$ é a solução do problema variacional.

Sendo assim, um método direto consiste de três etapas:

1. Construir uma sequência minimizante $u_n \in \mathcal{X}$;
2. Provar que (u_n) converge para $\overline{u}$;
3. Provar que $J[\overline{u}] = \beta$ (2.2).

Como existe mais de uma maneira de construir uma sequência minimizante, é justamente nesse ponto que os métodos diretos já começam a se diferenciar um do outro. Neste documento, o caminho que percorreremos para alcançar as três etapas será aquele que é chamado de *Método de Ritz*.

O Método de Ritz é um método de aproximação. Em vez de trabalhar em um espaço de dimensão infinita, que terá infinitas funções na base, o método trabalha

com um subespaço fechado de dimensão finita, encontrando então uma *solução aproximada*.

Considere que estamos procurando pelo mínimo de um funcional $J[u]$ definido em um espaço de Banach $\mathcal{X}$ que tem base de Schauder. Seja

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j, \ldots$$

uma sequência infinita de funções em $\mathcal{X}$, e seja $\mathcal{X}_n$ o subespaço linear de dimensão n de $\mathcal{X}$ gerado por essas n primeiras funções, ou seja, $\mathcal{X}_n = span\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

Assuma ainda que $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{X}_n$ é uma sequência de subespaços de dimensão finita de $\mathcal{X}$ com a seguinte propriedade:

$$\overline{\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{X}_n} = \mathcal{X}. \tag{2.3}$$

Para n fixo, temos o conjunto de todas as combinações lineares da forma

$$c_{n1}\varphi_1 + c_{n2}\varphi_2 + \ldots + c_{nn}\varphi_n,$$

sendo $c_{n1}, \ldots, c_{nn}$ números reais arbitrários.

Com isso, em cada subespaço $\mathcal{X}_n$, podemos escrever qualquer elemento $u_n \in \mathcal{X}_n$ como uma combinação linear da base:

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\varphi_j.$$

Além disso, o funcional $J[u_n]$ passa a ser uma função de n-variáveis dada por

$$\Phi[\alpha] = J\left[c_{n1}\varphi_1 + \ldots + c_{nn}\varphi_n\right],$$

sendo $\alpha = (c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn})$.

Suponha que β_n é o mínimo da função $\Phi[\alpha]$ e que u_n é o elemento de $\mathcal{X}_n$ associado a esse mínimo. Note que β_n não cresce com n, pois qualquer combinação linear de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ também é uma combinação linear de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Logo, com essas ideias em mente, o Método de Ritz consiste em encontrar uma solução aproximada do problema variacional

$$J[\overline{u}] = \min_{u\in\mathcal{X}} J[u] \tag{2.4}$$

num subespaço fechado de dimensão finita $\mathcal{X}_n$ do espaço vetorial $\mathcal{X}$, ou seja, encontrar $u_n \in \mathcal{X}_n$ tal que

$$J[u_n] = \min_{u \in \mathcal{X}_n} J[u]. \tag{2.5}$$

O método então transforma o problema variacional em um problema de otimização de várias variáveis. Sejam $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ uma base de Schauder do espaço $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}_n$ o espaço gerado pelas suas n-primeiras funções. Considere a solução aproximada dada pela combinação linear da base, isto é,

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\varphi_j. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.6) no funcional $J[u]$, obtemos

$$\Phi\left(c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn}\right) = J\left[\sum_{j=1}^{n} c_{nj}\varphi_j\right], \tag{2.7}$$

sendo Φ uma função de n-variáveis.

O problema (2.5) passa a ser encontrar um vetor $\overline{\alpha} = (\overline{c}_{n1}, \ldots, \overline{c}_{nn}) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Phi\left(\overline{\alpha}\right) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \Phi(\alpha), \tag{2.8}$$

sendo $\alpha = (c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn}) \in \mathbb{R}^n$.

Como $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, (2.8) é um problema de otimização no $\mathbb{R}^n$. Logo, para n fixo, encontrar uma solução aproximada dada por (2.6) equivale a encontrar uma solução do sistema

$$\frac{\partial}{\partial c_{n1}}\Phi\left(\overline{\alpha}\right) = 0, \frac{\partial}{\partial c_{n2}}\Phi\left(\overline{\alpha}\right) = 0, \ldots, \frac{\partial}{\partial c_{nn}}\Phi\left(\overline{\alpha}\right) = 0. \tag{2.9}$$

É de suma importância que o sistema obtido seja o mais simples possível, cuja estrutura vai depender essencialmente da escolha da base. Entre as possíveis bases de Schauder, pode-se escolher, por exemplo, uma base polinomial ou trigonométrica (série de Fourier). As funções escolhidas devem satisfazer as condições de contorno.

Quanto maior for n, maior será a dimensão do subespaço $\mathcal{X}_n$ e, em geral, mais precisa será a aproximação obtida. Entretanto, nem sempre é necessário utilizar muitos elementos na base para encontrar uma boa solução aproximada, pois, dependendo do

problema, a solução aproximada pode convergir para a solução exata num subespaço de dimensão $n \leq 10$. A ideia principal então é atingir uma boa aproximação (ou atingir a solução exata) com o menor esforço possível.

Antes de utilizar o algoritmo do Método de Ritz, é necessário garantir existência e unicidade do problema que será analisado. Para isso, teremos como base o principal teorema desta seção, o qual irá garantir a eficácia do método. Tal resultado se encontra abaixo:

Teorema 2.1. *Sejam $\mathcal{X}$ um espaço de Banach reflexivo, $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ contínuo e $D^2J(u; h, h)$ a segunda derivada de Gâteaux de $J[u]$. Se existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$D^2J(u; h, h) \geq K \|h\|^2, \ \forall u, h \in \mathcal{X},$$

e se existe uma sequência de subespaços $\mathcal{X}_n$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $h \in \mathcal{X}$, existe uma sequência $h_n \in \mathcal{X}_n$,$n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\| = 0,$$

então

1. *Existe um único $\overline{u} \in \mathcal{X}$ tal que $J[\overline{u}] = \min_{u\in\mathcal{X}} J[u]$;*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único $u_n \in \mathcal{X}_n$ tal que $J[u_n] = \min_{u\in\mathcal{X}_n} J[u]$;*
3. $\lim_{n\to\infty} \|u_n - \overline{u}\| = 0.$

Uma vez que as condições são satisfeitas, o Teorema 2.1 garante que existe uma única solução para o problema e que ela pode ser calculada via Método de Ritz. A demonstração do teorema pode ser encontrada em (Drabek [5], pág. 468).

Exemplos

Exemplo 2.1. *Utilizando o Método de Ritz, encontre uma solução aproximada $u_n(x)$ que minimize o funcional*

$$J[u] = \int_0^1 \left(u'^2 - u^2 - 2xu\right) dx,$$

tal que $u(0) = u(1) = 0$, e compare a solução aproximada obtida com a solução exata

$$\overline{u}(x) = \frac{sen\,(x)}{sen\,(1)} - x.$$

Solução do exemplo (2.1)

Para o problema proposto, será utilizada a **base polinomial**:

$$\varphi_j(x) = x^j(1-x), \;\; j = 1, 2, ..., n$$

Nota-se que as funções da base satisfazem as condições de contorno, pois

$$\varphi_j(0) = \varphi_j(1) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Com as funções da base escolhidas, temos a seguinte solução aproximada:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\, \varphi_j \\ u_n(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\, x^j(1-x), \end{aligned}$$

sendo que as constantes $\{c_{nj}\}$ são determinadas pelo problema de minimização:

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \Phi(\alpha)$$

Sendo assim, obtém-se que

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \int_0^1 \left((u_n')^2 - (u_n)^2 - 2xu_n\right) dx \\ \Phi(\alpha) &= \int_0^1 \left(\left(\frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\, \varphi_j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} c_{nj}\, \varphi_j \right)^2 - 2x \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\, \varphi_j \right) dx. \end{aligned}$$

Como $\{c_{nj}\}_{j=1}^{n}$ são constantes, deriva-se apenas as funções da base:

$$\Phi(\alpha) = \int_0^1 \left(\left(\sum_{j=1}^{n} c_{nj}\, \varphi_j' \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} c_{nj}\, \varphi_j \right)^2 - 2x \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\, \varphi_j \right) dx$$

Por simplicidade, será resolvido primeiramente para o caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} \Phi(c_1) &= \int_0^1 \left((c_{11}\, \varphi_1')^2 - (c_{11}\, \varphi_1)^2 - 2x\, c_{11}\, \varphi_1 \right) dx \\ \Phi(c_1) &= \int_0^1 \left(c_{11}^2\, \varphi_1'^2 - c_{11}^2\, \varphi_1^2 - 2x\, c_{11}\, \varphi_1 \right) dx. \end{aligned}$$

Usando a condição de minimização:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial c_{11}} &= 0 \\ 2c_{11} \int_0^1 \left(\varphi_1'^2 - \varphi_1^2 \right) dx - 2 \int_0^1 x\, \varphi_1 dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Isolando c_{11}, (2.10) torna-se:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\int_0^1 x\, \varphi_1 dx}{\int_0^1 \left(\varphi_1'^2 - \varphi_1^2 \right) dx} \\ c_{11} &= \frac{\int_0^1 x^2 (1-x) dx}{\int_0^1 \left((1-2x)^2 - (x - x^2)^2 \right) dx} \\ c_{11} &= \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Logo, a solução aproximada, para $n = 1$, será dada por:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= c_{11} \varphi_1(x) \\ u_1(x) &= \frac{5}{18} x(1-x). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Comparando (2.11) com a solução exata $\overline{u}(x) = \frac{\text{sen}\,(x)}{\text{sen}\,(1)} - x$:

