



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DE ESQUEMAS NÃO USUAIS EM  
DIFERENÇAS FINITAS PARA OBSERVABILIDADE  
DA FRONTEIRA PARA EQUAÇÃO DE ONDAS**

**Antonio Carlos Lima do Nascimento**

Belém-PA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**ANÁLISE DE ESQUEMAS NÃO USUAIS EM  
DIFERENÇAS FINITAS PARA OBSERVABILIDADE  
DA FRONTEIRA PARA EQUAÇÃO DE ONDAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação  
em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade  
Federal do Pará - UFPA como parte dos pré-requisitos  
para obter o grau de Mestre em Matemática.

**Antonio Carlos Lima do Nascimento**

*Orientador:* **Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**

Belém-PA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- N244a Nascimento, Antonio Carlos Lima do  
Análise de Esquemas não Usuais em Diferenças Finitas para Observabilidade da Fronteira para Equação de Ondas / Antonio Carlos Lima do Nascimento. — 2018  
68 f. : il. color
- Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
1. Equação de Onda. 2. Análise de Dispersão. 3. Diferenças Finitas. 4. Diferenças Finitas não Usuais. I. Júnior, Dilberto da Silva Almeida, *orient.* II. Título
-

# ANÁLISE DE ESQUEMAS NÃO USUAIS EM DIFERENÇAS FINITAS PARA OBSERVABILIDADE DA FRONTEIRA PARA EQUAÇÃO DE ONDAS

Antonio Carlos Lima do Nascimento

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação  
em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade  
Federal do Pará - UFPA como parte dos pré-requisitos  
para obter o grau de Mestre em Matemática.

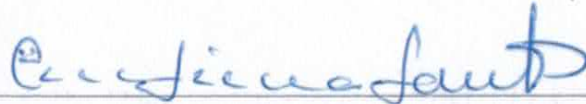
RESULTADO: Aprovado

Data da Defesa: 22 de Agosto de 2018

Banca Examinadora



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior - PDM/UFPA



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos - PDM/UFPA



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo - PPGME/UFPA



Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro - PROFMAT/UFPA-Campus Abaetetuba

Belém-PA

2018

## Resumo

# ANÁLISE DE ESQUEMAS NÃO USUAIS EM DIFERENÇAS FINITAS PARA OBSERVABILIDADE DA FRONTEIRA PARA EQUAÇÃO DE ONDAS

Antonio Carlos Lima do Nascimento

*Orientador:* Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

No presente trabalho investigamos a anomalia numérica da dispersão do modelo semi-discreto para a Equação de Onda 1-D, via Método de Diferenças Finitas usuais. Para sanar esse problema usamos um Método de Diferenças Finitas não usual (NSFD) e uma função  $\psi_h$ , escolhida de modo conveniente, para recuperarmos a dispersão do modelo contínuo.

**Palavras-chave:** Equação de Onda, Análise de Dispersão, Diferenças Finitas, Diferenças Finitas não Usuais.

Belém-Pará

2018

*Abstract***ANALYSIS OF UNUSUAL SCHEMES IN  
FINITE DIFFERENCES FOR THE OBSERVABILITY  
OF THE BOUNDARY FOR WAVE EQUATION**

**Antonio Carlos Lima do Nascimento**

*Advisor:* **Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**

In the present work we investigated the numerical anomaly of the dispersion for semi-discrete model for the Wave Equation 1-D by usual Finite Difference Method. To remedy this problem we will use an unusual Finite Difference Method (NSFD) and a function  $\psi_h$ , conveniently chosen, to recover the dispersion of continuous model.

**Keywords:** Wave Equation, Dispersion Analysis, Finite Differences, Unusual Finite Difference.

Belém-Pará

2018

*“Dedico este trabalho à Iracema Lima da Silva ”*

*“ O segredo do sucesso, na Matemática e na Vida, é saber onde se quer chegar. ”*

*(Nascimento, A.C.L.)*



## Agradecimentos

A Deus, por me conceder a oportunidade de lutar pelas vitórias nas batalhas da vida.

A minha mãe Iracema Lima da Silva, minha inspiração, que sempre acreditou em mim.

A meus irmãos Alcilene Cristina e Allan Rodrigo e a meu pai Antonio Ramos por todo apoio e incentivo.

A minha namorada Larissa Albuquerque, por me apoiar e motivar nos momentos de dificuldade.

A meu Orientador, professor Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, que me ajudou neste trabalho.

A todos os professores do programa de pós-graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME) que tive a oportunidade de conhecer.

Em nome de meu orientador da graduação, Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez, agradeço a todos os professores da Faculdade de Matemática do Campus Universitário da UFPA em Bragança-PA, por contribuírem de modo ímpar com minha formação profissional e pessoal.

A meus amigos Thiago Laurindo, Ronald Barbosa, Diogo Moan, Jefferson Macedo e Diego, por toda ajuda e companheirismo.

Ao apoio financeiro dado pela Capes para que pudesse realizar tudo com sucesso.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Apresentação do Problema e Conceitos Elementares</b>	<b>10</b>
1.1 Perda de Observabilidade Numérica . . . . .	11
1.2 Apresentação do Problema . . . . .	15
1.3 Equação de Onda . . . . .	17
1.4 Diferenças Finitas Usuais . . . . .	18
1.5 Diferenças Finitas não Usuais (NSFD) . . . . .	19
<b>2 Semi-discretização com Diferenças Finitas Usuais</b>	<b>26</b>
2.1 Análise Espectral . . . . .	27
2.2 Observabilidade dos Autovetores . . . . .	30
2.3 Prova da Perda de Observabilidade Numérica . . . . .	32
2.4 Observabilidade Uniforme: Filtragem das Soluções via Método Multiplicativo . . . . .	35
<b>3 A função <math>\psi_h</math> do Método NSFD</b>	<b>47</b>
<b>4 Análise de Dispersão</b>	<b>53</b>
4.1 Análise de Dispersão: Ambiente Contínuo . . . . .	54
4.2 Análise de Dispersão: Diferenças Finitas Usuais . . . . .	55
4.3 Análise de Dispersão: Modelo <i>NSFD</i> . . . . .	57
4.4 Análise de Dispersão: Modelo $\theta$ -esquema Usual . . . . .	59
4.5 Análise de Dispersão: Modelo $\theta$ -esquema <i>NSFD</i> . . . . .	61
4.6 Comparativo entre os modelos $\theta$ -esquema Usual e $\theta$ -esquema <i>NSFD</i> . . . . .	62
<b>5 Conclusões</b>	<b>64</b>

# Introdução

Nas últimas décadas a Análise Numérica e Computacional se consolidou como importante área da Matemática bem como de Ciências afins. Progressos significativos no campo da Análise de Diferenças Finitas foram alcançados. Além disso, a implementação de métodos numéricos não usuais, com o objetivo de corrigir problemas oriundos de metodologias usuais, proporcionaram avanços consideráveis em pesquisas científicas direcionadas à referida temática.

Para superar limitações impostas pelos esquemas tidos como usuais, surgem os métodos *nonstandards* (Nonstandard Finite Difference Methods - NSFD) desenvolvidos por **Mickens** [10], [12], [14]. Em geral, esses esquemas são construídos para compensar deficiências dos modelos clássicos de Diferenças Finitas em representar algumas propriedades do modelo contínuo.

Neste trabalho usaremos um método NSFD afim de sanar a anomalia numérica da dispersão para a Equação de Onda unidimensional no ambiente semi-discreto. Nessa direção, dedicamos o primeiro Capítulo para apresentar o resumo dos resultados obtidos por **Infante e Zuazua** [4] acerca da perda de Observabilidade numérica e introduzir o problema a ser investigado. Além disso, abordaremos, de modo sucinto, conceitos básicos sobre Equação de Onda, Diferenças Finitas Usuais e NSFD. Concluiremos esse Capítulo introdutório, mostrando parte dos resultados de **Huang e Sergey** [6], no qual baseamos a dedução de nosso esquema semi-discreto *NSFD*.

No segundo Capítulo veremos como **Infante e Zuazua** [4] conseguiram a Observabilidade Uniforme por meio da filtragem das soluções, que motivou o presente trabalho no sentido de melhorar os resultados acerca da dispersão no ambiente semi-discreto. O terceiro Capítulo é dedicado à função  $\psi_h$  que nos permite recuperar propriedades do modelo contínuo no ambiente espacialmente discretizado. No quarto Capítulo comparamos os métodos de Diferenças Finitas Usuais e *NSFD* para a dispersão da Equação de Onda no ambiente semi-discreto. A conclusão de nossas investigações e perspectivas para futuros estudos, encontram-se no último Capítulo.

# Capítulo 1

## Apresentação do Problema e Conceitos Elementares

Neste capítulo falaremos da motivação para o presente trabalho, bem como do problema a ser investigado. Além disso, abordaremos de modo sucinto conceitos centrais, tais quais: Equação de Onda unidimensional, métodos numéricos de Diferenças Finitas Usuais e de Diferenças Finitas não Usuais. Iniciaremos apresentando os principais resultados de **Infante e Zuazua** [4] que conduzem à perda Observabilidade numérica das soluções do sistema hiperbólico espacialmente discretizado, o qual tomamos como base para nossas análises.

## 1.1 Perda de Observabilidade Numérica

**Infante e Zuazua** [4] consideraram o sistema semi-discreto para a equação de onda unidimensional num intervalo limitado com condições de fronteira de Dirichlet (1.12) – (1.14). Os referidos autores analisaram o problema da observabilidade limitada, isto é, em que a energia total das soluções pode ser estimada em termos da energia concentrada na fronteira quando  $h$  tende a zero. Eles provaram que o esquema numérico Usual em Diferenças Finitas à altas frequências não é uniformemente limitado devido às soluções espúrias. Contudo, como veremos no segundo Capítulo, para um subespaço de soluções gerado pelas baixas frequências, obtido por técnicas de filtragem, os pesquisadores conseguiram limitação uniforme com esquemas semi-discretos em Diferenças Finitas Usuais. A seguir veremos os principais resultados que conduzem a essa perda de observabilidade numérica à altas frequências.

Considere o seguinte sistema hiperbólico:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = g(t), \quad 0 < t < T \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 < x < L \quad (1.3)$$

Onde  $(u_0, u_1)$  são condições iniciais,  $g$  é a função controle que age sobre o sistema pela extremidade  $x = L$  do espaço intervalar  $(0, L)$  e  $v$  é a velocidade de propagação de onda. Esse sistema descreve as vibrações de uma corda controlada, o qual é bem posto no espaço  $H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ , ou seja, para quaisquer dados iniciais  $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$  existe uma única solução  $u \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ . Quando  $g = 0$ , isto é, quando não há controle agindo na fronteira  $x = L$ , a energia das soluções do sistema (1.1) – (1.3) é dada por (1.4), (para mais detalhes, veja [4] e suas referências).

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (|u_x(x, t)|^2 + |u_t(x, t)|^2) dx. \quad (1.4)$$

Além disso,  $E(t) \geq 0$  e é conservada no tempo, isto é:

$$E(0) = E(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.5)$$

O seguinte resultado de controlabilidade exata para o sistema (1.1) – (1.3) também é bem conhecido (veja [5] e suas referências, para mais detalhes):

**Theorem 1.1.1** *Dado  $T \geq 2L$  e  $(u_0, u_1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ , existe uma função controle  $g \in L^2(0, T)$  tal que a solução  $u(x, t)$  de (1.1) – (1.3) satisfaz:*

$$u(T) = u_t(T) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.6)$$

Entre os controles com a propriedade (1.6) existe um único controle de norma minimal em  $L^2$ . Isso é chamado controle HUM (Método da Unicidade Hilbertiana). Note que (1.6) faz sentido, com essas condições, desde que o sistema (1.1) – (1.3) admita uma única solução  $u \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(0, L))$ .

Agora considere o seguinte sistema não-controlado:

$$\phi_{tt} = v^2 \phi_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \quad (1.7)$$

$$\phi(0, t) = \phi(1, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (1.8)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1.9)$$

o qual admite uma única solução  $\phi = \phi(x, t) \in C([0, T]; H_0^1(0, 1)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, 1))$  quando  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . Este sistema é o adjunto do sistema (1.1) – (1.3), com  $L = 1$ .

As soluções de (1.7) – (1.9) em termos de Séries de Fourier são dadas por:

$$\phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(k\pi t) + \beta_k \sin(k\pi t)] \varphi_k(x). \quad (1.10)$$

com  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$  e  $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$ .

A controlabilidade exata do problema (1.6) tem sido estudada de maneira mais geral e diversas aproximações para essas soluções são avaliadas. Em particular, o HUM introduzido por **J.L. Lions** [5], reduz a propriedade da controlabilidade exata do Teorema (1.1.1) à seguinte relação de Observabilidade, válida para toda solução do sistema (1.7) – (1.9), com  $L = 1$ :

Dado  $T \geq 2L$  existe uma constante positiva  $C(T) > 0$  tal que:

$$E(0) \leq C(T) \int_0^T |\phi_x(L, t)|^2 dt. \quad (1.11)$$

A inequação (1.11), chamada **Desigualdade de Observabilidade**, pode ser provada por vários métodos inclusive Séries de Fourie, Formula de D'Alembert e técnicas multiplicativas (para mais detalhes veja [5] e suas referências).

Em [4] a seguinte versão semi-discreta em Diferenças Finitas Usuais do sistema (1.7) – (1.9) é analisada:

$$\phi_j'' = v^2 \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2}, \quad 0 < t < T, \quad j = 1, \dots, J \quad (1.12)$$

$$\phi_0 = \phi_{J+1} = 0, \quad t > 0, \quad (1.13)$$

$$\phi(0) = \phi_{0,j}, \quad \phi_j'(0) = \phi_{1,j}, \quad j = 1, \dots, J \quad (1.14)$$

Onde

$$h = 1/(J + 1), \quad J \in \mathbb{N}, \quad v = 1.$$

$$x_0 = 0 < x_1 = h < x_2 = 2h < \dots < x_J = Jh < x_{J+1} = 1.$$

A energia do sistema (1.12) – (1.14), dada por:

$$E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |\phi_j'(t)|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \frac{|\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)|^2}{h^2}, \quad (1.15)$$

é definida positiva e conservada no tempo. Isto é:

$$E_h(t) = E_h(0), \quad \forall t \in (0, T). \quad (1.16)$$

A versão semi-discretizada correspondente à desigualdade (1.11) é dada por:

$$E_h(t) \leq C(T, h) \int_0^T \left| \frac{\phi_J(t)}{h} \right|^2 dt. \quad (1.17)$$

Note que em (1.17),  $\frac{\phi_J(t)}{h}$  representa a derivada  $\phi_x(1, t)$  da solução do sistema contínuo (1.7) – (1.9), pois  $\phi_{J+1} = 0$ . Mais explicitamente, busca-se por uma constante  $C(T, h) > 0$  tal que vale (1.17).