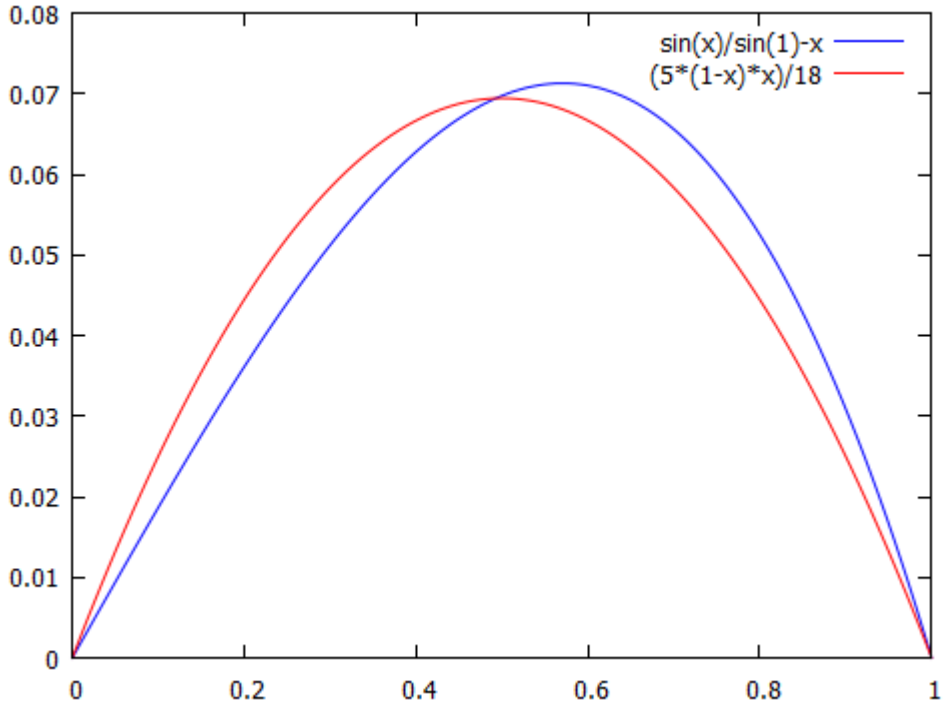


Figura 2.1: Comparação entre as soluções para $n = 1$.

Note que, para $n = 1$, a solução aproximada não é satisfatória, pois há uma diferença bem perceptível entre os dois gráficos.

Aumentando para $n = 3$ e resolvendo pelo aplicativo MAXIMA, obtemos o seguinte algoritmo:

Solução do Exemplo 2.1

Escolhendo n

```
(%i1)  n:3;
```

(%o1) 3

Definindo o funcional

```
(%i2)  J='integrate('diff(u,x)^2-u^2-2*u*x,x,0,1);
```

$$(\%o2)\quad J=\int_0^1 -2\,u\,x+\left(\frac{d}{dx}u\right)^2-u^2\,dx$$

Solução aproximada para a base polinomial

```
(%i3)  u=sum(c[k]*x^k*(1-x),k,1,n);
```

$$(\%o3)\quad u=c_3\,(1-x)\,x^3+c_2\,(1-x)\,x^2+c_1\,(1-x)\,x$$

Calculando as constantes

```
(%i4)  subst(%,%o2)$
       for j:1 thru n do
       eq[j]:ev(diff(%,c[j]),integrate,diff)$
       sol:flatten(solve(makelist(eq[j]=0,j,1,n),makelist(c[j],j,1,n)));
```

$$(\%o6)\quad [c_1=\frac{13811}{73554},c_2=\frac{2380}{12259},c_3=\frac{-7}{299}]$$

Solução aproximada u_n

```
(%i7)  u[n](x):=sum(x^j*(1-x)*rhs(sol[j]),j,1,n);
```

$$(\%o7)\quad u_n(x):=\sum_{j=1}^{n} x^j\,(1-x)\,rhs(sol_j)$$

Comparando com a solução exata

```
(%i8)  plot2d([sin(x)/sin(1)-x,u[n](x)],[x,0,1]);
```

(%o9)

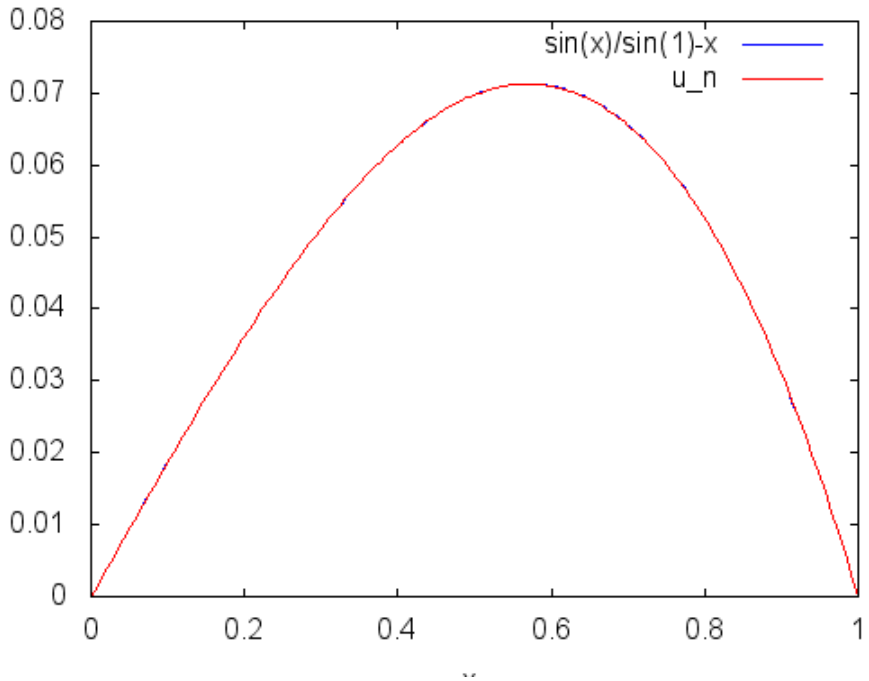


Figura 2.2: Comparação entre as soluções para $n = 3$.

Portanto, a solução aproximada que foi encontrada no subespaço de dimensão $n = 3$ já converge para a solução exata.

Exemplo 2.2. *Utilizando o Método de Ritz, encontre uma solução aproximada* $u_n(x)$ *que minimize o funcional*

$$J[u] = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} u'^2 - u\cos(x) \right) dx,$$

tal que $u(0) = u(\pi) = 0$

Compare a solução aproximada obtida com a solução exata $\overline{u}(x) = \cos(x) + \frac{2x}{\pi} - 1$.

Solução do Exemplo 2.2

Calculando para $n = 8$

```
(%i1)  n:8;
```

(%o1) 8

Definindo o funcional

```
(%i2)  J='integrate(1/2*'diff(u,x)^2-u*cos(x),x,0,%pi);
```

(%o2) $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\left(\frac{d}{dx}u\right)^2}{2} - \cos(x)\, u\, dx$

Solução aproximada para a **base trigonométrica** $\varphi_k = \text{sen}\,(kx), k = 1, ..., n$

```
(%i3)  u=sum(c[k]*sin(k*x),k,1,n);
```

(%o3) $u = c_8 \sin(8x) + c_7 \sin(7x) + c_6 \sin(6x) + c_5 \sin(5x) + c_4 \sin(4x) + c_3 \sin(3x) + c_2 \sin(2x) + c_1 \sin(x)$

Calculando as constantes

```
(%i4)  subst(%,%o2)$
       for j:1 thru n do
       eq[j]:ev(diff(%,c[j]),integrate,diff)$
       sol:flatten(solve(makelist(eq[j]=0,j,1,n),makelist(c[j],j,1,n)));
```

(%o6) $[c_1 = 0, c_2 = \dfrac{2}{3\pi}, c_3 = 0, c_4 = \dfrac{1}{15\pi}, c_5 = 0, c_6 = \dfrac{2}{105\pi}, c_7 = 0, c_8 = \dfrac{1}{126\pi}]$

Solução aproximada u_n

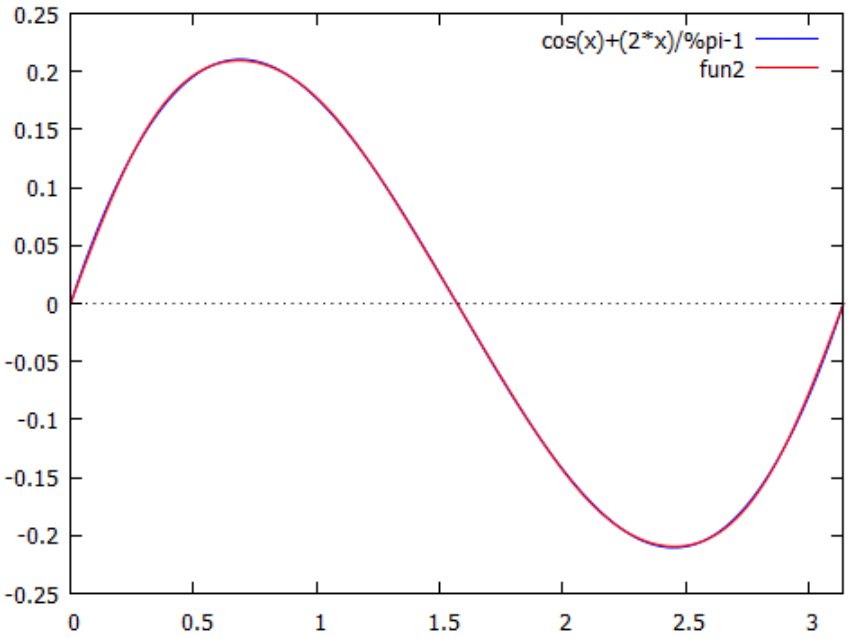
```
(%i7)  u[n](x):=sum(sin(j*x)*rhs(sol[j]),j,1,n);
```

(%o7) $u_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \sin(jx)\ rhs(sol_j)$

Comparando com a solução exata

```
(%i8)  plot2d([cos(x)+2*x/%pi-1,u[n](x)],[x,0,%pi]);
```

(%o9)



Portanto, mais uma vez, obteve-se a uma boa aproximação com menos de 10 elementos na base.