O problema de autovalor correspondente ao sistema (1.12) – (1.14) é da forma:

$$-\frac{\varphi_{k+1} + \varphi_{k-1} - 2\varphi_k}{h^2} = \lambda\varphi_k, \quad k = 1, \dots, J. \quad (1.18)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{J+1} = 0. \quad (1.19)$$

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J$  os  $J$  autovalores de (1.18), com  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_J$ .

Os autovalores e autovetores de (1.18) – (1.19) podem ser explicitados respectivamente por (1.20) e (1.21) (para mais detalhes veja [2] p.456).

$$\lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi kh}{2}\right), \quad k = 1, \dots, J \quad (1.20)$$

$$\bar{\varphi}_k \equiv (\varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,J},); \quad \varphi_{k,j} = \sin(k\pi jh), \quad j, k = 1, \dots, J \quad (1.21)$$

As soluções de (1.12) – (1.14) em séries de Fourier são dadas por:

$$\bar{\phi}(x_j, t) = \sum_{k=1}^J \left[ a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right) \right] \bar{\varphi}_{k,j}. \quad (1.22)$$

onde  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , podem ser explicitados por meio das condições iniciais de (1.12) – (1.14).

**Infante e Zuazua** [4] conseguiram a seguinte igualdade:

$$\frac{E_h(0)}{\int_0^T |\phi_J(t)/h|^2 dt} = \frac{2}{T(4 - \lambda_J(h)h^2)}. \quad (1.23)$$

Mas

$$\begin{aligned} \lambda_J(h)h^2 &= 4 \sin^2\left(\frac{\pi Jh}{2}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2}\right). \\ &= 4 \cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \rightarrow 4 \quad \text{quando} \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Portanto, de (1.23) e de (1.24) mostra-se que para todo  $T > 0$ , temos:

$$\sup_{\bar{\phi} \in S_h} \left[ \frac{E_h(0)}{\int_0^T |\phi_J(t)/h|^2 dt} \right] \rightarrow \infty, \quad h \rightarrow 0. \quad (1.25)$$

onde  $S_h$  é o conjunto de todas as soluções de (1.12) – (1.14) dado por:

$$S_h := \left\{ \phi(t) = \sum_{k=1}^J \left[ a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k(h)}t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k(h)}t\right) \right] \varphi^k, \quad \text{com} \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.26)$$



O *blow-up* em (1.25) mostra que a observabilidade em (1.17) não permanece uniformemente limitada quando  $h \rightarrow 0$ . Isso deve-se ao comportamento patológico das soluções à altas frequências, as quais levam à perda de Observabilidade Uniforme com o esquema numérico de Diferenças Finitas Usuais. Esse comportamento patológico das soluções espúrias é explicitado pela dispersão do modelo hiperbólico em estudo, como veremos oportunamente.

Como consequência disso, pelo Teorema de Hahn-Banach, deduz-se a existência da energia finita dos dados iniciais para as soluções do sistema (1.1) – (1.3) para as quais o controle correspondente ao modelo semi-discreto diverge quando  $h \rightarrow 0$ . Contudo, como foi provado por **Infante e Zuazua** [4], se as altas frequências forem convenientemente filtradas ou truncadas, então é possível obter resultados positivos, isto é, desigualdades de Observabilidade Uniforme com constantes que são independentes de  $h$ . No segundo Capítulo deste trabalho mostraremos com mais detalhes como obter essa Observabilidade Uniforme via método multiplicativo.

## 1.2 Apresentação do Problema

**Infante e Zuazua** [4] conseguiram mostrar a Observabilidade Uniforme, para o sistema semi-discreto (1.12) – (1.14), restrita à baixas frequências, usando técnicas de filtragem. Contudo, o método de Diferenças Finitas Usuais empregado apresentou soluções espúrias à altas frequências. Isso provocou uma anomalia numérica na dispersão, ou seja, a dispersão no modelo semi-discreto não representa a do modelo contínuo à altas frequências.

Na Figura (1.1) podemos observar a reta da dispersão no ambiente contínuo (em verde) bem como a curva da dispersão no modelo semi-discreto com Diferenças Finitas Usuais (em vermelho). Observe que a medida que *gama* aumenta, isto é, à altas frequências, o esquema semi-discreto deixa de representar o modelo contínuo para a dispersão. Este trabalho tem por objetivo sanar essa anomalia da dispersão empregando um método NSFD (*Nonstandard Finite Difference*) com uma função  $\psi_h$  escolhida convenientemente.

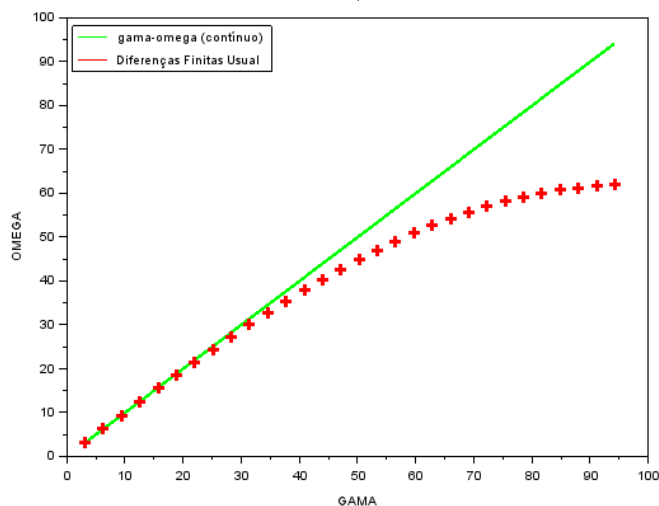


Figura 1.1: A dispersão do modelo contínuo e a do ambiente semi-discreto Usual

O distanciamento da curva do modelo discreto em relação à reta do contínuo é devido ao *gap* (distância) entre os autovalores consecutivos, dados por (1.20). Pois o *gap* entre autovalores consecutivos no ambiente contínuo é constante, ao passo que no modelo semi-discreto, em Diferenças Finitas Usuais, esse *gap* é da ordem de  $h$ , ou seja, tende a zero quando  $h$  decresce. No terceiro Capítulo falaremos mais sobre o *gap* de autovalores consecutivos dos modelos contínuo e discreto.

A Análise de Dispersão pode ser usada como indicador de que é possível mostrar a observabilidade das soluções. No gráfico da dispersão do modelo numérico, na Figura (1.1), vemos que para baixas frequências ele coincide com a dispersão do ambiente contínuo, logo, podemos pensar em Observabilidade Uniforme limitada para uma classe de soluções onde as altas frequências são deixadas de fora por meio de truncamento, como foi feito por **Infante e Zuazua** em [4].

Em nosso trabalho, no terceiro Capítulo, mostraremos que é possível recuperar o *gap* constante do ambiente contínuo no modelo semi-discreto usando um método NSFD. Isso nos permite sanar a anomalia numérica na dispersão do problema em estudo, a qual, de acordo com os autores de [4], contribui para a perda de observabilidade. Com esse resultado obtemos um forte indicativo de que pode-se mostrar a Observabilidade Uniforme das soluções sem a necessidade de filtrá-las.

### 1.3 Equação de Onda

De acordo com **Iório** [8], a equação de onda foi um dos problemas mais importantes do século *XVIII*. O primeiro a estudá-la foi d' Alembert, seguido por Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange. No problema das vibrações transversais de uma corda, a posição  $u(x, t)$  do ponto  $x$  da corda, num instante  $t$  deve satisfazer a equação de onda (1.27), na qual podemos supor  $v$  constante, caso a corda seja homogênea, além disso, impomos que as únicas forças atuantes sejam as de tensão. Consideramos a corda finita de comprimento  $L$ , que em repouso coincide com o eixo das abscissas no intervalo  $[0, L]$ , cujas extremidades estão fixas. Devemos encontrar uma função  $u(x, t)$  que satisfaça a equação (1.27) bem como as condições iniciais e de contorno dadas respectivamente por (1.29) e (1.28) :

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \quad (1.27)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (1.28)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 < x < L \quad (1.29)$$

A solução geral da equação (1.27) é dada por (1.30) (para mais detalhes veja **Iório** [8]).

$$u(x, t) = \zeta(x + vt) + \xi(x - vt). \quad (1.30)$$

Onde  $\zeta$  e  $\xi$  são funções arbitrárias duas vezes diferenciáveis;  $x + vt = c_1$  e  $x - vt = c_2$  são as curvas características da equação de onda, com  $c_1$  e  $c_2$  constantes;  $v$  é a velocidade de propagação da onda. Quando aplicamos as condições de contorno da equação (1.27) na solução (1.30) obtemos a solução para a equação de onda dada por (1.31) (para mais detalhes veja **Cuminato** [3]).

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + vt) + u_0(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} u_1(y) dy. \quad (1.31)$$

Além disso, o problema da corda vibrante com extremidades fixas pode ser resolvido via Séries de Fourier, cuja solução é dada por (1.32) (para mais detalhes veja **Figueiredo** [1]).

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi vt}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi vt}{L}\right) \right]. \quad (1.32)$$

onde  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes de Fourier dados por:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \quad (1.33)$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi v} \int_0^L u_1(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \quad (1.34)$$

De acordo com **Cunha** [7], uma propriedade importante da equação de onda é o transporte do formato da condição inicial, inclusive descontinuidades, ou seja, ela não possui caráter suavizador. Mas os métodos de Diferenças Finitas Usuais têm como base a expansão em Séries de Taylor que pressupõem suavidade da função. Assim, o uso de métodos numéricos destinados à funções suaves em problemas cujas soluções podem apresentar variações abruptas, pode produzir resultados não condizentes com as soluções analíticas.

## 1.4 Diferenças Finitas Usuais

Diferenças Finitas Usuais é um método numérico usado para modelar soluções de equações diferenciais. A essência dos métodos usados para esse fim está na discretização do contínuo, a qual torna *finito* o problema e viabiliza sua *solução* através de computadores.

O primeiro passo para qualquer método destinado à solução numérica de equações diferenciais é discretizar a região onde procuramos a solução por meio da construção de malhas. Segue um modelo de malha com passo constante:

Dado  $x_0$  um ponto de referência e  $h > 0$ . A malha de passo  $h$  associada a  $x_0$  é o conjunto de pontos:

$$x_j = x_0 \pm jh, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

Embora o modelo de malha apresentado acima seja usual, outros formatos de malhas podem ser tomados. Por exemplo, podemos construir uma malha irregular onde  $x_j - x_{j-1} = h_j$ .

O segundo passo é a discretização das derivadas presentes na equação diferencial. Para este fim, usa-se a expansão em Série de Taylor, (veja **Cunha** [7] para mais detalhes). Para cada ponto da malha, denotamos por  $u_j$  a aproximação de  $u(x_j)$ , e usamos as seguintes aproximações:

$$(i) \quad u_x(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{h}. \quad (ii) \quad u_x(x_j) \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{h}. \quad (iii) \quad u_x(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}.$$

Onde  $u_x$  indica a derivada de primeira ordem da função  $u$  com relação à variável  $x$  e (i), (ii), (iii) são denominadas as fórmulas avançada, atrasada e centrada, respectivamente. Além disso, a forma discretizada da derivada de segunda ordem com relação a  $x$  é dada por:

$$u_{xx}(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}.$$

O Método de Diferenças Finitas Usuais é amplamente empregado para obter aproximações numéricas das soluções de sistemas de equações diferenciais. Todavia, há casos em que o referido método apresenta limitações e faz-se necessário o uso de métodos ditos não usuais. Em nosso trabalho faremos uso de um método NSFD para recuperarmos a dispersão do ambiente contínuo, como proposto na Seção (1.2).

## 1.5 Diferenças Finitas não Usuais (NSFD)

O processo de modelagem NSFD inicia em 1989, com a publicação de **Mickens** [10] e atualmente é uma valiosa ferramenta para, entre outros, a Análise Numérica. De acordo com **Mickens** [13], o esquema de Diferenças Finitas não Usuais (*Nonstandard finite difference, NSFD*), é uma generalização do método de Diferenças Finitas Usuais para obter aproximações das soluções de equações diferenciais. A propriedade mais importante é, na maioria dos casos, a completa ausência de instabilidade numérica que, em geral, os esquemas usuais em Diferenças Finitas apresentam. Para **Manning** [9] é vantajoso usar NSFD devido a eficiência e melhor aproximação das soluções no esquema discretizado.

Se o modelo em estudo envolve Equação Diferencial Ordinária (EDO), a discretização da derivada, no modelo *Nonstandard*, deve ser generalizado de modo a incluir estruturas da forma:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\phi(h, \sigma)}. \quad (1.35)$$

onde  $u_j$  é uma aproximação para  $u(x_j)$ ,  $\sigma$  representa possíveis parâmetros da equação diferencial e  $\phi(h, \sigma)$  é uma função que satisfaz a condição:

$$\phi(h, \sigma) = h + O(h^2). \quad (1.36)$$

Ou seja,  $\phi(h, \sigma) \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Alguns exemplos para  $\phi(h, \sigma)$  são dados por:

$$h, \quad \sin(h), \quad e^h - 1, \quad 1 - e^{-h}, \quad \frac{1 - e^{-\sigma h}}{\sigma}$$

Para o nosso trabalho usaremos o modelo NSFD para a derivada parcial de segunda ordem:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\psi(h, \sigma)}. \quad (1.37)$$

onde  $\psi$  é uma função que satisfaz:

$$\psi(h, \sigma) = h^2 + O(h^4).$$

**Huang e Sergey** [6] deduziram um esquema de Diferenças Finitas não Usual derivado dos métodos de **Mickens** [13] para a equação do calor, cujo objetivo era melhorar os resultados numéricos para  $h$  grande (não muito próximo de zero). A seguir veremos os esquemas NSFD deduzidos por Huang e Sergey para uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), que nos ajuda a entender a construção e eficiência do método, em seguida mostraremos um modelo *nonstandard* para o esquema totalmente discretizado da Equação de Onda Unidimensional implementado pelos referidos pesquisadores, o qual nos inspirou a deduzir o nosso modelo *NSFD* para o problema da dispersão investigado em nosso trabalho.