2.3 Viga de Euler-Bernoulli

O Método de Ritz tem muitas aplicações no campo da física e da engenharia e será usado nesta seção para encontrar a deflexão transversal de uma viga cujo modelo é o da *viga de Euler-Bernoulli*.

Considere uma viga elástica, prismática, de comprimento L e feita de um material homogêneo. De um lado, há um engastamento, ou seja, uma restrição que impede movimento e rotação, e do outro lado a viga está livre. Esta viga é então submetida a um carregamento $q(x)$ uniformemente distribuído e encontra-se no estado de equílibro (Figura 2.3). Como estamos considerando o modelo da viga de Euler-Bernoulli, as tensões de cisalhamento serão desprezadas.

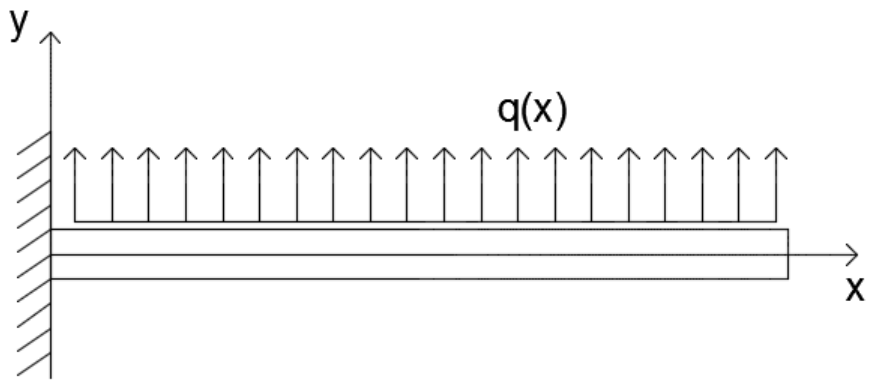


Figura 2.3: Viga submetida a um carregamento $q(x)$.

A esta viga está associado o seguinte funcional (veja Assan [10],pág. 25):

$$J[u] = \frac{1}{2} E\, I \int_0^L \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L q\, u\, dx, \tag{2.12}$$

sendo E o módulo de elasticidade da viga, I o momento de inércia da seção transversal e $u \in \mathcal{X}$, com $\mathcal{X} = \left\{u \in C^2([0,L]);\ u(0) = u'(0) = 0\right\}$.

Falando em termos físicos, o funcional $J[u]$ é igual à *energia potencial total* para uma viga com carga uniformemente distribuída q ao longo do seu comprimento L. Ele é formado por duas parcelas: a primeira corresponde à *energia de deformação*, dada por

$$\frac{1}{2} E\, I \int_0^L \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx$$

e a segunda parcela representa a *energia potencial da carga* q, dada por

$$-\int_0^L q\, u\, dx.$$

O problema então consiste em encontrar a deflexão máxima $\overline{u}(x)$ em cada ponto da viga, que equivale a minimizar o funcional (2.12). Utilizaremos o Método de Ritz para encontrar uma solução aproximada u_n e depois comparar com a solução exata

$$\overline{u}(x) = \frac{q}{24EI}\left(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2\right). \tag{2.13}$$

Para o problema proposto, utilizaremos a seguinte *base polinomial*:

$$\varphi_k(x) = x^{k+1}, \;\; k = 1, 2, ..., n. \tag{2.14}$$

Note que as funções (2.14) satisfazem as condições de contorno, pois

$$\varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Com as funções da base escolhidas, temos a seguinte solução aproximada:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i \\ u_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i\, x^{i+1}, \end{aligned}$$

sendo que as constantes $\{c_k\}$ são determinadas pelo problema de minimização:

$$\min_{c\in\mathbb{R}^n} \Phi(c).$$

Sendo assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \Phi(c) &= \frac{EI}{2}\int_0^L \left(u_n''\right)^2 dx - q\int_0^L u_n dx \\ \Phi(c) &= \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2}{dx^2}\sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i\right)^2 dx - q\int_0^L \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i\, dx \\ \Phi(c) &= \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i''\right)^2 dx - q\int_0^L \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i\, dx \end{aligned}$$

Resolvendo para o caso $n = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi(c_1) &= \frac{EI}{2}\int_0^L \left(c_1\,\varphi_1''\right)^2 dx - q\int_0^L c_1\,\varphi_1\,dx \\
\Phi(c_1) &= \frac{EI}{2}\int_0^L c_1^2\,\varphi_1''^2\,dx - q\int_0^L c_1\,\varphi_1\,dx \\
\Phi(c_1) &= \frac{EI}{2}\int_0^L c_1^2\,(x^2)''(x^2)''\,dx - q\int_0^L c_1\,x^2\,dx \\
\Phi(c_1) &= \frac{EI}{2}\int_0^L 4c_1^2\,dx - q\int_0^L c_1\,x^2\,dx \\
\Phi(c_1) &= 2EILc_1^2 - \frac{qL^3}{3}c_1.
\end{aligned}$$

Usando a condição de minimização:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial c_1} &= 0 \\
4EILc_1 - \frac{qL^3}{3} &= 0 \\
c_1 &= \frac{qL^2}{12EI}. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Logo, a solução aproximada, para $n = 1$, será dada por:

$$\begin{aligned}
u_1 &= c_1\varphi_1 \\
u_1 &= \frac{qL^2}{12EI}x^2. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Para darmos continuidade à resolução do problema, serão encontradas pelo aplicativo MAXIMA as soluções para $n = 2$ e $n = 3$:

Solução para $n = 2$

Escolhendo n

```
(%i1)  n:2;
```

(%o1) 2

Definindo o funcional

```
(%i2)  J='integrate(1/2*EI*'diff(u,x,2)^2-u*q,x,0,L);
```

(%o2) $J = \displaystyle\int_0^L \frac{\left(\frac{d^2}{x^2}u\right)^2 EI}{2} - q\,udx$

Solução aproximada para a base polinomial

```
(%i3)  u=sum(c[k]*x^(k+1),k,1,n);
```

(%o3) $u = c_2x^3 + c_1x^2$

Calculando as constantes

```
(%i4)  subst(%,%o2)$
       for i:1 thru n do
       eq[i]:ev(diff(%,c[i]),integrate,diff)$
       sol:flatten(solve(makelist(eq[i]=0,i,1,n),makelist(c[i],i,1,n)));
```

(%o6) $[c_1 = \frac{5qL^2}{24EI}, c_2 = -\frac{qL}{12EI}]$

Solução aproximada u_n

```
(%i7)  u(x):=sum(x^(i+1)*rhs(sol[i]),i,1,n);
```

(%o7) $u(x) := \sum_{i=1}^{n} x^{i+1}\, rhs(sol_i)$

```
(%i8)  u[2](x)=u(x);
```

(%o8) $u_2(x) = \frac{5qx^2L^2}{24EI} - \frac{qx^3L}{12EI}$

Simplicando, obtemos que

$$u_2(x) = \frac{q}{24EI}(5L^2x^2 - 2Lx^3) \tag{2.17}$$

Usando o mesmo algoritmo para $n = 3$, o MAXIMA fornece a seguinte solução:

$$\begin{aligned} u_3(x) &= \frac{qx^2L^2}{4EI} - \frac{qx^3L}{6EI} + \frac{qx^4}{24EI} \\ u_3(x) &= \frac{q}{24EI}\left(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Portanto, com apenas 3 elementos na base, o Método de Ritz atingiu a solução exata.

Exemplo 2.3. *Utilizando o Método de Ritz, calcule o deslocamento transversal ao longo de uma viga de aço, conforme a Figura 2.3, assumindo as hipóteses da viga de Euler-Bernoulli.*

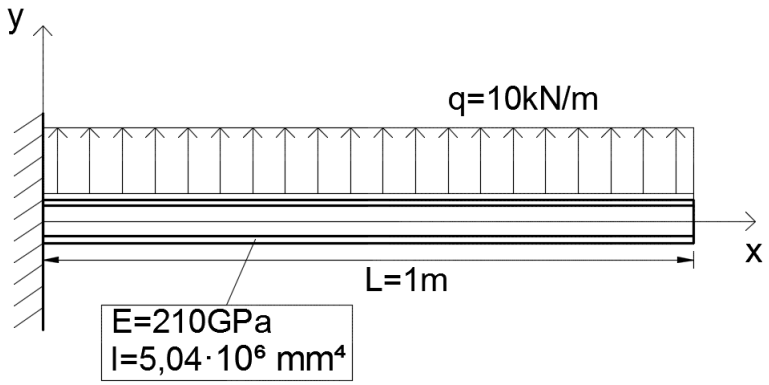


Figura 2.4: Viga de aço engastada em uma extremidade e livre na outra.

Solução do Exemplo 2.3

Ajustando as unidades, obtemos que

$$\begin{aligned} q &= 10\frac{kN}{m} = 0,1\frac{kN}{cm}; \\ E &= 210\ GPa = 2,1 \cdot 10^4 \frac{kN}{cm^2}; \\ I &= 5,04 \cdot 10^6\ mm^4 = 504\ cm^4; \\ L &= 1\ m = 100\ cm. \end{aligned}$$

Primeiramente, serão utilizados 2 elementos na base e o resultado será comparado com a solução exata (2.13).

Solução do Problema Proposto

Dados do problema

```
(%i1)  q:1/10$ E:21000$ I:504$ L:100$
```

Escolhendo n

```
(%i5)  n:2;
```

(%o5) 2

Definindo o funcional

```
(%i6)  J='integrate(1/2*E*I*'diff(u,x,2)^2-u*q,x,0,L);
```

$$(\%o6)\quad J=\int_0^{100} 5292000\left(\frac{d^2}{x^2}u\right)^2-\frac{u}{10}dx$$

Solução aproximada para a base polinomial

```
(%i7)  u=sum(c[k]*x^(k+1),k,1,n);
```

(%o7) $u=c_2x^3+c_1x^2$

Calculando as constantes

```
(%i8)  subst(%,%o6)$
       for j:1 thru n do
       eq[j]:ev(diff(%,c[j]),integrate,diff)$
       sol:flatten(solve(makelist(eq[j]=0,j,1,n),makelist(c[j],j,1,n)));
```

$$(\%o10)\ [c_1=\frac{5}{254016},c_2=-\frac{1}{12700800}]$$

Solução aproximada u_n

```
(%i11) u[n](x):=sum(x^(j+1)*rhs(sol[j]),j,1,n);
```

$$(\%o11)\ u_n(x):=\sum_{j=1}^{n} x^{j+1}\ rhs(sol_j)$$

```
(%i12) %u[n](x)=u[n](x);
```

$$(\%o12)\ u_2(x)=\frac{5qx^2}{254016}-\frac{x^3}{12700800}$$

Solução exata

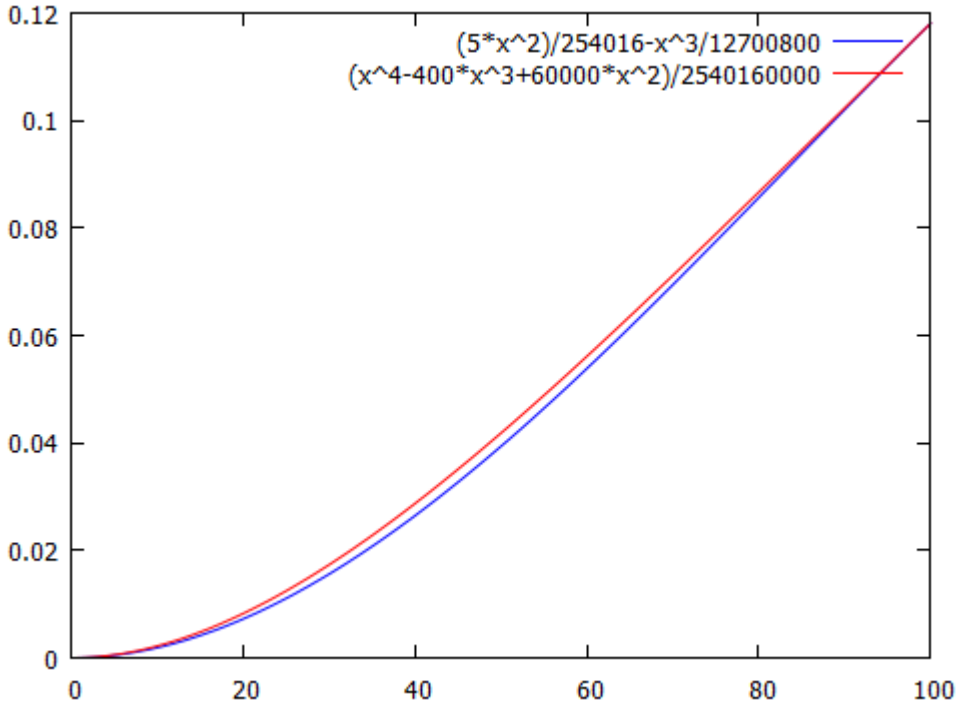
```
(%i13) u(x):=q*(x^4-4*L*x^3+6*L^2*x^2)/(24*E*I);
```

(%o13) $u(x) := \dfrac{q\left(x^4 - 400x^3 + 60000x^2\right)}{2540160000}$

Comparando as Soluções

```
(%i14) wxplot2d([u[n](x),u(x)],[x,0,L]);
```

(%o14)



Note que, para $n = 2$, os gráficos se aproximam consideravelmente. Para $n = 3$, como $u_3(x) = \overline{u}(x)$, os gráficos coincidem (Figura 2.5).

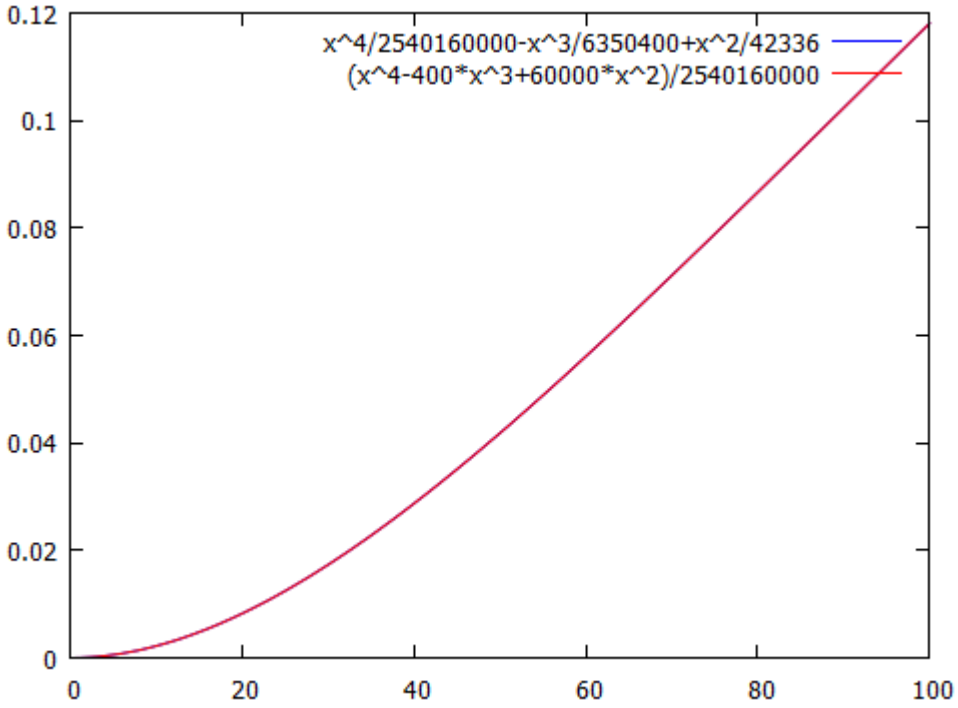


Figura 2.5: Solução aproximada convergindo para a solução exata.

Na Tabela 2.1, encontramos os resultados do problema.

Deslocamento Transversal (cm)

x/L	Solução Aproximada		Solução Exata
	n=2	n=3	
0	0	0	0
0,1	0,001890	0,002209	0,002209
0,2	0,007244	0,008251	0,008251
0,3	0,015590	0,017326	0,017326
0,4	0,026455	0,028723	0,028723
0,5	0,039368	0,041828	0,041828
0,6	0,053855	0,056122	0,056122
0,7	0,069444	0,071181	0,071181
0,8	0,085664	0,086672	0,086672
0,9	0,102041	0,102360	0,102360
1	0,118103	0,118103	0,118103

Tabela 2.1: Comparação entre as soluções.

2.4 Funcional Quadrático

Sejam Ω uma região plana limitada com fronteira $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $J : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ um funcional contínuo, $\mathcal{V}$ um espaço de Banach reflexivo com base de Schauder e $D^2J(u;h,h)$ a segunda derivada de Gâteaux.

Para o caso bidimensional, será demonstrado que existe uma única função $\overline{u}(x,y) \in \mathcal{V}$ que minimiza $J[u]$ e que ela pode ser calculada pelo Método de Ritz, sendo

$$J[u] = \int\int_{\Omega} \left(\alpha\, u_x^2 + \beta\, u_y^2 + \gamma\, u^2 + 2fu\right) dxdy \tag{2.19}$$

e $\mathcal{V} = \left\{u \in C^2(\overline{\Omega}); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\right\}$. Além disso,

- $\alpha(x,y) > 0$, $\beta(x,y) > 0$, $\gamma(x,y) \geq 0$;
- α, β e γ são limitadas e integráveis em $\overline{\Omega}$;
- $f(x,y)$ é integrável em $\overline{\Omega}$.