## Esquema NSFD para EDO

Considere o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI) :

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u; \quad u(0) = u_0. \quad (1.38)$$

Cuja solução é dada por:

$$\tilde{u}(t) = u_0 e^{-\lambda t}.$$

Então temos:

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{u}(t) = 0. \quad (1.39)$$

Faremos um comparativo entre Diferenças Finitas Usuais e NSFD para o problema (1.38).

### Esquema com Diferenças Finitas Usuais

Para  $0 < t < T$  e usando  $t_0 = 0$ ,  $t_J = T$ ,  $h = \frac{T}{J}$  e  $\frac{d}{dt}u = \frac{u_{j+1} - u_j}{h}$ .

Onde o modelo numérico de Diferenças Finitas Usuais para o PVI em estudo é dado por:

$$u_{j+1} = (1 - \lambda h)u_j. \quad (1.40)$$

Note que, para  $h$  grande (não tão próximo de zero), ao contrário da solução analítica, o esquema em Diferenças Finitas Usuais não converge para zero quando  $j \rightarrow \infty$ . Ou seja:

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{u} \neq 0. \quad (1.41)$$

De fato, pois para  $h$  grande e sabendo que  $t_{j\pm 1} = t_j \pm h$ , teremos:

$$\begin{aligned} h \left[ \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) u_0 e^{-\lambda t_j} \right] &= h \left[ \frac{d}{dt} u_0 e^{-\lambda t_j} + \lambda u_0 e^{-\lambda t_j} \right] \\ &= h \left[ \frac{u_0 e^{-\lambda t_{j+1}} - u_0 e^{-\lambda t_j}}{h} + \lambda u_0 e^{-\lambda t_j} \right] \\ &= u_0 e^{-\lambda t_j} \left( e^{-\lambda h} - 1 + h\lambda \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ou seja, o modelo numérico para Diferenças Finitas Usuais não é exato.

### Esquema com NSFD

Um esquema exato NSFD para o problema(1.38) , é obtido usando:

$$\frac{d}{dt} u \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\phi_h}. \quad (1.43)$$

Onde  $\phi_h$  é uma função que depende de  $h$  e satisfaz as condições do método de **Mickens** [11], [13] .

A função  $\phi_h$  para o problema (1.38) é assim obtida:

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\phi_h} = -\lambda u_j \implies u_{j+1} = (1 - \lambda \phi_h) u_j. \quad (1.44)$$

Como  $u_{j+1} = e^{-\lambda h} u_j$  e para  $u_j \neq 0$ , temos:

$$(1 - \lambda \phi_h) = e^{-\lambda h} \implies \phi_h = \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda}. \quad (1.45)$$

Dessa maneira, o esquema NSFD para o problema (1.38) é exato, isto é:

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{u} = 0. \quad (1.46)$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} \phi_h \left[ \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) u_0 e^{-\lambda t_j} \right] &= \phi_h \left[ \frac{u_0 e^{-\lambda t_{j+1}} - u_0 e^{-\lambda t_j}}{\phi_h} + \lambda u_0 e^{-\lambda t_j} \right] \\ &= u_0 e^{-\lambda t_{j+1}} - u_0 e^{-\lambda t_j} + \left( \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda} \right) \lambda u_0 e^{-\lambda t_j} \\ &= u_0 e^{-\lambda t_j} e^{-\lambda h} - u_0 e^{-\lambda t_j} + u_0 e^{-\lambda t_j} - u_0 e^{-\lambda h} e^{-\lambda t_j} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Agora vamos comparar graficamente as aproximações com Diferenças Finitas Usuais e com NSFD para a solução do problema (1.38) com  $\lambda = \pi$ ,  $u_0 = 1$  e  $t \in [0, 2]$ . Para  $h$  tendendo a zero, os esquemas NSFD e Usual convergem para o modelo contínuo, veja a Figura (1.2a). O gráfico em verde representa a solução no ambiente contínuo ao passo que os gráficos em vermelho e preto representam as aproximações nos modelos NSFD e Diferenças Finitas Usuais respectivamente.

Observe que para  $h$  grande o esquema usual apresenta problemas em representar o modelo contínuo. Para  $h = 0.3$  a aproximação no modelo NSFD é melhor do que a do esquema usual, como podemos observar na Figura (1.2b). Se tomarmos  $h = 0.4$  notamos que o modelo usual não representa o contínuo para  $t$  próximo de zero, veja a Figura (1.3a). A medida que  $h$  cresce, o esquema com Diferenças Finitas Usuais deixa de representar a solução do PVI, como podemos observar nas Figuras (1.3b) e (1.3c) onde temos  $h = 0.5$  e  $h = 0.6$  respectivamente. Contudo, mesmo com  $h$  crescendo, o modelo NSFD permanece estável.

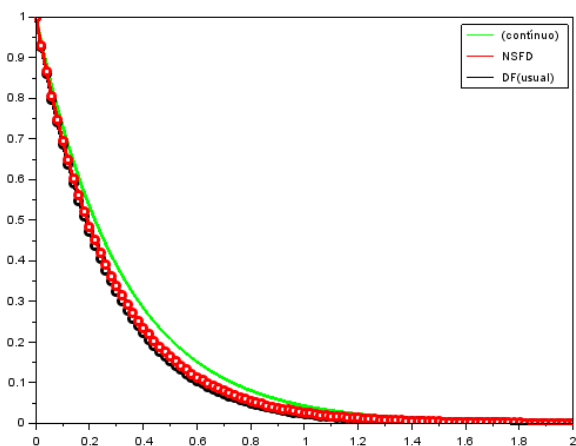
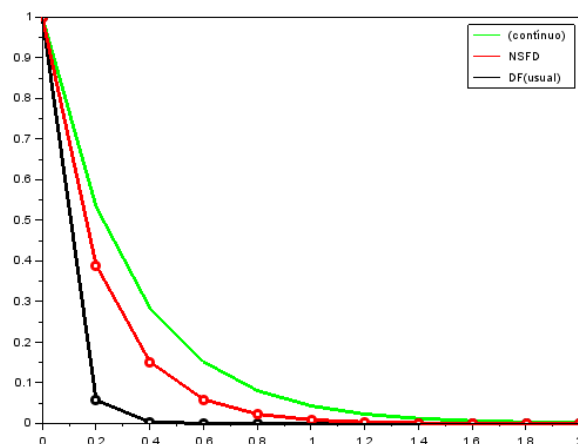
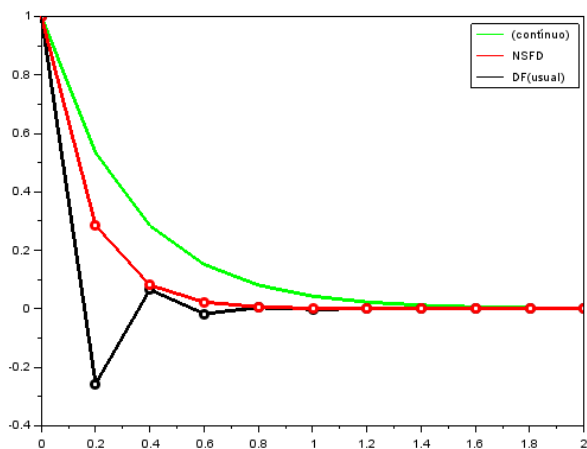
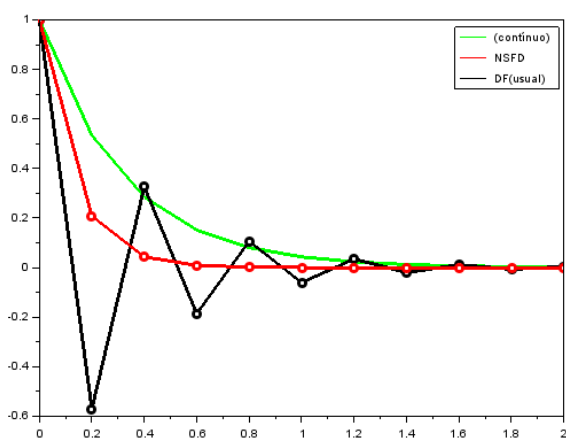
(a) Para  $h = 0.02$ (b) Para  $h = 0.3$ 

Figura 1.2

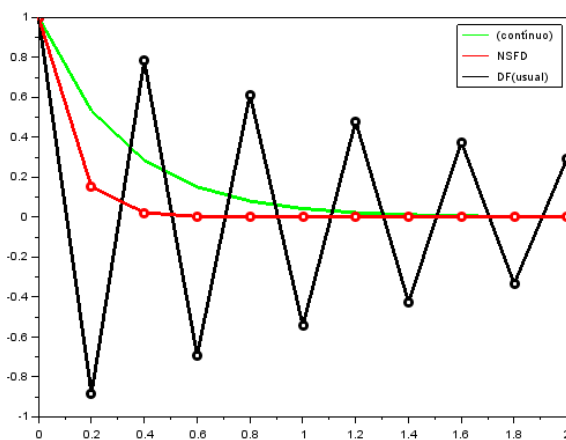




(a) Para  $h = 0.4$



(b) Para  $h = 0.5$



(c) Para  $h = 0.6$

Figura 1.3

## Esquema NSFD para Equação de Onda 1-D

Considere o sistema para equação de ondas unidimensional:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L; \quad 0 < t < T \quad (1.48)$$

$$u(0, t) = U_0, \quad u(L, t) = U_L; \quad 0 < t < T \quad (1.49)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x); \quad 0 < x < L \quad (1.50)$$

Para o modelo totalmente discretizado com Diferenças Finitas Usuais, sejam:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{l^2}. \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}. \quad (1.52)$$

Onde  $v$  é a velocidade de propagação de onda. Além disso, o esquema numérico Usual é dado por:

$$u_{i,j+1} = 2(1 - s_i)u_{i,j} + s_i u_{i+1,j} + s_i u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (1.53)$$

Com  $0 < h, l < 1$  e  $s_i = \left(\frac{l}{h}\right)^2 v_i^2$ .

Para deduzir o esquema NSFD, usamos a seguinte solução para a equação de ondas:

$$\tilde{u}(x, t) = e^{i(\gamma x - \omega t)}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (1.54)$$

Onde  $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda}$ , com  $\lambda$  o comprimento de onda,  $\omega = 2\pi f$  a frequência angular e  $f$  o número de oscilações por segundo. A velocidade de propagação de onda é dada por  $v = \lambda f = \frac{\omega}{\gamma}$ .

Como  $\tilde{u}_{tt} = -\omega^2 e^{i\gamma x} e^{-i\omega t}$  e  $\tilde{u}_{xx} = -\gamma^2 e^{i\gamma x} e^{-i\omega t}$ , temos que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tilde{u} = -\omega^2 e^{i\gamma x} e^{-i\omega t} + v^2 \gamma^2 e^{i\gamma x} e^{-i\omega t} = 0. \quad (1.55)$$

Onde usamos  $v^2 \gamma^2 = \frac{\omega^2}{\gamma^2} \gamma^2 = \omega^2$ .

**Observação 1** Quando  $v = 1$ , temos  $\omega = \gamma$ .

Sejam

$$\bar{d}_x^2 f(x, t) = f(x + h, t) - 2f(x, t) + f(x - h, t). \quad (1.56)$$

$$\bar{d}_t^2 f(x, t) = f(x, t + l) - 2f(x, t) + f(x, t - l). \quad (1.57)$$

Assim, substituindo (1.54) em (1.56) e (1.57), obtemos respectivamente:

$$\bar{d}_x^2 \left[ e^{i(\gamma x - \omega t)} \right] = 2e^{i(\gamma x - \omega t)} (\cos(\gamma h) - 1). \quad (1.58)$$

$$\bar{d}_t^2 \left[ e^{i(\gamma x - \omega t)} \right] = 2e^{i(\gamma x - \omega t)} (\cos(\omega l) - 1). \quad (1.59)$$

Como  $\tilde{u}(x, t) = e^{i(\gamma x - \omega t)}$ , segue que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\bar{d}_t^2}{l^2} - v^2 \frac{\bar{d}_x^2}{h^2} \right) \tilde{u}(x, t) = 0 &\implies \frac{2}{l^2} \tilde{u}(x, t) (\cos(\omega l) - 1) - v^2 \frac{2}{h^2} \tilde{u}(x, t) (\cos(\gamma h) - 1) = 0 \\ &\implies \tilde{u}(x, t) \left( (\cos(\omega l) - 1) - v^2 \frac{l^2}{h^2} (\cos(\gamma h) - 1) \right) = 0 \\ &\implies v^2 \frac{l^2}{h^2} = \frac{(\cos(\omega l) - 1)}{(\cos(\gamma h) - 1)}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Para obtermos um esquema exato com respeito a  $\tilde{u}$  trocamos  $s_i$  em (1.53) por  $p_i = \frac{(\cos(\omega l) - 1)}{(\cos(\gamma_i h) - 1)}$  com  $\gamma_i = \frac{\omega}{v_i}$ . E obtemos o esquema NSFD para a forma totalmente discretizada do sistema (1.48) – (1.50) dada por:

$$u_{i,j+1} = 2(1 - p_i)u_{i,j} + p_i u_{i+1,j} + p_i u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (1.61)$$

Usando a identidade:  $\cos(A) - 1 = 2 \sin^2 \left( \frac{A}{2} \right)$ , podemos escrever:

$$p_i = \frac{(\cos(\omega l) - 1)}{(\cos(\gamma_i h) - 1)} = \frac{\sin^2 \left( \frac{\omega l}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\gamma_i h}{2} \right)}. \quad (1.62)$$

Quando  $0 < h, l \ll 1$  usamos a aproximação  $\sin(q) \approx q$  para  $|q| \ll 1$ , e da relação  $\gamma = \frac{\omega}{v}$ , obtemos:

$$p_i \approx \frac{\left( \frac{\omega l}{2} \right)^2}{\left( \frac{\gamma h}{2} \right)^2} = \frac{\omega^2 l^2}{\gamma^2 h^2} = \frac{\gamma^2 v^2 l^2}{\gamma^2 h^2} = \frac{v^2 l^2}{h^2} = s_i. \quad (1.63)$$

Esse modelo NSFD para a equação da onda no ambiente totalmente discretizado serviu de inspiração para o nosso modelo *NSFD* para o ambiente semi-discreto investigado neste trabalho.