Se $h_1, h_2 \in \mathcal{V}$, o produto interno será dado pelo seguinte funcional:

$$\langle h_1, h_2 \rangle = D\left[h_1, h_2\right],$$

sendo

$$D\left[h_1, h_2\right] = \int\int_{\Omega} \left(\alpha \frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial x} + \beta \frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial y} + \gamma h_1 h_2\right) dxdy.$$

Para $h \in \mathcal{V}$, temos que

$$D[h] = \|h\|^2 = \int\int_{\Omega} \left(\alpha\, h_x^2 + \beta\, h_y^2 + \gamma\, h^2\right) dxdy. \tag{2.20}$$

Dadas as hipóteses, o objetivo agora consiste em aplicar o Teorema 2.1 para o funcional (2.19), também conhecido por *Funcional Quadrático* - para mais detalhes, consulte [4]. Para isso, vamos calcular a primeira e a segunda variação de Gâteaux. Sejam $u, h \in \mathcal{V}$ e $t \in \mathbb{R}$.

A primeira variação é obtida por

$$\begin{aligned}
\delta J\left(u;h\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{J[u+th]-J[u]}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\int\int_{\Omega}\left(\alpha\left(u_x+th_x\right)^2+\beta\left(u_y+th_y\right)^2+\gamma\left(u+th\right)^2+2f(u+th)\right)dxdy-J[u]\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\int_{\Omega}\left(2t\alpha u_xh_x+t^2\alpha(h_x)^2+2t\beta u_yh_y+t^2\beta(h_y)^2+2t\gamma uh+t^2\gamma h^2+2tfh\right)dxdy\\
&= \lim_{t\to 0}\int\int_{\Omega}\left(2\alpha u_xh_x+t\alpha(h_x)^2+2\beta u_yh_y+t\beta(h_y)^2+2\gamma uh+t\gamma h^2+2fh\right)dxdy\\
\delta J\left(u;h\right) &= \int\int_{\Omega}\left(2\alpha u_xh_x+2\beta u_yh_y+2\gamma uh+2fh\right)dxdy.
\end{aligned}$$

Para obtermos a segunda variação, segue que

$$\begin{aligned}
\delta^2 J\left(u;h,h\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{\delta J(u+th;h)-\delta J(u;h)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\int_{\Omega}\left(2\alpha(u_x+th_x)h_x+2\beta(u_y+th_y)h_y+2\gamma(u+th)h+2fh\right)dxdy\\
&- \delta J(u;h)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\int_{\Omega}\left(2t\alpha(h_x)^2+2t\beta(h_y)^2+2t\gamma h^2\right)dxdy\\
&= \lim_{t\to 0}\int\int_{\Omega}\left(2\alpha(h_x)^2+2\beta(h_y)^2+2\gamma h^2\right)dxdy\\
\delta^2 J\left(u;h,h\right) &= 2\int\int_{\Omega}\left(\alpha h_x^2+\beta h_y^2+\gamma h^2\right)dxdy. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Comparando (2.21) e (2.20), obtemos que

$$\begin{aligned}
D^2J\left(u;h,h\right) &= \delta^2J\left(u;h,h\right)\\
&= 2\int\int_{\Omega}\left(\alpha h_x^2+\beta h_y^2+\gamma h^2\right)dxdy\\
&= 2\left\|h\right\|^2\\
D^2J\left(u;h,h\right) &\geq \left\|h\right\|^2,\ \ \forall u,h\in\mathcal{V}. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, existe uma única solução para o problema (2.19) e ela pode ser calculada via Método de Ritz.

Os exemplos a seguir tratam do Funcional Quadrático e estão dentro das hipóteses desta seção. Sendo assim, as soluções serão encontradas pelo Método de Ritz.

Exemplo 2.4. *Para o funcional (2.19), considere que*

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= 1; \\ \beta(x,y) &= 1; \\ \gamma(x,y) &= 0; \\ f(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, (2.19) torna-se

$$J[u] = \int\int_R \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy, \tag{2.23}$$

sendo o retângulo R dado por $0 \leq x \leq a$,$0 \leq y \leq b$ e $u \in \mathcal{V}$.

Além disso, vamos considerar apenas para este exemplo que u satisfaz a condição subsidiária

$$K[u] = \int\int_R u^2 dxdy = 1. \tag{2.24}$$

Solução do Exemplo 2.4

Para um $n \in \mathbb{N}$ fixo, a função aproximada é dada por

$$u_n = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \text{sen}\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{j\pi y}{b}\right). \tag{2.25}$$

O problema então passa a ser determinar os parâmetros c_{ij}. Substituindo (2.25) em (2.23) e (2.24), obtemos que:

$$J[u_n] = \pi^2 \frac{ab}{4} \sum_{i,j=1}^{n} (c_{ij})^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right) \tag{2.26}$$

e

$$K[u_n] = \frac{ab}{4} \sum_{i,j=1}^{n} (c_{ij})^2 = 1. \tag{2.27}$$

Devido à condição (2.27), a solução do problema é dada por $c_{ij} = 0$, exceto por um coeficiente. Assumindo, por simplicidade, que seja o coeficiente c_{11}, temos que

$$\begin{aligned} \frac{ab}{4} (c_{11})^2 &= 1 \\ c_{11} &= \frac{2}{\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Portanto, o problema variacional é resolvido pela função

$$\overline{u} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{b}y\right) \tag{2.28}$$

e o valor do mínimo passa a ser

$$J[\overline{u}] = \pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right). \tag{2.29}$$

■

Observe que a Equação de Euler-Lagrange do funcional (2.23) é dada por

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u_x^2+u_y^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial u_x}\left(u_x^2+u_y^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial u_y}\left(u_x^2+u_y^2\right)\right) = 0$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0,$$

que é a famosa *Equação de Laplace*.

Solução do Exemplo 2.4

Problema Proposto

```
(%i1)  J='integrate('integrate('diff(u(x,y),x)^2+'diff(u(x,y),y)^2,x,0,a),y,0,b);
```

(%o1) $J = \int_0^b \int_0^a \left(\frac{d}{dy}u(x,y)\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}u(x,y)\right)^2 \, dx\, dy$

```
(%i2)  K='integrate('integrate(u(x,y)**2,x,0,a),y,0,b);
```

(%o2) $K = \int_0^b \int_0^a u(x,y)^2 \, dx\, dy$

```
(%i3)  assume(a>0,b>0);
```

(%o3) $[a>0, b>0]$

Combinação Linear da Base

```
(%i4)  m:3$ n:3$
       u(x,y)='sum('sum(c[i,j]*sin(m*%pi*x/a)*sin(n*%pi*y/b),i,1,m),j,1,n);
```

(%o6) $u(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{i,j}\right)\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right)$

Substituição

```
(%i7)  subst(%,[%o1,%o2]);
       w:ev(%,diff,integrate);
```

$$(\%o8)\quad [J=\frac{\left(9\pi^2b^3+9\pi^2a^2b\right)\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}c_{i,j}\right)^2}{4\,a\,b^2},K=\frac{a\,b\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}c_{i,j}\right)^2}{4}]$$

Condição Subsidiária

```
(%i9)  ev(rhs(w[2])=1,sum);
```

$$(\%o9)\quad \frac{\left(c_{3,3}+c_{3,2}+c_{3,1}+c_{2,3}+c_{2,2}+c_{2,1}+c_{1,3}+c_{1,2}+c_{1,1}\right)^2\,a\,b}{4}=1$$

```
(%i10) t:solve(%,c[1,1]);
```

$$(\%o10)\quad [c_{1,1}=-\frac{\left(c_{3,3}+c_{3,2}+c_{3,1}+c_{2,3}+c_{2,2}+c_{2,1}+c_{1,3}+c_{1,2}\right)\;a\,b+2\sqrt{a}\sqrt{b}}{a\,b},$$
$$c_{1,1}=\frac{\left(-c_{3,3}-c_{3,2}-c_{3,1}-c_{2,3}-c_{2,2}-c_{2,1}-c_{1,3}-c_{1,2}\right)\;a\,b+2\sqrt{a}\sqrt{b}}{a\,b}]$$

```
(%i11) t-sum(sum(c[i,j],i,1,m),j,1,n)+c[1,1]=0;
```

$$(\%o11)\quad -c_{3,3}-c_{3,2}-c_{3,1}-c_{2,3}-c_{2,2}-c_{2,1}-c_{1,3}-c_{1,2}=0$$

```
(%i12) subst(%,t[2]);
```

$$(\%o12)\quad c_{1,1}=\frac{2}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

Solução

```
(%i13) c[1,1]:rhs(%)$ m:1$ n:1$
```

```
(%i16) u=sum(sum(c[i,j]*sin(m*%pi*x/a)*sin(n*%pi*y/b),i,1,m),j,1,n);
```

$$(\%o16)\quad u=\frac{2\sin\left(\frac{\pi\;x)}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi\;y)}{b}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

Valor do Mínimo

```
(%i17) u(x,y)=rhs(%)$

(%i18) subst(%,%o1);
```

$$(\%o18)\quad J=\int_0^b\int_0^a\left(\frac{d}{dy}\frac{2\sin\left(\frac{\pi\ x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi\ y}{b}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{d}{dx}\frac{2\sin\left(\frac{\pi\ x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi\ y}{b}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\right)^2 dx\ dy$$

```
(%i19) J[u]=rhs(ev(%,diff,integrate,sum));
```

$$(\%o19)\quad J_u=\frac{(\pi^2b^3+\pi^2a^2b)}{a^2b^3}$$

■

Exemplo 2.5. *Considere agora que*

$$\begin{aligned}\alpha(x,y) &= 1;\\ \beta(x,y) &= 1;\\ \gamma(x,y) &= 0;\\ f(x,y) &= x^2.\end{aligned}$$

Com isso, o funcional (2.19) torna-se

$$J[u]=\int\int_R\left(u_x^2+u_y^2+2x^2u\right)dxdy, \tag{2.30}$$

sendo o retângulo R dado por $0\leq x\leq a$,$0\leq y\leq b$, $a=1$, $b=1$ e $u\in\mathcal{V}$.

Utiizando o Método de Ritz, encontraremos uma solução aproximada $u_n(x,y)$ que minimize (2.30).

Solução do Exemplo 2.5

Para um $n\in\mathbb{N}$ fixo, a solução aproximada é dada por

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}\text{sen}\left(\frac{i\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{j\pi y}{b}\right)\\ u_n &= \sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}\text{sen}\,(i\pi x)\text{sen}\,(j\pi y).\end{aligned} \tag{2.31}$$

Note que as funções da base zeram na fronteira. Além disso, pelo Teorema 2.1, existe uma única função $\overline{u}$ que minimiza $J[u]$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - \overline{u}\| = 0.$$

Logo, é necessário calcular as constantes c_{ij} para encontrar a solução. Para isso, usaremos o aplicativo MAXIMA.

Solução do Exemplo 2.5

Problema Proposto

```
(%i1)  a:1$ b:1$

(%i3)  J='integrate('integrate('diff(u(x,y),y)^2+'diff(u(x,y),x)^2
       +2*x^2*u(x,y),x,0,a),y,0,b);
```

(%o1) $$J = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{d}{dy}u(x,y)\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}u(x,y)\right)^2 + 2\,x^2\,u(x,y)\,dx\,dy$$

Combinação Linear da Base

```
(%i4)  n:3$

(%i5)  u(x,y)=sum(sum(c[i,j]*sin(i*%pi*x/a)*sin(j*%pi*y/b),i,1,n),j,1,n);
```

(%o4) $$u(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{i,j}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$$

Substituição

```
(%i6)  subst(%,%o3)$
       for i:1 thru n do
       for j:1 thru n do
       eq[i,j]:ev(diff(%,c[i,j]),integrate,diff)$
```

Resolvendo o Sistema

```
(%i8)  sol:flatten(solve(flatten(makelist(makelist(eq[i,j],i,1,n),j,1,n)),
       flatten(makelist(makelist(c[i,j],i,1,n),j,1,n))));
```

$$(\%o8)\quad [c_{1,1} = -\frac{4\pi^2-16}{\pi^6}, c_{2,1} = \frac{4}{5\pi^4}, c_{3,1} = -\frac{36\pi^2-16}{135\pi^6}, c_{1,2} = 0, c_{2,2} = 0, c_{3,2} = 0,$$
$$c_{1,3} = -\frac{4\pi^2-16}{15\pi^6}, c_{2,3} = \frac{4}{39\pi^4}, c_{3,3} = -\frac{36\pi^2-16}{729\pi^6}]$$

```
(%i9)  for i:1 thru n do
       for j:1 thru n do
       c[i,j]:rhs(sol[i+(j-1)*n])$
```

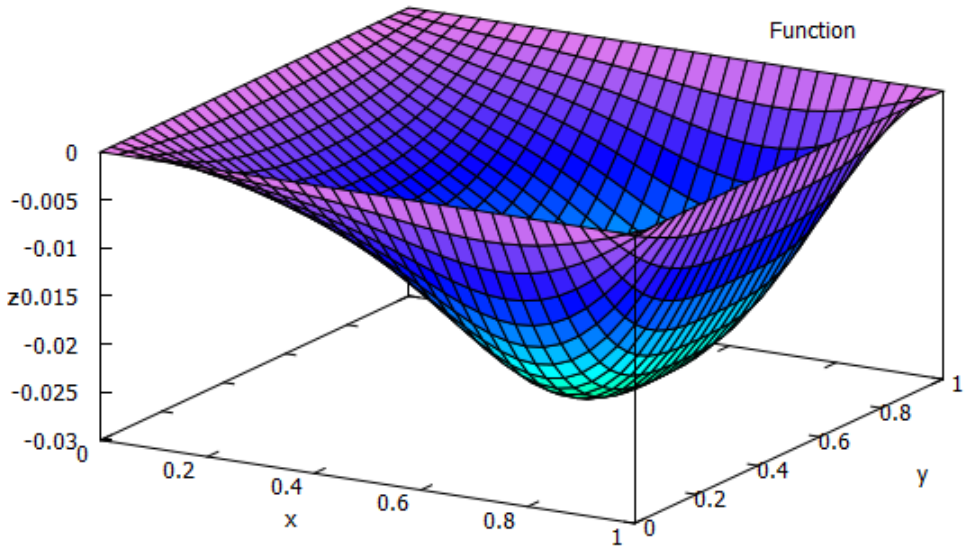
Solução Aproximada

```
(%i10) u[n](x,y):=sum(sum(c[i,j]*sin(i*%pi*x/a)*sin(j*%pi*y/b),i,1,n),j,1,n);
```

$$(\%o10)\quad u_n(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{i,j}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$$

```
(%i11) plot3d(u[n](x,y),[x,0,a],[y,0,b]);
```

(%o11)



■

Considerações Finais

A partir deste trabalho, pudemos investigar problemas variacionais envolvendo integrais múltiplas usando o método direto e indireto. Por meio da Equação de Euler-Lagrange, conseguimos obter a equação da onda para o caso uni e bidimensional. Aplicando o Método de Ritz, conseguimos obter a solução dos exemplos propostos de modo eficaz. Vale ressaltar que os problemas que foram vistos, principalmente os bidimensionais, não são normalmente explorados e são pouco abordados na literatura clássica.

Descrevendo a teoria do Método de Ritz, verificamos que ele pode ser considerado um método completo, no sentido de que prova a existência e a unicidade e direciona para o cálculo da solução. Além disso, uma vez que a teoria é entendida, percebe-se que o método não apresenta grandes dificuldades para ser implementado. Na parte da programação, o aplicativo MAXIMA apresentou grande utilidade, não só por ser um software gratuito, mas também de fácil entendimento.

Os avanços na teoria do cálculo variacional, dos métodos numéricos e da programação científica foram elementos motivadores para o desenvolvimento deste estudo. Espera-se que outros alunos também se sintam motivados e assim busquem entender a teoria de um método para então aplicá-lo nos mais variados problemas, principalmente naqueles que quase não são vistos na literatura clássica.

Por fim, é importante ressaltar que, a partir deste trabalho, muitos assuntos ainda podem ser aprofundados. Em trabalhos posteriores, pode-se abordar, por exemplo, sobre o modelo da viga de Timoshenko, o modelo de placa de Kirchhoff, campo eletromagnético e sobre o método dos elementos finitos.

Apêndice A

Conceitos Importantes

Nesta seção iremos abordar alguns conceitos importantes para o entendimento deste documento. Os Teoremas A.1 e A.2 foram retirados do livro (Apostol, [12]).

A.1 Espaço Vetorial

Chama-se *espaço vetorial* um conjunto não-vazio X em que as operações de adição e multiplicação por escalar estão bem definidas, ou seja, para todo $u, v, w \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. $u + v \in X$;
2. $u + v = v + u$ (propriedade comutativa);
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (propriedade associativa);
4. Existe um elemento $0 \in X$ tal que $u + 0 = u$;
5. $u + (-u) = 0$
6. $\alpha u \in X$;
7. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ ou $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
8. $1 \cdot u = u$.

Os elementos de um espaço vetorial chamam-se vetores, enquanto que os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados de escalares. Nota-se que os axiomas 4 e 5 falam, respectivamente, da existência de um vetor nulo e de um inverso aditivo.

Se existe um subconjunto Y não-vazio de X que também satisfaz os axiomas, então Y é um subespaço vetorial de X. Por exemplo, a reta (conjunto $\mathbb{R}$) e o plano (conjunto $\mathbb{R}^2$) são subespaços do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo A.1. *Um exemplo clássico de espaço vetorial é o espaço $C[a,b]$, ou seja, o espaço das funções contínuas definidas num intervalo $[a,b]$. Por sua vez, o espaço vetorial $C^k[a,b]$, sendo $k \in \mathbb{N}$, representa o espaço das funções contínuas com derivadas de até ordem k contínuas.*

A.2 Combinação Linear

Dados $u_1, u_2, \ldots, u_n \in X$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, chama-se *combinação linear* um vetor definido pela expressão:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n.$$

Se a combinação é tal que:

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0,\ i = 1, ..., n,$$

então diz-se que os vetores $\{u_i\}_{i=1,n}$ são linearmente independentes.

A.3 Base

Se existe um número inteiro positivo n tal que o conjunto de n vetores em X são linearmente independentes e todo conjunto de $n+1$ vetores é linearmente dependente, então diz-se que X tem dimensão finita (no caso, dimensão n) e denota-se por $\dim X = n$. Sendo assim, um conjunto linearmente independente de n vetores formam uma *base* de X, ou seja, todo elemento $u \in X$ pode ser representado em uma única forma como uma combinação linear da base:

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i,$$

sendo que $\{u_i\}_{i=1,n}$ são os vetores da base e $c_i \in \mathbb{R}$ são únicos.

Resumindo, um conjunto de vetores é uma *base* de um espaço vetorial se ele gera o espaço e seus vetores são linearmente independentes.