# Capítulo 2

## Semi-discretização com Diferenças Finitas Usuais

Neste Capítulo, para o sistema espacialmente discretizado (2.1) – (2.3), faremos a Análise Espectral, provaremos a Observabilidade de seus autovetores e mostraremos a perda de Observabilidade Numérica. Em seguida, vamos provar a Observabilidade Uniforme das soluções à baixas frequências, por meio de filtragem das soluções. Para isso aplicaremos as técnicas multiplicativas utilizadas por **Infante e Zuazua** [4].

Considere o sistema hiperbólico dado por:

$$u_j'' = v^2 \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}, \quad 0 < t < T, \quad j = 0, \dots, J+1 \quad (2.1)$$

$$u_0 = u_{J+1} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2.2)$$

$$u(0) = u_{0,j}, \quad u_j'(0) = u_{1,j}, \quad j = 0, \dots, J+1 \quad (2.3)$$

$$h = L/(J+1), \quad J \in \mathbb{N}, \quad v = 1$$

$$x_0 = 0 < x_1 = h < x_2 = 2h < \dots < x_J = Jh < x_{J+1} = L$$

Onde (2.1) – (2.3) é um sistema espacialmente discretizado com  $J$  equações diferenciais lineares, com funções  $u_1, \dots, u_J$ , pois,  $u_0 = u_{J+1} = 0$ . E  $u_{0,j}$ ,  $u_{1,j}$  são aproximações para as condições de contorno, bem como  $u_j(t)$  é uma aproximação de  $u(x_j, t)$ , solução do modelo contínuo. Além disso, ' e '' denotam as derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente, em relação ao tempo.

A energia do sistema (2.1) – (2.3) é dada por:

$$E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |u_j'(t)|^2 + \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 \right]. \quad (2.4)$$

## 2.1 Análise Espectral

A solução do sistema (2.1) – (2.3) via Séries de Fourier é dada por:

$$u(t) = \sum_{k=1}^J \left[ a_k \sin(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) \right] \varphi_k.$$

onde  $a_k, b_k$  são os coeficientes de Fourier.

O problema de autovetor é dado por:

$$-\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} = \lambda\varphi_j \quad j = 1, \dots, J. \quad (2.5)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{J+1} = 0. \quad (2.6)$$

**Proposição 2.1.1** *Os autovetores e seus autovalores associados de (2.5) – (2.6) são dados, respectivamente por (2.7) e (2.8).*

$$\varphi_{k,j} = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \quad j, k = 1, \dots, J. \quad (2.7)$$

$$\lambda_k = \lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right), \quad k = 1, \dots, J. \quad (2.8)$$

**Demonstração:**

Seja  $u_j = \varphi_j \zeta(t)$ , então podemos reescrever a equação (2.1) como:

$$\varphi_j \zeta''(t) - \frac{\varphi_{j+1} \zeta(t) - 2\varphi_j \zeta(t) + \varphi_{j-1} \zeta(t)}{h^2} = 0. \quad (2.9)$$

Usando o método de separação de variáveis, obtemos:

$$\frac{\zeta''(t)}{\zeta(t)} = \frac{1}{\varphi_j} \left[ \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} \right] = -\lambda, \quad \forall t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, J. \quad (2.10)$$

Ou seja

$$-\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} = \lambda \varphi_j \quad j = 1, \dots, J. \quad (2.11)$$

$$\zeta''(t) + \lambda \zeta(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Para soluções não triviais e  $\lambda > 0$ . A solução do problema de autovetores (2.11) é

$$\varphi_{k,j} = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \quad j, k = 1, \dots, J. \quad (2.13)$$

e seus autovalores associados são dados por:

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right), \quad \forall k = 1, \dots, J. \quad (2.14)$$

De fato, substituindo (2.13) em (2.11), e sabendo que  $x_{j\pm 1} = x_j \pm h$ , temos:

$$\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \lambda_k = \frac{-\sin\left(\frac{k\pi(x_j + h)}{L}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) - \sin\left(\frac{k\pi(x_j - h)}{L}\right)}{h^2}. \quad (2.15)$$

Vale a seguinte identidade:

$$\sin\left(\frac{k\pi(x_j \pm h)}{L}\right) = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \pm \sin\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right). \quad (2.16)$$

Usando a identidade (2.16) na igualdade (2.15) e fazendo as devidas simplificações, temos:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \lambda_k &= \frac{2 \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) - 2 \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right)}{h^2} \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right)\right]}{h^2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando a seguinte igualdade:  $1 - \cos\left(\frac{k\pi h}{L}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right)$ .

Podemos escrever (2.17) como:

$$\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \lambda_k = \frac{4 \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right) \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right)}{h^2}. \quad (2.18)$$

Dividindo (2.18) por  $\sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)$ , obtemos os autovalores do problema (2.11):

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right). \quad (2.19)$$

Agora, de (2.12) temos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea, cuja solução é dada por:

$$\zeta(t) = a_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right), \quad k = 1, \dots, J \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.20)$$

onde  $a_k, b_k$  são coeficientes de Fourier. Do princípio da superposição segue o resultado. ■

Denotamos por *gap* entre autovalores consecutivos, a *distância* entre os mesmos. Note que, para  $k$  fixado, teremos:

$$\lambda_k(h) \longrightarrow \frac{\pi^2 k^2}{L^2}, \quad h \longrightarrow 0. \quad (2.21)$$

o qual é o  $k$ -ésimo autovalor do sistema contínuo. Assim, para o modelo contínuo, temos o *gap* constante:

$$\sqrt{\lambda_{k+1}} - \sqrt{\lambda_k} = \frac{(k+1)\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{\pi}{L}. \quad (2.22)$$

Porém, para o ambiente semi-discreto com Diferenças Finitas Usuais, o *gap* é da ordem de  $h$ , pois temos:

$$\frac{\pi^2}{2L^2} h(j+1) \geq \sqrt{\lambda_{k+1}(h)} - \sqrt{\lambda_k(h)} \geq \left[\frac{\pi}{L} - O(h)\right] \cos\left(\frac{\pi h k}{2L}\right) - \frac{\pi^2 h}{2L^2}. \quad (2.23)$$

No terceiro Capítulo, falaremos com mais detalhes sobre o *gap* entre autovalores consecutivos, nos ambientes contínuo e semi-discreto.

## 2.2 Observabilidade dos Autovetores

**Lema 2.2.1** *Para quaisquer autovetores  $\varphi_{k,j}$ , associado ao problema (2.5)–(2.6), vale a seguinte identidade:*

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = \frac{2L}{4 - \lambda_k(h)h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2. \quad (2.24)$$

$$\text{com } \lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2L} \right) \quad \forall k = 1, \dots, J.$$

**Demonstração:**

Multiplicando  $\frac{j(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})}{2}$  na equação (2.5) e somando com  $j = 1, \dots, J$ , obtemos:

$$-\frac{1}{2h^2} \sum_{j=1}^J (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) j(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J j(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})\varphi_j. \quad (2.25)$$

Note que

$$(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) j(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) = j (|\varphi_{j+1}|^2 - |\varphi_{j-1}|^2) - 2j(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})\varphi_j. \quad (2.26)$$

Usando a igualdade (2.26) na equação (2.25), temos:

$$-\frac{1}{2h^2} \sum_{j=1}^J j (|\varphi_{j+1}|^2 - |\varphi_{j-1}|^2) + \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^J j(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})\varphi_j = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J j(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})\varphi_j. \quad (2.27)$$

Além disso, valem as seguintes igualdades:

$$\sum_{j=1}^J j (|\varphi_{j+1}|^2 - |\varphi_{j-1}|^2) = -2 \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 + (J+1)|\varphi_J|^2. \quad (2.28)$$

$$\sum_{j=1}^J j(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})\varphi_j = - \sum_{j=1}^J \varphi_j \varphi_{j+1}. \quad (2.29)$$

Aplicando (2.28) e (2.29) em (2.27), resulta:

$$\frac{1}{h^2} \left[ \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 - \frac{(J+1)}{2} |\varphi_J|^2 - \sum_{j=1}^J \varphi_j \varphi_{j+1} \right] = -\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J \varphi_j \varphi_{j+1}. \quad (2.30)$$

Agora, multiplicando a igualdade (2.5) por  $\varphi_j$  e somando em  $j = 1, \dots, J$ , temos:

$$-\frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^J (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) \varphi_j = \lambda \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2. \quad (2.31)$$



Note que vale a seguinte igualdade:

$$\sum_{j=1}^J (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) \varphi_j = 2 \sum_{j=1}^J (\varphi_{j+1}\varphi_j - |\varphi_j|^2). \quad (2.32)$$

Aplicando a igualdade (2.32) em (2.31), podemos escrever:

$$\frac{2}{h^2} \sum_{j=1}^J (|\varphi_j|^2 - \varphi_{j+1}\varphi_j) = \lambda \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2. \quad (2.33)$$

Normalizando o autovetor tal que:

$$h \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 = 1. \quad (2.34)$$

De (2.33) segue que:

$$\frac{2}{h^2} \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 - \lambda \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 = \frac{2}{h^2} \sum_{j=1}^J \varphi_{j+1}\varphi_j. \quad (2.35)$$

$$\frac{h^2}{2} \left[ \frac{2}{h^2} - \lambda \right] \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 = \sum_{j=1}^J \varphi_{j+1}\varphi_j. \quad (2.36)$$

$$\frac{h^2}{2h} \left[ \frac{2}{h^2} - \lambda \right] = \sum_{j=1}^J \varphi_{j+1}\varphi_j. \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em (2.30) e sabendo que  $\sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 = 1/h$ , obtemos:

$$\frac{1}{h^2} \left[ \frac{1}{h} - \frac{(J+1)}{2} |\varphi_J|^2 - \frac{h^2}{2h} \left[ \frac{2}{h^2} - \lambda \right] \right] = -\frac{\lambda h^2}{4h} \left[ \frac{2}{h^2} - \lambda \right]. \quad (2.38)$$

Assim, segue que:

$$-\frac{(J+1)}{2} |\varphi_J|^2 = -\frac{\lambda h^4}{4h} \left[ \frac{2}{h^2} - \lambda \right] + \frac{h^2}{2h} \left[ \frac{2}{h^2} - \lambda \right] - \frac{1}{h}. \quad (2.39)$$

Fazendo as devidas simplificações em (2.39), temos:

$$\frac{h(J+1)}{2h^2} |\varphi_J|^2 = \left[ \lambda - \frac{\lambda^2 h^2}{4} \right]. \quad (2.40)$$

Como  $h(J+1) = L$ , podemos escrever a ultima igualdade como:

$$\frac{L}{2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 = \lambda \left[ 1 - \frac{\lambda h^2}{4} \right]. \quad (2.41)$$

Por outro lado, vale as seguintes identidades:

$$2 \sum_{j=1}^J (\varphi_j^2 - \varphi_j \varphi_{j+1}) = \sum_{j=0}^J |\varphi_j - \varphi_{j+1}|^2. \quad (2.42)$$

$$\frac{2}{h^2} \sum_{j=1}^J (|\varphi_j|^2 - \varphi_{j+1} \varphi_j) = \lambda \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 = \frac{\lambda}{h}. \quad (2.43)$$

De (2.42) e (2.43), podemos escrever:

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_j - \varphi_{j+1}}{h} \right|^2 = \lambda. \quad (2.44)$$

De (2.41) e de (2.44) obtemos o resultado:

$$\frac{2L}{4 - \lambda h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 = h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_j - \varphi_{j+1}}{h} \right|^2. \quad (2.45)$$

■

## 2.3 Prova da Perda de Observabilidade Numérica

**Lema 2.3.1** *Para qualquer autovetor  $\varphi_k$  com autovalor  $\lambda_k$  associado de (2.5) – (2.6) a seguinte identidade vale:*

$$\sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = \lambda \sum_{j=0}^J |\varphi_j|^2. \quad (2.46)$$

se  $\varphi_k$  e  $\varphi_l$  são autovetores associados com autovalores  $\lambda_k \neq \lambda_l$  segue que

$$\sum_{j=0}^J (\varphi_{k,j} - \varphi_{k,j+1})(\varphi_{l,j} - \varphi_{l,j+1}) = 0. \quad (2.47)$$

**Demonstração:**

Multiplicando a equação (2.5) por  $\varphi_j$  e somando de  $j = 1, \dots, J$ , temos:

$$\sum_{j=1}^J \frac{(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})}{h^2} \varphi_j = \lambda \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2. \quad (2.48)$$

Podemos reescrever a última igualdade como:

$$\sum_{j=1}^J \frac{(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \varphi_j}{h^2} + \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi_{j-1} - \varphi_j) \varphi_j}{h^2} = \lambda \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2. \quad (2.49)$$

Usando as condições de contorno obtemos:

$$\sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{j+1} - \varphi_j)\varphi_j}{h^2} + \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{j-1} - \varphi_j)\varphi_j}{h^2} = \lambda \sum_{j=0}^J |\varphi_j|^2. \quad (2.50)$$

De onde segue o resultado:

$$\sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = \lambda \sum_{j=0}^J |\varphi_j|^2. \quad (2.51)$$

Por outro lado, pela ortogonalidade os autovetores com distintos autovalores, segue que

$$\sum_{j=1}^J (\varphi_{k,j} - \varphi_{k,j+1})(\varphi_{l,j} - \varphi_{l,j+1}) = 0. \quad (2.52)$$

■

O seguinte Teorema nos diz que a constante  $C(T, h)$  da versão semi-discreta da Desigualdade de Observabilidade em (1.17), não permanece limitada. Isso leva à perda de Observabilidade Numérica.