A.4 Norma

Seja X um espaço vetorial. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que, $\forall u, v \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

- $\|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \ \|u\|$;
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exemplo A.2. *Considerando o espaço vetorial $C[a,b]$ e a função $u \in C[a,b]$, podem-se definir as seguintes normas:*

1. $\|u\| = \max_{x \in [a,b]} |u(x)|$;
2. $\|u\| = \int_a^b u(x)dx$.

Dizemos que uma norma $\|\cdot\|$ é *completa* se toda sequência de Cauchy $(u_n)_n$ é convergente nela.

A.5 Produto Interno

Chama-se **produto interno** uma função definida em um espaço vetorial X tal que, para cada par de vetores $u, v \in X$, tem-se um número real, designado por $\langle u, v\rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades (com $w \in X$):

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ (simetria);
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ (propriedade distributiva);
3. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Exemplo A.3. *Considerando o espaço vetorial $C^2[a, b]$ e $u, v \in C^2[a, b]$, podemos definir os seguintes produtos internos:*

1. $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_a^b u(x)v(x)dx$;
2. $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_a^b \big(u(x)v(x) + u'(x)v'(x)\big)\, dx$;
3. $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_a^b \big(u(x)v(x) + u'(x)v'(x) + u''(x)v''(x)\big)\, dx$.

A.6 Espaço de Banach

Dizemos que X é um *espaço normado* se ele é um espaço vetorial munido de uma norma. Se a norma é completa, dizemos que X é um *espaço de Banach.*

Exemplo A.4. *O espaço vetorial $C[a, b]$ munido da norma $\|u\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |u(x)|$ é um Espaço de Banach.*

A.7 Base de Schauder

Dizemos que uma série de elementos de um espaço normado $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ é *convergente* se existir o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = L.$$

Uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X é dita uma *base de Schauder* de X se, para todo $u \in X$, existe uma única sequência $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

com a série convergindo em norma.

Uma observação importante é que todo espaço de Banach com base de Schauder é *separável*, ou seja, possui um subconjunto denso enumerável.

A.8 Operador Linear

Sejam X, Y espaços vetoriais. Chama-se *operador linear* (ou *transformação linear*) uma correspondência $J : X \to Y$ que associa a cada vetor $u \in X$ um vetor $J(u) = J \cdot u = J\ u \in Y$ tal que, para quaisquer $u, v \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, valem as seguintes relações:

- $J(u + v) = J(u) + J(v)$;
- $J(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot J(u)$.

A.9 Funcional

Chama-se *funcional* uma transformação linear definida em um espaço vetorial que leva cada elemento do espaço a um número real. Em outras palavras, se X é um espaço vetorial, a transformação $J : X \to \mathbb{R}$ é um funcional em X.

Exemplo A.5. *Seja o espaço vetorial $X = C[0, 1]$. A transformação J definida por*

$$J[u] = \int_0^1 u(x)dx$$

é um funcional em X.

A.10 Espaço Reflexivo

Seja X um espaço de Banach. O *dual* de X, representado por X', é o conjunto de todos os funcionais $f : X \to \mathbb{R}$ que são lineares e limitados. O espaço $(X')' = X''$ é chamado de *espaço bidual* de X.

Se a imersão canônica $i : X \to X''$ for um isomorfismo, ou seja, se $X \cong X''$, então dizemos que X é um *espaço de Banach reflexivo*.

A.11 Curva de Jordan

Suponha que $\partial\Omega$ é uma curva descrita por uma função vetorial contínua α definida num intervalo $[a, b]$. Se $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizemos que a curva $\partial\Omega$ é *fechada*.

Se, na mesma curva, temos que $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ para todo par de valores $t_1 \neq t_2$ do intervalo semi-aberto $(a, b]$, então dizemos que $\partial\Omega$ é uma curva *fechada simples*. Se $\partial\Omega$ tem um comprimento finito, então dizemos que $\partial\Omega$ é *retificável*.

Por fim, dizemos que curvas fechadas simples planas são chamadas de *curvas de Jordan*. A circunferência e o retângulo são exemplos típicos de curvas de Jordan retificáveis.

Uma vez que esses conceitos foram entendidos, enunciaremos agora o famoso Teorema de Green:

Teorema A.1. *(Teorema de Green)*

Sejam $\partial\Omega$ uma curva de Jordan retificável e Ω um aberto do $\mathbb{R}^2$ com fronteira $\partial\Omega$. Se P e Q são campos escalares de classe $C^1(\Omega)$, então

$$\int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$$

com a integral de linha efetuada no sentido anti-horário.

A.12 Superfície Regular

Sejam R uma região em $\mathbb{R}^2$ e $s : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação. Para $(u, v) \in R$, considere uma superfície definida pela equação vetorial

$$s(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j + Z(u, v)k.$$

Se X, Y e Z são diferenciáveis em R, considere ainda os vetores

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}i + \frac{\partial Y}{\partial u}j + \frac{\partial Z}{\partial u}k$$

e

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v}i + \frac{\partial Y}{\partial v}j + \frac{\partial Z}{\partial v}k.$$

Dizemos que o produto vetorial $\dfrac{\partial s}{\partial u} \times \dfrac{\partial s}{\partial v}$ é chamado *produto vetorial fundamental* da representação s.

Se (u_0, v_0) é um ponto de R no qual $\dfrac{\partial s}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial s}{\partial v}$ são contínuas e $\dfrac{\partial s}{\partial u} \times \dfrac{\partial s}{\partial v} \neq 0$, então o ponto imagem $s(u_0, v_0)$ chama-se *ponto regular* de s.

Dizemos que uma superfície é *regular* se todos os seus pontos o forem. Se uma superfície tem um número finito de pontos que não são regulares, dizemos que ela é *regular por partes*.

A.13 Superfície Orientada

Seja $s : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma representação paramétrica de uma superfície regular S. Uma *orientação* para S é um par (S, η), com η um vetor normal unitário a S, que varia continuamente sobre a superfície sem mudar o sentido. Uma vez que a superfície tem uma orientação, dizemos que S é uma *superfície regular orientada*.

A partir dos conceitos de superfície, o Teorema da Divergência será apresentado a seguir:

Teorema A.2. *(Teorema da Divergência)*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um sólido limitado por uma superfície $\partial\Omega$ regular por partes e orientada pela normal exterior η. Se $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial de classe C^1, então:

$$\begin{aligned} \int\int\int_{\Omega} div\, F d\Omega &= \int\int_{\partial\Omega} F \cdot \eta \, d\partial\Omega \\ \int\int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz &= \int\int_{\partial\Omega} \left(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \right). \end{aligned}$$

Apêndice B

Introdução ao aplicativo MAXIMA

Para efetuar os cálculos deste trabalho, utilizou-se o aplicativo *MAXIMA*, o qual é um software de manipulação de expressões simbólicas e numéricas. Vale ressaltar que o MAXIMA é um software livre, de acesso gratuito na Internet e compatível com o *LINUX*, *MAC* e *Windows*. Este aplicativo está disponível no seguinte link:

http://maxima.sourceforge.net

Nesta seção serão abordados os comandos do MAXIMA necessários para este trabalho. Para mais detalhes, consulte [15].

B.1 Funções

No MAXIMA, as funções são definidas do seguinte modo:

f(x):= expressão em x
g(x,y):= expressão em x e y

Exemplo B.1. *Defina no MAXIMA:*

a) as funções $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ *e* $g(x, y) = sen\, x + \log y$*;*

b) as constantes $c = 3$ *e* $n = 100$*.*

Solução do Exemplo B.1

Solução a)

```
(%i1)  f(x):=x^3-8*x^2+16*x; g(x,y):=sin(x)+log(y);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := x^3 - 8x^2 + 16x$

(%o2) $\mathrm{g}(x, y) := \sin(x) + \log(y)$

Solução b)

```
(%i3)  c:3; n:100;
```

(%o3) 3

(%o4) 100

Exemplo B.2. *A partir do exemplo 1.1, calcule* $f(n)$ *e* $g(c, n)$

Solução do Exemplo B.2

```
(%i5)  f(n); g(c,n);
```

(%o5) 921600

(%o6) $\log(100) + \sin(3)$

B.2 Sistema de Equações

O MAXIMA resolve um sistema de equações a partir dos seguintes comandos:

solve(eq, x)
solve([eq1, ..., eqn], [x1, ..., xn])

Exemplo B.3. *Encontre as raízes da equação* $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$.

Solução do Exemplo B.3

```
(%i1)  solve(x^3-8*x^2+16*x, x);
```

(%o1) $[x = 4, x = 0]$

Exemplo B.4. *Resolva o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - 5z = 9 \\ 3x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

Solução do Exemplo B.4

```
(%i1)  solve([x+y+z-3,2*x+y-5*z-9,3*x-4*y+z],[x,y,z]);
```

(%o1) $[[x = \frac{102}{47}, y = -\frac{69}{47}, z = -\frac{30}{47}]]$

B.3 Somatórios

O MAXIMA trabalha com somatórios a partir do comando:

```
sum(expr, i, a, b)
```

Exemplo B.5.

$$\sum_{i=1}^{5} x^i(1-x)$$

.

Solução do Exemplo B.5

```
(%i1)  sum(x^i*(1-x),i,1,5);
```

(%o1) $(1-x)x^5+(1-x)x^4+(1-x)x^3+(1-x)x^2+(1-x)x$

Exemplo B.6.

$$\sum_{i=1}^{3} sen\,(ix)$$

Solução do Exemplo B.6

```
(%i1)  sum(sin(i*x),i,1,3);
```

(%o1) $sin(3x)+sin(2x)+sin(x)$

B.4 Derivadas

As operações de derivação são efetuadas pelos seguintes comandos:

```
diff(f(x), x, n)
diff(f(x,y), x, n, y, m)
```

Exemplo B.7. *Calcule a derivada de* $f(x)=\sin(x)+x^3$.

Solução do Exemplo B.7

```
(%i1)  f(x):=sin(x)+x^3;
```

(%o1) $f(x):=sin(x)+x^3$

```
(%i2)  diff(f(x),x);
```

(%o2) $cos(x)+3x^2$

Exemplo B.8. *Seja* $f(x,y) = \cos(xy) + 6xy + sen\,(y^2)$. *Calcule:*

a) $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$;

b) $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$.

Solução do Exemplo B.8

Solução a)

```
(%i1)  f(x,y):=cos(x*y)+6*x*y+sin(y^2);
```

(%o1) $f(x,y) := cos(xy) + 6xy + sin(y^2)$

```
(%i2)  diff(f(x,y),y,2);
```

(%o2) $-4y^2\text{sen}\,(y^2) + 2\cos(y^2) - x^2\cos(xy)$

Solução b)

```
(%i3)  diff(f(x,y),x,1,y,1);
```

(%o3) $-\sin(xy) - xy\cos(xy) + 6$

B.5 Integrais

No MAXIMA, as operações de integração são dadas por:

integrate(f(x), x)
integrate(f(x), x, a, b)

Exemplo B.9. *Calcule*

$$\int \sin^2(x)dx$$

Solução do Exemplo B.9

```
(%i1)  f(x):=sin(x)^2;
```

(%o1) $f(x) := sin(x)^2$

```
(%i2)  integrate(f(x),x);
```

(%o2) $\dfrac{2x - \sin(2x)}{4}$

Exemplo B.10. *Calcule*

$$\int_1^4 x^2(1-x)dx$$

Solução do Exemplo B.10

```
(%i1)  f(x):=x^2*(1-x);
```

(%o1) $f(x) := x^2(1-x)$

```
(%i2)  integrate(f(x),x);
```

(%o2) $-\dfrac{171}{4}$

B.6 Gráficos

O MAXIMA trabalha com gráficos a partir dos comandos:

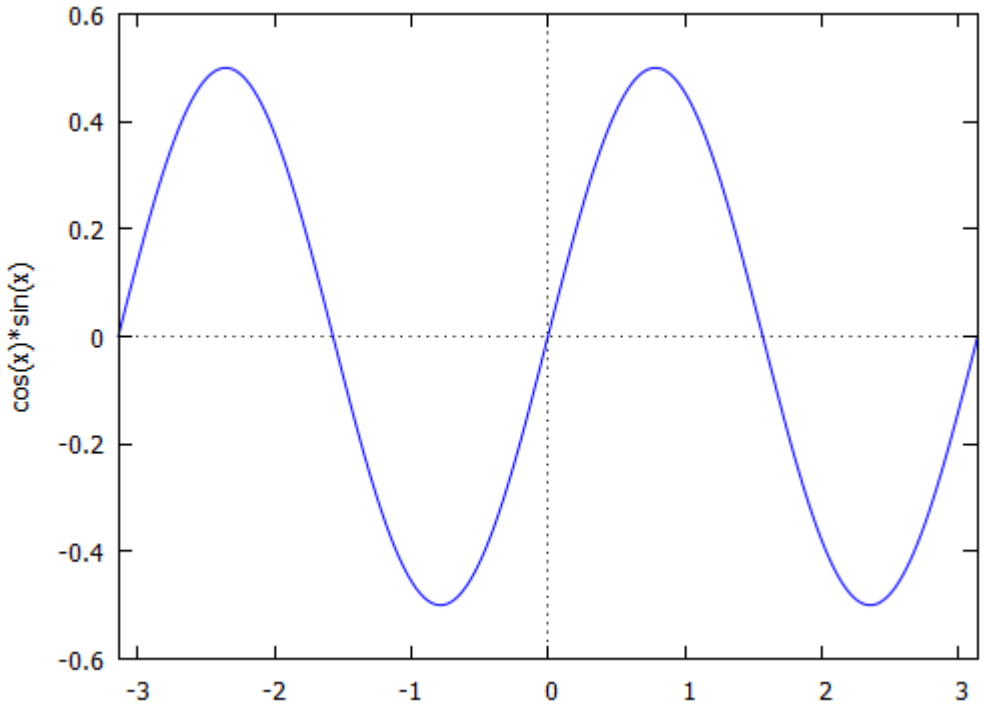
plot2d(f(x), $[x, x_1, x_2]$, $[y, y_1, y_2]$, (opções))
plot3d(f(x), $[x, x_1, x_2]$, $[y, y_1, y_2]$, $[z, z_1, z_2]$, (opções))

Exemplo B.11. *Plote o gráfico da função* $f(x) = sen\,(x)\cos(x)$ *no intervalo* $[-\pi, \pi]$.

Solução do Exemplo B.11

```
(%i1)  wxplot2d(sin(x)*cos(x), [x,-\%pi,\%pi]);
```

(%o1)



B.7 Comando *do*

A declaração *do* é usada para executar iteração. Neste trabalho, o comando foi usado para criar um sistema de equações. Quando solicitado, o MAXIMA retorna as equações que foram geradas.

```
(%i1)  for i:1 thru 3 do
       equacao[i]:x^i+sin(i*x);
```

(%o1) *done*

```
(%i2)  equacao[1];
```

(%o2) $\sin(x) + x$

```
(%i3)  equacao[2];
```

(%o3) $\sin(2x) + x^2$

```
(%i4)  equacao[3];
```

(%o4) $\sin(3x) + x^3$

B.8 Comando *ev*

O comando *ev* do MAXIMA avalia a expressão *expr* no ambiente especificado pelos argumentos $arg\ 1, arg\ 2, \ldots, arg\ n$ e retorna o resultado da avaliação com outra expressão. Neste trabalho, este comando foi usado para derivar e integrar expressões.

Nem sempre deseja-se que o MAXIMA derive ou integre imediatamente, então coloca-se o apóstrofe (') antes de *diff* ou *integrate*. Sendo assim, na hora desejada, utiliza-se o comando *ev* para efetuar a operação que está bloqueada.

```
(%i1)  'integrate(-'diff(cos(x),x,2)+'diff(x^2,x),x,0,1);
```

(%o1) $\int_0^1 \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\cos(x)\,dx$

```
(%i2)  ev(%,diff,integrate);
```

(%o2) $\sin(1) + 1$

Vale ressaltar que, toda vez que utiliza-se %, o MAXIMA entende como a última expressão obtida.

B.9 Comando *flatten*

O comando *flatten(expr)* recebe argumentos de subexpressões e constrói uma expressão a partir desses argumentos coletados. Aplicado a uma lista, *flatten* desfaz todas as listas interiores para que seus elementos passem a fazer parte da exterior:

```
(%i1)  flatten ([a, b, [c, [d, e], f], [[g, h]], i, j]);
```

(%o1) $[a, b, c, d, e, f, g, h, i, j]$

B.10 Comando *makelist*

O comando *makelist* constrói e retorna uma lista.

```
(%i1)  makelist(x^i*(1-x),i,1,4);
```

(%o1) $[(1-x)\,x, (1-x)\,x^2, (1-x)\,x^3, (1-x)\,x^4]$

Neste trabalho, o comando *makelist*, junto com o comando *flatten*, foi usado para criar uma lista com as constantes de um sistema linear gerado pelo comando *do*.

Referências Bibliográficas

[1] I. M. Gelfand and S. V. Fomin *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Inc., 1963.

[2] C. L. D. Vaz e H. A. C. Diniz *Cálculo Variacional com Computação Simbólica*, SBMAC, 2015.

[3] C. C. V. Pinheiro e C. L. D. Vaz *Métodos Diretos: Método de Ritz*, 2011.

[4] J. Indritz, *Applications of the Rayleigh Ritz Method to Variational Problem*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 5, No. 5, 1955.

[5] P. Drábek and J. Milota, *Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations*, Birkhãuser Verlag, 2007.

[6] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Inc., 1970.

[7] E. L. Lima, *Análise Real*, volume 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[8] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[9] E. P. Popov, *Engineering Mechanics of Solids*, Prentice-Hall, Inc.,1991.

[10] A. E. Assan, *Método dos Elementos Finitos*, Editora da Unicamp, 2003.

[11] J. Fish and T. Belytschko, *Um Primeiro Curso Em Elementos Finitos*, LTC, 2009.

[12] T. M. Apostol, *Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear, com aplicações às equações diferenciais e às probabilidades*, Editorial Reverté, 1996.

[13] K. Atekinson e W. Han, *Theorical Numerical Analysis: A functional analysis* framework, Springer, 2009.

[14] R. C. Hibbeler, *Resistência dos Materiais*, 7ª ed., Prentice-Hall Brasil, 2010.

[15] C. L. D. Vaz *O Software MAXIMA e aplicações*, editAedi, 2016.

[16] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, Inc., 1953.

[17] N. D. Louza *Bases de Schauder em Espaços de Banach*, 2008.

[18] L. Dozio, *On the use of the Trigonometric Ritz method for general vibration analysis of rectangular Kirchhoff plates*, 2010.