**Theorem 2.3.2** *Para todo  $T > 0$ , temos:*

$$\sup_{u_j \in S_h} \left( \frac{E_h(0)}{\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt} \right) \rightarrow \infty \quad \text{com} \quad h \rightarrow 0. \quad (2.53)$$

Onde  $S_h$  é o conjunto das soluções de (2.1) – (2.3).

**Demonstração:**

Seja  $u$  solução de (2.1) – (2.3) associada ao  $J$ -ésimo autovetor, dada por:

$$u_J(t) = \cos\left(\sqrt{\lambda_J(h)}t\right) \varphi_J. \quad (2.54)$$

Temos que:

$$\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt = \left| \frac{\varphi_{J,J}}{h} \right|^2 \int_0^T \left| \cos\left(\sqrt{\lambda_J(h)}t\right) \right|^2 dt. \quad (2.55)$$

Do Lema (2.2.1), podemos escrever (2.55) como:

$$\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt = \frac{4 - \lambda_J h^2}{2L} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h} \right|^2 \int_0^T \left| \cos\left(\sqrt{\lambda_J(h)}t\right) \right|^2 dt. \quad (2.56)$$

Usando o Lema (2.3.1), escrevemos:

$$E_h(0) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ \lambda_J |\varphi_{J,j}|^2 + \left| \frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h} \right|^2 \right] = h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h} \right|^2. \quad (2.57)$$

Assim, segue que

$$\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt = \frac{4 - \lambda_J h^2}{2L} E_h(0) \int_0^T \left| \cos \left( \sqrt{\lambda_J(h)} t \right) \right|^2 dt. \quad (2.58)$$

Logo,

$$\frac{E_h(0)}{\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt} = \frac{2L}{4 - \lambda_J h^2} \frac{1}{\int_0^T |\cos(\lambda_J h^2)|^2 dt}. \quad (2.59)$$

Com  $h \rightarrow 0$  temos

$$\int_0^T |\cos(\lambda_J h^2)|^2 dt \rightarrow T/2.$$

Então:

$$\frac{E_h(0)}{\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt} = \frac{4L}{T(4 - \lambda_J h^2)}. \quad (2.60)$$

Usando o fato de que  $h = L/(J+1)$ , temos:

$$\lambda_J h^2 = 4 \sin^2 \left( \frac{J\pi h}{2L} \right) = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{2L} \right) = 4 \cos^2 \left( \frac{h\pi}{2L} \right) \rightarrow 4 \quad \text{com} \quad h \rightarrow 0. \quad (2.61)$$

Portanto, de (2.60) e (2.61), segue o resultado:

$$\frac{E_h(0)}{\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt} \rightarrow \infty \quad \text{com} \quad h \rightarrow 0. \quad (2.62)$$

■

## 2.4 Observabilidade Uniforme: Filtragem das Soluções via Método Multiplicativo

Utilizaremos os próximos resultados na demonstração do Teorema (2.4.8), o qual garante a Observabilidade Uniforme das soluções do sistema em estudo, para um subespaço gerado pelas baixas frequências.

### Lema 2.4.1 (*Positividade da energia*)

Para qualquer  $u_j = u_j(t)$  solução do sistema (2.1) – (2.3), temos:

$$E_h(t) \geq 0. \quad (2.63)$$

#### Demonstração:

É imediato. Pois,

$$E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |u'_j|^2 + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right]. \quad (2.64)$$

■

### Lema 2.4.2 (*Conservação da Energia*)

Para todo  $h > 0$  e  $u_j$ , solução do sistema (2.1)–(2.3), temos  $E_h(t) = E_h(0)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

#### Demonstração:

De fato, multiplicando a equação (2.1) por  $hu'_j(t)$  e somando com  $j = 1, \dots, J$ , teremos:

$$h \sum_{j=1}^J u''_j u'_j - h \sum_{j=1}^J \left[ \frac{(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}))}{h^2} \right] u'_j = 0. \quad (2.65)$$

Desde que  $u''_j u'_j = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_j|^2$  e  $u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} = (u_{j+1} - u_j) + (u_{j-1} - u_j)$ , podemos reescrever (2.65) como:

$$\frac{h}{2} \sum_{j=1}^J \frac{d}{dt} |u'_j|^2 - \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J (u_{j+1} - u_j) u'_j - \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J (u_{j-1} - u_j) u'_j = 0. \quad (2.66)$$

Como  $u_0(t) = 0 \implies u'_0(t) = 0$  e  $u_{J+1}(t) = 0 \implies u'_{J+1}(t) = 0$ . Então valem as seguintes igualdades:

$$\sum_{j=1}^J (u_{j+1} - u_j) u'_j = \sum_{j=0}^J (u_{j+1} - u_j) u'_j. \quad (2.67)$$

$$\sum_{j=1}^J (u_{j-1} - u_j)u'_j = \sum_{j=0}^{J-1} (u_j - u_{j+1})u'_{j+1} = \sum_{j=0}^J (u_j - u_{j+1})u'_{j+1} - (u_J - u_{J+1})u'_{J+1}. \quad (2.68)$$

Fazendo uso das igualdades (2.67) e (2.68), podemos escrever (2.66) como:

$$\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \frac{d}{dt} |u'_j|^2 - \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J (u_{j+1} - u_j)u'_j - \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J (u_j - u_{j+1})u'_{j+1} - (u_J - u_{J+1})u'_{J+1} = 0. \quad (2.69)$$

Podemos simplificar (2.69) para:

$$\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \frac{d}{dt} |u'_j|^2 + \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J (u_{j+1} - u_j)(u'_{j+1} - u'_j) = 0. \quad (2.70)$$

Note que  $(u_{j+1} - u_j)(u'_{j+1} - u'_j) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |(u_{j+1} - u_j)|^2$ . Tal igualdade permite escrever (2.70) como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |u'_j|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right] = 0. \quad (2.71)$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt} E_h(t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.72)$$

Logo

$$E_h(t) = E_h(0), \quad t \in [0, T]. \quad (2.73)$$

Portanto a energia  $E_h$  é conservativa no tempo. ■

**Lema 2.4.3** Para todo  $h > 0$  e  $u$  solução de (2.1) – (2.3) temos:

$$\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[ u'_j u'_{j+1} + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right] dt + \chi_h(t) \Big|_0^T = \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.74)$$

onde

$$\chi_h(t) = h \sum_{j=0}^J j u'_j \left( \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} \right). \quad (2.75)$$

**Observação 2** Note que a identidade (2.74) é a análoga discreta da identidade para a equação de ondas do contínuo (1.7) – (1.9) obtida por multiplicadores que levam a (2.76) (veja [5] para mais detalhes).

$$\frac{h}{2} \int_0^L \int_0^T (|u_t|^2 + |u_x|^2) dt dx + \chi(t)|_0^T = \frac{L}{2} \int_0^T |u_x(L, t)|^2 dt. \quad (2.76)$$

onde

$$\chi(t) = \int_0^L x u_x u_t dx. \quad (2.77)$$

Veja que a principal diferença entre (2.74) e (2.76) está na discretização de  $\int_0^L \int_0^T |u_t|^2 dt dx$ , a qual é dada por  $h \sum_{j=0}^J \int_0^T u'_j u'_{j+1}$  que não é positiva definida.

Segue a prova do Lema (2.4.3).

**Demonstração:**

Multiplicando (2.1) por  $j h \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2}$  e somando de  $j = 1, \dots, J$  e integrando em  $(0, T)$ , temos:

$$h \sum_{j=1}^J \int_0^T j u_j'' \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} dt - h \sum_{j=1}^J \int_0^T \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} dt = 0. \quad (2.78)$$

Analisaremos separadamente cada somatório da igualdade anterior.

Usando integração por partes teremos:

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J \int_0^T j u_j'' \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} dt &= \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J u'_j j (u_{j+1} - u_{j-1}) \Big|_0^T - \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T u'_j j (u'_{j+1} - u'_{j-1}) dt \\ &= \chi_h(t) \Big|_0^T - \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T [j u'_j u'_{j+1} + j u'_j u'_{j-1}] dt. \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde

$$\chi_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J u'_j j (u_{j+1} - u_{j-1}).$$

Das condições de contorno do sistema (2.1) – (2.3), teremos:

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j u'_j u'_{j+1} dt + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j u'_j u'_{j-1} dt &= -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j u'_j u'_{j+1} dt \\ &\quad + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T (j+1) u'_j u'_{j+1} dt \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T u'_j u'_{j+1} dt. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Portanto, retornando a (2.79) teremos:

$$h \sum_{j=1}^J \int_0^T j u_j'' \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} dt = \chi_h(t) \Big|_0^T + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T u_j' u_{j+1}' dt. \quad (2.81)$$

Por outro lado, seja

$$S_1 = h \sum_{j=1}^J \int_0^T \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} dt. \quad (2.82)$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{h}{2h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j (|u_{j+1}|^2 - |u_{j-1}|^2) dt - h \sum_{j=1}^J \int_0^T j u_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} dt \\ &= \frac{h}{2h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j |u_{j+1}|^2 dt - \frac{h}{2h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j |u_{j-1}|^2 dt \\ &\quad - \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j u_j u_{j+1} dt + \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j u_j u_{j-1} dt. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Usando as condições de contorno de (2.1) – (2.3) podemos escrever:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |u_{j+1}|^2 dt - \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T (j+1) |u_j|^2 dt \\ &\quad + \frac{h}{2h^2} \int_0^T (J+1) |u_J|^2 dt - \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j u_j u_{j+1} dt + \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T (j+1) u_{j+1} u_j dt. \\ &= \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |u_{j+1}|^2 dt - \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |u_j|^2 dt - \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j|^2 dt \\ &\quad + \frac{h}{2h^2} \int_0^T (J+1) |u_J|^2 dt + \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T u_j u_{j+1} dt. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Usando as seguintes igualdades:

$$\frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |u_{j+1}|^2 dt - \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |u_j|^2 dt = -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j|^2 dt. \quad (2.85)$$

$$h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j|^2 dt = h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_{j+1}|^2 dt. \quad (2.86)$$

Daí, segue,

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j|^2 dt + \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T u_j u_{j+1} dt - \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_{j+1}|^2 dt \\ &\quad + \frac{(J+1)h}{2h^2} \int_0^T |u_J|^2 dt. \end{aligned} \quad (2.87)$$



Logo,

$$S_1 = -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.88)$$

Portanto, de (2.81) e (2.88) segue o resultado. ■

**Lema 2.4.4** (*equipartição da energia*)

Para quaisquer  $h > 0$  e  $u_j = u_j(t)$ , solução de (2.1) – (2.3), temos:

$$-h \sum_{j=1}^J \int_0^T |u'_j|^2 dt + h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 dt + \nu_h(t) \Big|_0^T = 0. \quad (2.89)$$

onde

$$\nu_h(t) = h \sum_{j=1}^J u'_j u_j$$

**Demonstração:**

Multiplicando a equação (2.1) por  $hu_j$ , integrando em  $(0, T)$  e somando de  $j = 1, \dots, J$  teremos:

$$h \sum_{j=1}^J \int_0^T u''_j u_j dt - h \sum_{j=1}^J \int_0^T \left( \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \right) u_j dt = 0. \quad (2.90)$$

Note que valem as seguintes identidades:

$$h \sum_{j=1}^J \int_0^T u''_j u_j dt = h \sum_{j=1}^J u'_j u_j \Big|_0^T - h \sum_{j=1}^J \int_0^T |u'_j|^2 dt. \quad (2.91)$$

$$h \sum_{j=1}^J (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) u_j = -h \sum_{j=0}^J |u_j - u_{j-1}|^2. \quad (2.92)$$

Aplicando (2.91) e (2.92) em (2.90) obtemos:

$$-h \sum_{j=1}^J \int_0^T |u'_j|^2 dt + h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 dt + \nu_h(t) \Big|_0^T = 0. \quad (2.93)$$

onde

$$\nu_h(t) = h \sum_{j=1}^J u'_j u_j. \quad \blacksquare$$

**Corolário 2.4.5** Para qualquer solução de (2.1) – (2.3), vale a seguinte igualdade:

$$h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u'_j|^2 dt = TE_h(0) + \frac{1}{2} \nu_h(t) \Big|_0^T. \quad (2.94)$$

onde

$$E_h(0) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[ |u'_j(0)|^2 + \left| \frac{u_{j+1}(0) - u_j(0)}{h} \right|^2 \right]. \quad (2.95)$$

$$\nu_h(t) = h \sum_{j=0}^J u'_j u_j. \quad (2.96)$$

**Demonstração:** É uma consequência direta do Lema (2.4.4) da equipartição da energia.

Basta somar e subtrair o termo:

$$2h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u'_j|^2 dt.$$

■

**Lema 2.4.6** Para qualquer solução de (2.1) – (2.3) com autovalor  $\Lambda$  suficientemente grande, vale a seguinte desigualdade

$$h \sum_{j=0}^J |u'_{j+1} - u'_j|^2 \leq \Lambda h^3 \sum_{j=1}^J |u'_j|^2. \quad (2.97)$$

**Demonstração:**

Consideremos:

$$u = u(x_j, t) = \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k e^{i\mu_k t} \varphi_{k,j}. \quad (2.98)$$

com  $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$  e  $\varphi_{k,j} = \sin\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right)$ . Assim,

$$u' = \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} i\mu_k a_k e^{i\mu_k t} \varphi_{k,j} = i\mu_k u(x_j, t). \quad (2.99)$$

Então:

$$h \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |u'_{j+1} - u'_j|^2 = h \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} \mu_k^2 |u(x_{j+1}, t) - u(x_j, t)|^2. \quad (2.100)$$

Fazendo

$$S_0 = h \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} \mu_k^2 |u(x_{j+1}, t) - u(x_j, t)|^2.$$

segue que

$$\begin{aligned}
S_0 &= h \sum_{j=0}^J \left| \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k \mu_k^2 e^{\mu_k t} (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}) \right|^2 \\
&= \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \mu_k^4 e^{2\mu_k t} |\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}|^2 \\
&\quad + \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_k| \neq |\mu_l| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k a_l \mu_k^2 \mu_l^2 e^{(\mu_k - \mu_l)t} (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}) (\varphi_{l,j+1} - \varphi_{l,j}).
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Da ortogonalidade dos autovetores  $\varphi_k$  e  $\varphi_l$ , para  $\mu_k \neq \mu_l$  temos:

$$\sum_{|\mu_k| \neq |\mu_l| \leq \sqrt{\Lambda}} (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}) (\varphi_{l,j+1} - \varphi_{l,j}) = 0. \tag{2.102}$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
h \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |u'_{j+1} - u'_j|^2 &= h \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \mu_k^4 e^{2\mu_k t} |\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}|^2 \\
&= h \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \mu_k^4 e^{2\mu_k t} \lambda_k h^2 |\varphi_{k,j}|^2.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Onde  $\lambda_k$  é um autovalor associado ao autovetor  $\varphi_k$ .

Daí temos:

$$\begin{aligned}
h \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |u'_{j+1} - u'_j|^2 &= h \sum_{j=0}^J \sum_{k \geq 1} |a_k|^2 \mu_k^4 e^{2\mu_k t} \lambda_k h^2 |\varphi_{k,j}|^2 \\
&= h \sum_{j=0}^J \sum_{k \geq 1} \mu_k^2 \lambda_k h^2 |a_k \mu_k e^{\mu_k t} \varphi_{k,j}|^2.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Tomando  $\Lambda$  suficientemente grande, de modo que  $\mu_k^2 \lambda_k \leq \Lambda$  obtemos:

$$h \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |u'_{j+1} - u'_j|^2 \leq \Lambda h^3 \sum_{j=1}^J |u'_j|^2. \tag{2.105}$$

■

**Lema 2.4.7** Para todo  $h > 0$ ,  $t \in (0, T)$  e  $u$  solução de (2.1) – (2.3), temos:

$$|\Theta_h(t)| \leq E_h(t) \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}}. \quad (2.106)$$

onde  $\lambda_1 > 0$  é o primeiro autovalor do Laplaciano discreto,  $\Lambda$  é o maior dos autovalores entre o desenvolvimento de Fourier e

$$\Theta_h(t) = h \sum_{j=1}^J u'_j \left[ j \left( \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} \right) - \frac{\Lambda h^2}{8} u_j \right]. \quad (2.107)$$

**Demonstração:**

Temos que

$$|\Theta_h(t)| = \left| h \sum_{j=1}^J u'_j \left[ j \left( \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} \right) - \frac{\Lambda h^2}{8} u_j \right] \right|. \quad (2.108)$$

Aplicando a desigualdade de Holder obtemos:

$$|\Theta_h(t)| \leq \left( h \sum_{j=1}^J |u'_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^J \left| \frac{j(u_{j+1} - u_{j-1})}{2} + \eta u_j \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.109)$$

onde  $\eta = -\frac{\Lambda h^2}{8}$ .

Por outro lado, fazendo

$$Q_0 = h \sum_{j=1}^J \left| \frac{j(u_{j+1} - u_{j-1})}{2} + \eta u_j \right|^2.$$

temos que:

$$\begin{aligned} Q_0 &= h \sum_{j=1}^J \left[ \frac{j^2}{4} |u_{j+1} - u_{j-1}|^2 + \eta j (u_{j+1} - u_{j-1}) u_j + \eta^2 u_j^2 \right]. \\ &= h \sum_{j=1}^J \left[ \frac{j^2}{4} |(u_{j+1} - u_j) + (u_j - u_{j-1})|^2 + \eta j (u_{j+1} - u_{j-1}) u_j + \eta^2 u_j^2 \right]. \\ &= h \sum_{j=1}^J \left[ \frac{j^2}{4} |(u_{j+1} - u_j)^2 + 2(u_{j+1} - u_j)(u_j - u_{j-1}) + (u_j - u_{j-1})^2| \right. \\ &\quad \left. + \eta j (u_{j+1} - u_{j-1}) u_j + \eta^2 u_j^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Aplicando a desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned}
Q_0 &\leq h \sum_{j=1}^J \left[ \frac{j^2}{4} |2(u_{j+1} - u_j)^2 + 2(u_j - u_{j-1})^2| + \eta j(u_{j+1} - u_{j-1})u_j + \eta^2 u_j^2 \right]. \\
&\leq h \sum_{j=1}^J \left[ \frac{j^2}{2} (u_{j+1} - u_j)^2 + \frac{j^2}{2} (u_j - u_{j-1})^2 + \eta j u_{j+1} u_j - \eta j u_{j-1} u_j + \eta^2 u_j^2 \right]. \\
&\leq h \sum_{j=1}^J \left[ \frac{j^2}{2} (u_{j+1} - u_j)^2 + \frac{j^2}{2} (u_j - u_{j-1})^2 + \eta^2 u_j^2 - \eta u_j u_{j+1} \right]. \\
&\leq h \sum_{j=1}^J \left[ \frac{j^2}{2} (u_{j+1} - u_j)^2 + \frac{(j+1)^2}{2} (u_{j+1} - u_j)^2 + \eta^2 u_j^2 - \eta u_j u_{j+1} \right].
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Usando o fato de que  $h^2 j^2 \leq h^2 (j+1)^2 \leq h^2 (J+1)^2 = L^2$  e  $h = \frac{L}{J+1}$ , segue que:

$$\begin{aligned}
Q_0 &\leq h \sum_{j=1}^J [(J+1)^2 (u_{j+1} - u_j)^2 + \eta^2 u_j^2 - \eta u_j u_{j+1} + |\eta| |u_j|^2 - |\eta| |u_j|^2]. \\
&\leq h L^2 \sum_{j=1}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 - |\eta| h \sum_{j=1}^J (u_j^2 - u_j u_{j+1}) + (\eta^2 + |\eta|) h \sum_{j=1}^J u_j^2. \\
&\leq h L^2 \sum_{j=1}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 - |\eta| h \sum_{j=1}^J \left( \frac{u_j^2}{2} + \frac{u_j^2}{2} - u_j u_{j+1} \right) + (\eta^2 + |\eta|) h \sum_{j=1}^J u_j^2. \\
&\leq \left( L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} \right) h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 + (\eta^2 + |\eta|) h \sum_{j=1}^J u_j^2.
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Usando a versão semi-discreta da desigualdade de Poincaré, obtemos:

$$Q_0 = h \sum_{j=1}^J \left| \frac{j(u_{j+1} - u_{j-1})}{2} + \eta u_j \right|^2 \leq \left( L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} + \frac{\eta^2 + |\eta|}{\lambda_1} \right) h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2. \tag{2.113}$$

Note que  $|\eta| = \frac{\Lambda h^2}{8} \leq \frac{1}{2}$ . Assim,

$$\eta^2 + |\eta| = \frac{\Lambda^2 h^4}{64} + \frac{\Lambda h^2}{8} = \frac{\Lambda h^2}{8} \left( \frac{\Lambda h^2}{8} + 1 \right) \leq \frac{3\Lambda h^2}{16}. \tag{2.114}$$

Portanto, temos que

$$h \sum_{j=1}^J \left| \frac{j(u_{j+1} - u_{j-1})}{2} + \eta u_j \right|^2 \leq \left( L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1} \right) h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2. \tag{2.115}$$

Logo,

$$|\Theta_h(t)| \leq \left( h \sum_{j=0}^J |u_j'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1} \right) h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.116}$$

Usando a desigualdade de Young obteremos:

$$|\Theta_h(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{|\eta|h^2}{2} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}} \left[ \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left( |u'_j|^2 + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right) \right]. \quad (2.117)$$

Pelo lema (2.4.1), temos:

$$|\Theta_h(t)| \leq E_h(t) \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}}. \quad (2.118)$$

■

**Teorema 2.4.8** *Considere  $0 < \beta < 4$ . Então existe  $T(\beta) \geq 2L$  tal que para todo  $T > T(\beta)$  existe uma constante positiva  $C(T, \beta)$ , de modo que, para  $h \rightarrow 0$ , vale:*

$$E_h(0) \leq C(T, \beta) \left[ \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt \right]. \quad (2.119)$$

onde  $k = 1, \dots, J$  e  $u$  é solução de (2.1) – (2.3) na classe de soluções  $S_h(\beta)$ . Além disso,

$$(i) \quad T(\beta) \nearrow \infty \quad \text{quando} \quad \beta \nearrow 4 \quad \text{e} \quad T(\beta) \searrow 2L \quad \text{quando} \quad \beta \searrow 0$$

$$(ii) \quad C(T, \beta) \searrow \frac{1}{T - 2L} \quad \text{quando} \quad \beta \searrow 0$$

### Demonstração:

Do lema (2.4.3), somando e subtraindo

$$\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T u_j'^2 dt.$$

obteremos:

$$\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[ u_j'^2 + \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 \right] dt + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T (u'_{j+1} u'_j - u_j'^2) dt + \chi_h(t) \Big|_0^T = \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.120)$$

Reescrevendo a ultima igualdade

$$TE_h(0) + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T (u'_{j+1} u'_j - u_j'^2) dt + \chi_h(t) \Big|_0^T = \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.121)$$

Das condições de contorno, segue que:

$$TE_h(0) - \frac{h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T (u'_{j+1} - u'_j)^2 dt + \chi_h(t) \Big|_0^T = \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.122)$$

Do lema (2.4.6):

$$TE_h(0) - \frac{\Lambda h^2 h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T u_j^2 dt + \chi_h(t) \Big|_0^T \leq \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.123)$$

Usando o corolário (2.4.5), obtemos :

$$TE_h(0) - \frac{\Lambda h^2}{4} \left( TE_h(0) + \frac{1}{2} \nu_h(t) \Big|_0^T \right) + \chi_h(t) \Big|_0^T \leq \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.124)$$

Podemos reescrever a equação anterior como:

$$T \left( 1 - \frac{\Lambda h^2}{4} \right) E_h(0) + \Theta_h(t) \Big|_0^T \leq \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.125)$$

onde  $\Theta_h(t) = \chi_h(t) - \frac{\Lambda h^2}{8} \nu_h(t)$ . Do lema (2.4.7), segue que:

$$T \left( 1 - \frac{\Lambda h^2}{4} \right) E_h(0) - 2E_h(0) \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}} \leq \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt. \quad (2.126)$$

Assim temos, para  $\Lambda h^2 = \beta$  e  $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{2L^2}$  na classe de soluções  $S_h(\beta)$  de (2.1) – (2.3) , teremos a seguinte desigualdade de observabilidade uniforme:

$$E_h(0) \leq C(T, \beta) \left[ \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt \right]. \quad (2.127)$$

onde

$$C(T, \beta) = \frac{1}{T \left( 1 - \frac{\beta}{4} \right) - 2 \sqrt{L^2 \left( 1 + \frac{3\beta}{8\pi^2} \right) - \frac{\beta h^2}{16}}}. \quad (2.128)$$

e

$$T(\beta) = 2 \left[ \frac{\sqrt{L^2 \left( 1 + \frac{3\beta}{8\pi^2} \right) - \frac{\beta h^2}{16}}}{1 - \frac{\beta}{4}} \right]. \quad (2.129)$$

■

Mostramos que o sistema (2.1) – (2.3) é observável para uma classe de soluções  $C_h(\beta)$  gerada pelos autovetores associados aos autovalores de (2.5) – (2.6), tais que  $\lambda h^2 \leq \beta$ . Mais precisamente:

$$C_h(\beta) := \left\{ u(t) = \sum_{\lambda_k(h) \leq \beta h^{-2}} \left[ a_k \sin(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) \right] \varphi^k, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.130)$$

Vimos, no primeiro Capítulo (Apresentação do Problema), que a dispersão para (2.1) – (2.3) aponta para o resultado obtido no Teorema (2.4.8). Então, é relevante conjecturar que, se conseguirmos um esquema numérico que retome a dispersão do modelo contínuo, poderemos obter a Observabilidade Uniforme para todas as soluções do sistema hiperbólico em estudo, isto é, sem a necessidade de filtrar as altas frequências. Nos próximos dois Capítulos deste trabalho, encontram-se nossos principais resultados referentes ao problema da dispersão no modelo espacialmente discretizado da equação de onda 1-D.



# Capítulo 3

## A função $\psi_h$ do Método NSFD

Neste capítulo mostraremos como obter a função  $\psi_h$ , que nos permite, no modelo semi-discreto, recuperar uma propriedade importante do ambiente contínuo: O *gap* constante entre autovalores consecutivos. Com esse resultado, resolvemos o problema da dispersão no ambiente espacialmente discretizado para o sistema hiperbólico em estudo.

Considere o seguinte esquema semi-discretizado NSFD .

$$u_j''(t) = v^2 \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{\psi_h}, \quad t \in (0, T), j = 0, \dots, J+1 \quad (3.1)$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, \quad t \in (0, T) \quad (3.2)$$

$$u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad j = 0, \dots, J+1 \quad (3.3)$$

Onde ' e '' denotam as derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente, em relação ao tempo e  $\psi_h$  nossa função *Nonstandard*. O sistema (3.1) – (3.3) possui  $J$  equações diferenciais lineares nas incógnitas  $u_1, \dots, u_J$ , pois, das condições de contorno,  $u_0 = u_{J+1} = 0$ . Além disso,  $u_j = u_j(t)$  é aproximação para  $u(x_j, t)$ , sendo  $u$  a solução no caso contínuo, desde que as condições iniciais  $u_j(0) = u_j^0$  e  $u_j'(0) = u_j^1$ ,  $j = 0, 1, \dots, J+1$  sejam aproximações dos dados iniciais do problema contínuo.

Introduzimos a malha:

$$x_0 = 0 < x_1 = h < x_2 = 2h < \dots < x_J = Jh < x_{J+1} = L.$$

$$\text{Com } x_j = jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J+1 \quad , \quad J \in \mathbb{N} \text{ e } h = \frac{L}{J+1}.$$

No sistema semi-discreto NSFD (3.1) – (3.3), a velocidade de propagação de ondas é  $v = 1$ , logo temos  $\omega = \gamma$  (ver observação (1), na página 24).

Para o esquema semi-discreto em Diferenças Finitas Usuais, isto é, com  $h^2$  no lugar de  $\psi_h$ , no sistema (3.1) – (3.3), devido às soluções espúrias à altas frequências, ocorre uma anomalia numérica na dispersão. Tal anomalia é devida ao *gap* (distância) entre os autovalores consecutivos, que tende a zero quando  $h$  tende a zero, como mostraremos oportunamente.

Note que o sistema de autovetores e autovalores é dado por:

$$-\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} = \lambda\varphi_j, \quad j = 1, \dots, J. \quad (3.4)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{J+1} = 0. \quad (3.5)$$

Os autovetores e autovalores de (3.4) – (3.5) são, respectivamente:

$$\lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k\pi h}{2L} \right), \quad j = 1, \dots, J. \quad (3.6)$$

$$\varphi^k = \varphi_j^k = \sin \left( \frac{j\pi h k}{L} \right), \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, J. \quad (3.7)$$

Em particular os autovetores coincidem com as autofunções  $\sin \left( \frac{k\pi x}{L} \right)$  do contínuo, pois  $x_j = jh$ . Por outro lado, para  $k$  fixado,

$$\lambda_k(h) \longrightarrow \frac{\pi^2 k^2}{L^2}, \quad h \longrightarrow 0. \quad (3.8)$$

o qual é o  $k$ -ésimo autovalor do sistema contínuo. Assim, para o modelo contínuo, temos:

$$\sqrt{\lambda_{k+1}} - \sqrt{\lambda_k} = \frac{(k+1)\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{\pi}{L}, \quad (3.9)$$

ou seja, o *gap* entre autovalores consecutivos no modelo contínuo é constante, não depende da frequência.

No entanto, para o ambiente semi-discreto, o *gap* entre autovalores consecutivos é da ordem de  $h$ , onde temos:

$$\frac{\pi^2}{2L^2} h(j+1) \geq \sqrt{\lambda_{k+1}(h)} - \sqrt{\lambda_k(h)} \geq \left[ \frac{\pi}{L} - O(h) \right] \cos \left( \frac{\pi h k}{2L} \right) - \frac{\pi^2 h}{2L^2}. \quad (3.10)$$

### Demonstração:

De fato,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{k+1}(h)} - \sqrt{\lambda_k(h)} &= \frac{2}{h} \left[ \sin \left( \frac{\pi h(k+1)}{2L} \right) - \sin \left( \frac{\pi h k}{2L} \right) \right]. \\ &= \frac{2}{h} \left[ \sin \left( \frac{\pi h k}{2L} \right) \left( \cos \left( \frac{\pi h}{2L} \right) - 1 \right) + \sin \left( \frac{\pi h}{2L} \right) \cos \left( \frac{\pi h k}{2L} \right) \right]. \\ &\leq \frac{2}{h} \left| 1 - \cos \left( \frac{\pi h}{2L} \right) \right| + \frac{\pi}{L} \cos \left( \frac{\pi h k}{2L} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como  $L = h(J+1)$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \cos \left( \frac{\pi h k}{2L} \right) &= \cos \left( \frac{\pi}{h} + \frac{(k - (J+1))h\pi}{2L} \right). \\ &= \sin \left( \frac{((J+1) - k)h\pi}{2L} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Além disso, temos que:

$$\frac{2}{h} \left| 1 - \cos \left( \frac{\pi h}{2L} \right) \right| \leq \frac{\pi^2 h}{2L^2}. \quad (3.13)$$

Então, deduzimos:

$$\sqrt{\lambda_{k+1}(h)} - \sqrt{\lambda_k(h)} \leq \frac{\pi^2 h}{2L^2} + \frac{\pi}{L} \sin\left(\frac{((J+1)-k)h\pi}{2L}\right). \quad (3.14)$$

Desde que

$$J+1-k \leq j \iff k \geq J+1-j. \quad (3.15)$$

para algum  $j \in \mathbb{N}$  temos:

$$\sqrt{\lambda_{k+1}(h)} - \sqrt{\lambda_k(h)} \leq \frac{\pi^2 h}{2L^2} + \frac{\pi^2 j h}{2L^2} = \frac{\pi^2}{2L^2} h(j+1). \quad (3.16)$$

Isso mostra que o *gap* entre as raízes de quaisquer dois autovalores consecutivos, no modelo semi-discreto usual, é da ordem de  $h$  com um fator multiplicativo que cresce quando  $j$  cresce.

Por outro lado, mostra-se que o *gap* permanece limitado inferiormente pelos baixos autovalores. Isto é,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{k+1}(h)} - \sqrt{\lambda_k(h)} &\geq \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\pi h}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi h k}{2L}\right) - \frac{\pi^2 h}{2L^2} \\ &= \left(\frac{\pi}{L} - O(h)\right) \cos\left(\frac{\pi h k}{2L}\right) - \frac{\pi^2 h}{2L^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

O lado direito da inequação (3.17) converge para  $\frac{\pi}{L}$  (o *gap* do contínuo) quando  $h$  tende a zero e  $k$  permanece limitado, ou se  $k$  não é limitado mas  $hk \rightarrow 0$ .

Portanto, de (3.16) e de (3.17), segue o resultado. ■

Ou seja, no modelo semi-discreto em Diferenças Finitas Usuais, o *gap* entre os autovalores consecutivos depende de  $h$ . Isso causa anomalia numérica na dispersão. Assim, a medida que a frequência aumenta,  $h$  tende a zero e, conseqüentemente, a distância entre os autovalores do modelo semi-discreto torna-se menor, perdendo a propriedade constante do modelo contínuo. Para recuperar a propriedade (3.9) do contínuo no ambiente espacialmente discretizado, faremos uso de um esquema NSFD com a seguinte função  $\psi_h$  dada por:

$$\psi_h = \frac{4}{\gamma^2} \sin^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right), \quad \gamma = \gamma_k = \frac{k\pi}{L}. \quad (3.18)$$

Note que, fixado  $k$  em (3.18), temos:

$$\frac{4}{\gamma^2} \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad h \rightarrow 0.$$

Agora mostraremos como obtivemos a função  $\psi_h$ .

Considere  $u_j = e^{i(\gamma x_j + \omega t)}$ , solução do sistema semi-discreto (3.1) – (3.3).

A equação (3.1), com  $v = 1$  é dada por:

$$u_j'' - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\psi_h} = 0. \quad (3.19)$$

Temos que:

$$u_j' = i\omega e^{i(\gamma x_j + \omega t)}, \quad u_j'' = -\omega^2 e^{i(\gamma x_j + \omega t)} = -\omega^2 u_j, \quad u_{j\pm 1} = e^{\pm i\gamma h} u_j. \quad (3.20)$$

Então, podemos reescrever a equação (3.19) como:

$$\left( -\omega^2 - \frac{(e^{i\gamma h} - 2 + e^{-i\gamma h})}{\psi_h} \right) u_j = 0. \quad (3.21)$$

Desde que  $u_j \neq 0$ , devemos ter

$$-\omega^2 = \frac{(e^{i\gamma h} - 2 + e^{-i\gamma h})}{\psi_h}. \quad (3.22)$$

Como  $e^{\pm i\gamma h} = \cos(\gamma h) \pm i \sin(\gamma h)$ , reescrevemos (3.22) como:

$$-\omega^2 \psi_h = 2(\cos(\gamma h) - 1) = -4 \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right). \quad (3.23)$$

Assim, temos

$$\omega^2 = \frac{4}{\psi_h} \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right). \quad (3.24)$$

Mas estamos tomando a velocidade de propagação de ondas  $v = 1$ , isto acarreta que  $\omega = \gamma$ .

Então podemos escrever (3.24) como:

$$\psi_h = \frac{4}{\gamma^2} \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right). \quad (3.25)$$

Para esta escolha de  $\psi_h$ , nosso esquema NSFD recupera o *gap* constante do modelo contínuo, como mostraremos na Proposição (3.0.1).

**Proposição 3.0.1** Para  $\psi_h = \frac{4}{\gamma^2} \sin^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right)$ ,  $\gamma = \gamma_k = \frac{k\pi}{L}$ , o gap entre os autovalores consecutivos no ambiente semi-discreto *NSFD* para a equação de onda 1-D do sistema (3.1) – (3.3), não depende de  $h$ , recuperando a propriedade constante do contínuo.

**Demonstração:**

De fato, para  $k = 1, 2, \dots, J$ , temos:

$$\lambda_k(h) = \frac{4}{\psi_h} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) = \frac{4}{\frac{4}{\gamma^2} \sin^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right)} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) = \gamma^2. \quad (3.26)$$

Desde que  $\gamma = \gamma_k = \frac{k\pi}{L}$ , concluímos que:

$$\lambda_k(h) = \frac{k^2\pi^2}{L^2}. \quad (3.27)$$

Consequentemente, o gap entre autovalores consecutivos no ambiente semi-discreto *NSFD* é constante, pois temos:

$$\sqrt{\lambda_{k+1}(h)} - \sqrt{\lambda_k(h)} = \frac{(k+1)\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{\pi}{L}. \quad (3.28)$$

Portanto, recuperamos a propriedade do contínuo no ambiente semi-discreto. ■

A Análise de Dispersão tem papel importante na investigação da Observabilidade das soluções do sistema em estudo, pois ela nos dá um indicativo de que podemos obter ou não a Observabilidade Uniforme das soluções. Para o problema estudado por **Infante e Zuazua** [4], foi provada a Observabilidade limitada à uma classe de soluções para as baixas frequências, uma vez que o método Usual de Diferenças Finitas apresenta soluções espúrias à altas frequências, como indicado em sua dispersão.

Com o resultado da Proposição (3.0.1), a dispersão do modelo semi-discreto *NSFD* coincide com a do contínuo, sanando a patologia numérica que ocorre na dispersão com Diferenças Finitas Usuais. O método *NSFD* apresentado neste trabalho elimina o problema da dispersão do modelo numérico usual e nos dá forte indicativo de que podemos mostrar a Observabilidade Uniforme para todas as soluções do sistema em estudo.

# Capítulo 4

## Análise de Dispersão

Neste Capítulo faremos Análise de Dispersão no ambiente contínuo e numérico. Além disso, vamos comparar os métodos de Diferenças Finitas Usuais e  $\theta$ - Esquema Usual com os métodos NSFD e  $\theta - NSFD$  para a dispersão do problema em estudo.

## 4.1 Análise de Dispersão: Ambiente Contínuo

Neste trabalho, o sistema hiperbólico investigado no ambiente contínuo é dado por:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad 0 < t < T \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 < x < L \quad (4.3)$$

o qual admite uma única solução  $u = u(x, t) \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$  quando  $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ .

Em nossas análises, a equação de ondas no ambiente contínuo é:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0.$$

Onde estamos tomando  $v = \omega/\gamma = 1$ . Logo, no caso contínuo investigado, temos  $\omega = \gamma$ . O gráfico da Figura (4.1) explicita a condição Física  $v = 1$  na dispersão do modelo contínuo:

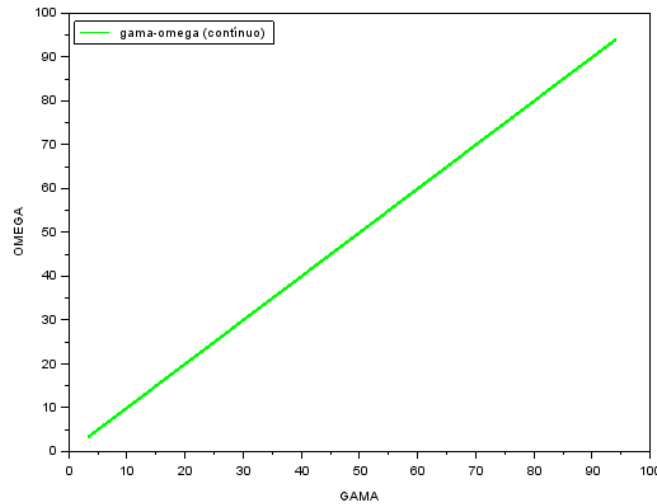


Figura 4.1: Gráfico da dispersão para  $\omega = \gamma$  no ambiente contínuo

Vimos, no terceiro Capítulo, que o *gap* entre dois autovalores consecutivos, no ambiente contínuo, é constante. Isto é:

$$\sqrt{\lambda_{k+1}} - \sqrt{\lambda_k} = \frac{(k+1)\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{\pi}{L}. \quad (4.4)$$

Porém, para o método de Diferenças Finitas Usuais o *gap* entre autovalores consecutivos é da ordem de  $h$ . Isso causa uma anomalia numérica na dispersão como veremos a seguir.



## 4.2 Análise de Dispersão: Diferenças Finitas Usuais

Diferente do que ocorre na dispersão do ambiente contínuo, onde temos  $\omega = \gamma$ , no esquema semi-discreto em Diferenças Finitas Usuais temos  $\omega \neq \gamma$ . Mais precisamente:

$$\omega = \pm \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right) \neq \gamma. \quad (4.5)$$

### Demonstração:

De fato, para  $u_j = e^{i(\gamma x_j + \omega t)}$ , solução não trivial de:

$$u_j'' - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = 0. \quad (4.6)$$

E como temos:

$$\begin{aligned} u_j &= e^{i(\gamma x_j + \omega t)}, \\ u_j'' &= -\omega^2 u_j, \\ x_j &\approx jh, \\ x_{j\pm 1} &\approx (j \pm 1)h = jh \pm h = x_j \pm h, \\ u_{j\pm 1} &= e^{\pm i\gamma h} u_j. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Segue de (4.7) que podemos escrever (4.6) como:

$$-\omega^2 u_j - \frac{e^{i\gamma h} u_j - 2u_j + e^{-i\gamma h} u_j}{h^2} = 0 \implies \left( -\omega^2 - \frac{(e^{i\gamma h} - 2 + e^{-i\gamma h})}{h^2} \right) u_j = 0. \quad (4.8)$$

Como  $u_j \neq 0$ , então devemos ter:

$$-\omega^2 = \frac{(e^{i\gamma h} - 2 + e^{-i\gamma h})}{h^2} \implies -\omega^2 h^2 = 2(\cos(\gamma h) - 1).$$

Como

$$\cos(\gamma h) = 2 \cos^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right) - 1.$$

Então

$$\omega^2 h^2 = 4 \sin^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right) \implies \omega = \pm \frac{2}{h} \sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right). \quad (4.9)$$

■

Observe que, fixado  $\gamma$ , temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{h} \sin \left( \frac{\gamma h}{2} \right) \right] = \gamma.$$

Assim, espera-se que o gráfico da dispersão para o ambiente semi-discreto para Diferenças Finitas Usuais seja semelhante ao do contínuo para  $h$  suficientemente pequeno. Contudo, devido ao *gap* não constante do referido método, temos uma anomalia numérica, a qual podemos observar no gráfico da Figura (4.2), onde plotamos a reta do contínuo e a curva do método de Diferenças Finitas Usuais.

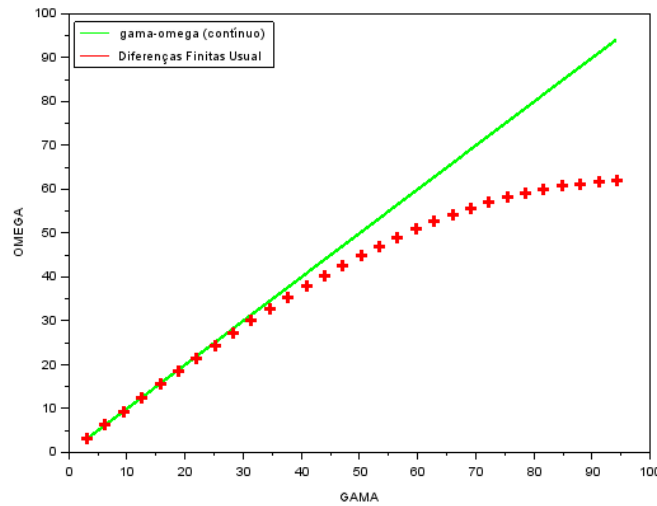


Figura 4.2: **Comparativo entre a dispersão do modelo contínuo e a do ambiente semi-discreto com Diferenças Finitas Usuais**

Para baixas frequências os gráficos são semelhantes, porém à altas frequências ocorre um distanciamento entre os gráficos o do contínuo e do semi-discreto. Tal anomalia numérica é devida a proximidade entre os autovalores consecutivos que tende a zero a medida que  $h$  tende a zero, como mostrado no terceiro Capítulo, ou seja:

$$\frac{\pi^2}{2L^2} h(j+1) \geq \sqrt{\lambda_{k+1}(h)} - \sqrt{\lambda_k(h)} \geq \left[ \frac{\pi}{L} - O(h) \right] \cos \left( \frac{\pi h k}{2L} \right) - \frac{\pi^2 h}{2L^2}. \quad (4.10)$$

Portanto, o *gap* entre os autovalores consecutivos depende de  $h$ . Isso causa anomalia numérica na dispersão. Esse problema não ocorre quando usamos o método *NSFD* com nossa função  $\psi_h$ , como mostraremos a seguir.

### 4.3 Análise de Dispersão: Modelo *NSFD*

Para recuperar a propriedade (4.4) do contínuo no ambiente espacialmente discretizado, faremos uso do esquema *NSFD* com a seguinte função  $\psi_h$ , deduzida no terceiro Capítulo:

$$\psi_h = \frac{4}{\gamma^2} \sin^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right), \quad \gamma = \gamma_k = \frac{k\pi}{L}, \quad k = 1, \dots, J. \quad (4.11)$$

Para essa escolha de  $\psi_h$ , temos:

$$u_j'' - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\psi_h} = 0. \quad (4.12)$$

Com

$$\omega = \omega_h(\gamma) = \pm \frac{2}{\sqrt{\psi_h}} \sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right). \quad (4.13)$$

#### Demonstração:

De fato, de (4.7) e de (4.12), podemos escrever:

$$\left(-\omega^2 - \frac{(e^{i\gamma h} - 2 + e^{-i\gamma h})}{\psi_h}\right) u_j = 0. \quad (4.14)$$

Como  $u_j \neq 0$ , então devemos ter:

$$-\omega^2 = \frac{(e^{i\gamma h} - 2 + e^{-i\gamma h})}{\psi_h} \implies -\omega^2 \psi_h = 2(\cos(\gamma h) - 1).$$

Usando a seguinte identidade:

$$\cos(\gamma h) = 2 \cos^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right) - 1.$$

Segue que

$$-\omega^2 \psi_h = -4 \sin^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right). \quad (4.15)$$

Portanto

$$\omega = \pm \frac{2}{\sqrt{\psi_h}} \sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right). \quad (4.16)$$

■

Para o modelo semi-discreto *NSFD*, diferente do que ocorre no esquema com Diferenças Finitas Usuais, temos a seguinte igualdade:

$$\omega = \pm\gamma$$

### Demonstração:

De fato:

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\psi_h}} \sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right). \quad (4.17)$$

Desde que

$$\sqrt{\psi_h} = \pm \frac{2}{\gamma} \sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right).$$

Segue que

$$\omega = \pm \frac{2 \sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right)}{\frac{2}{\gamma} \sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right)} = \pm\gamma. \quad (4.18)$$

■

Esse resultado nos permite recuperar a dispersão do contínuo no ambiente semi-discreto *NSFD*.

Na Figura (4.3) podemos verificar que o gráfico da dispersão *NSFD* e do contínuo coincidem.

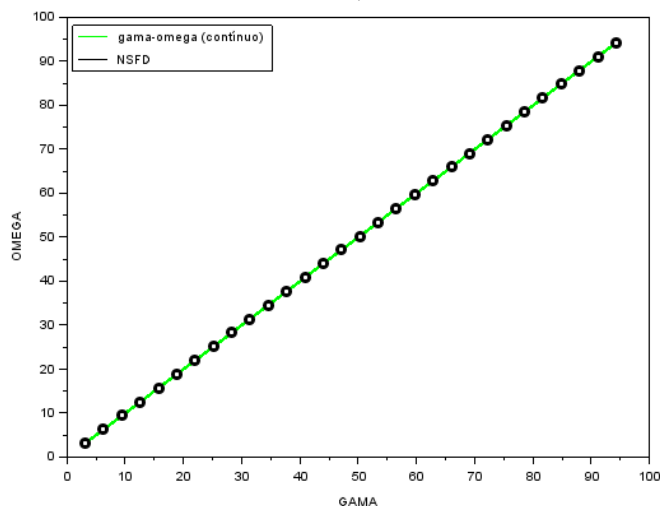


Figura 4.3: Dispersão do modelo contínuo e *NSFD*

Na Figura (4.4) plotamos os gráficos da dispersão nos modelos do contínuo, *NSFD* e Diferenças Finitas Usuais.

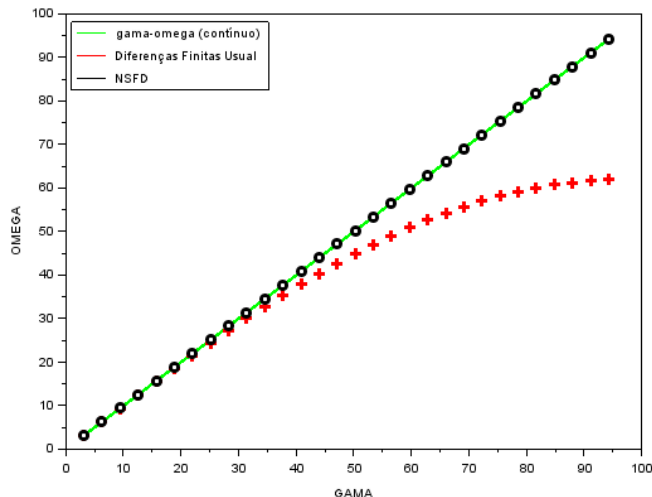


Figura 4.4: Comparativo entre Diferenças Finitas Usuais e *NSFD*

Ou seja, a dispersão com o método *NSFD* utilizando a função  $\psi_h$  coincide com a dispersão do modelo contínuo. Isso não só elimina o problema da dispersão, que ocorre no modelo usual, como é um forte indicador de que se pode mostrar a Observabilidade Uniforme para todas as soluções do sistema hiperbólico em estudo. Portanto, conseguimos alcançar o objetivo proposto neste trabalho.

Com o objetivo de melhor explicitar nossos resultados acerca da dispersão, vamos compara as estruturas  $\theta$ -esquema Usual e  $\theta$ -esquema *NSFD*, adaptado para o nosso problema.

## 4.4 Análise de Dispersão: Modelo $\theta$ -esquema Usual

Para o número real  $\theta \in [0, 1/4]$ , o modelo  $\theta$ -esquema Usual é dado por:

$$\theta(u''_{j+1} + u''_{j-1}) + (1 - 2\theta)u''_j - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = 0. \quad (4.19)$$

Note que para  $\theta = 0$  retornamos ao caso de Diferenças Finitas Usuais analisado anteriormente.

Substituindo (4.7) em (4.19), temos:

$$\theta(-\omega^2 u_{j+1} - \omega^2 u_{j-1}) - \omega^2(1 - 2\theta)u_j - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = 0. \quad (4.20)$$

$$\theta(-\omega^2 e^{i\gamma h} u_j - \omega^2 e^{-i\gamma h} u_j) - \omega^2(1 - 2\theta)u_j - \frac{e^{i\gamma h} u_j - 2u_j + e^{-i\gamma h} u_j}{h^2} = 0. \quad (4.21)$$

$$-\omega^2 \theta(e^{i\gamma h} + e^{-i\gamma h})u_j - \omega^2(1 - 2\theta)u_j - \left( \frac{e^{i\gamma h} + e^{-i\gamma h} - 2}{h^2} \right) u_j = 0. \quad (4.22)$$

Podemos reescrever a ultima igualdade como:

$$\left[ -\omega^2 (2\theta \cos(\gamma h) + 1 - 2\theta) - \left( \frac{2 \cos(\gamma h) - 2}{h^2} \right) \right] u_j = 0. \quad (4.23)$$

Desde que  $u_j \neq 0$ , temos

$$-\omega^2 (2\theta \cos(\gamma h) + 1 - 2\theta) - \left( \frac{2 \cos(\gamma h) - 2}{h^2} \right) = 0. \quad (4.24)$$

Usaremos a seguinte identidade:

$$\cos(\gamma h) = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right).$$

Assim, segue de (4.24):

$$-\omega^2 \left( -4\theta \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) + 1 \right) - \left( \frac{-4 \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right)}{h^2} \right) = 0. \quad (4.25)$$

Note que podemos escrever

$$1 = \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) + \cos^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right). \quad (4.26)$$

Aplicando (4.26) em (4.25) e fazendo simplificações, obtemos:

$$\omega^2 \left( (-4\theta + 1) \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) + \cos^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) \right) = \frac{4 \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right)}{h^2}. \quad (4.27)$$

Portanto, a dispersão no modelo  $\theta$ -esquema Usual é dada pela igualdade (4.28).

$$\omega = \pm \frac{2}{h} \left[ \frac{\sin \left( \frac{\gamma h}{2} \right)}{\sqrt{(1 - 4\theta) \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) + \cos^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right)}} \right]. \quad (4.28)$$

## 4.5 Análise de Dispersão: Modelo $\theta$ -esquema *NSFD*

Adaptando o modelo  $\theta$ -esquema para o nosso modelo *NSFD*, temos:

$$\theta(u''_{j+1} + u''_{j-1}) + (1 - 2\theta)u''_j - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\psi_h} = 0. \quad (4.29)$$

Note que para  $\theta = 0$  retornamos ao caso *NSFD* analisado anteriormente.

Procedendo de maneira análoga ao caso  $\theta$ -esquema Usual, segue:

$$\theta(u''_{j+1} + u''_{j-1}) + (1 - 2\theta)u''_j - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\psi_h} = 0. \quad (4.30)$$

$$\left[ -\omega^2 (2\theta \cos(\gamma h) + 1 - 2\theta) - \left( \frac{2 \cos(\gamma h) - 2}{\psi_h} \right) \right] u_j = 0. \quad (4.31)$$

Como  $u_j \neq 0$  temos:

$$-\omega^2 (2\theta \cos(\gamma h) + 1 - 2\theta) - \left( \frac{2 \cos(\gamma h) - 2}{\psi_h} \right) = 0. \quad (4.32)$$

Usaremos a seguinte identidade:

$$\cos(\gamma h) = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right).$$

Segue que:

$$-\omega^2 \left( -4\theta \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) + 1 \right) - \left( \frac{-4 \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right)}{\psi_h} \right) = 0. \quad (4.33)$$

Fazendo simplificações, obtemos:

$$\omega^2 \left( (-4\theta + 1) \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) + \cos^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) \right) = \frac{4 \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right)}{\psi_h}. \quad (4.34)$$

$$\omega = \pm \frac{2}{\sqrt{\psi_h}} \left[ \frac{\sin \left( \frac{\gamma h}{2} \right)}{\sqrt{(1 - 4\theta) \sin^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right) + \cos^2 \left( \frac{\gamma h}{2} \right)}} \right]. \quad (4.35)$$

A dispersão no modelo  $\theta$ -esquema *NSFD* é dada pela igualdade (4.35).

A seguir faremos um comparativo entre os métodos  $\theta$ -esquema Usual e o *NSFD*.

## 4.6 Comparativo entre os modelos $\theta$ -esquema Usual e $\theta$ -esquema *NSFD*

Temos para os modelos  $\theta$ -esquema Usual e  $\theta$ -esquema *NSFD* respectivamente:

$$\omega = \pm \frac{2}{h} \frac{\sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right)}{\sqrt{(1-4\theta)\sin^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right)}}. \quad (4.36)$$

$$\omega = \pm \frac{2}{\sqrt{\psi h}} \frac{\sin\left(\frac{\gamma h}{2}\right)}{\sqrt{(1-4\theta)\sin^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right)}}. \quad (4.37)$$

Na Figura (4.5) temos plotados os gráficos da dispersão do contínuo,  $\theta$ -esquema Usual e  $\theta$ -esquema *NSFD* para  $\theta = 1/5$ . Note que a dispersão do modelo  $\theta$ -esquema Usual permanece acima da dispersão do modelo contínuo e a dispersão  $\theta$ -esquema *NSFD* acima da  $\theta$ -esquema Usual.

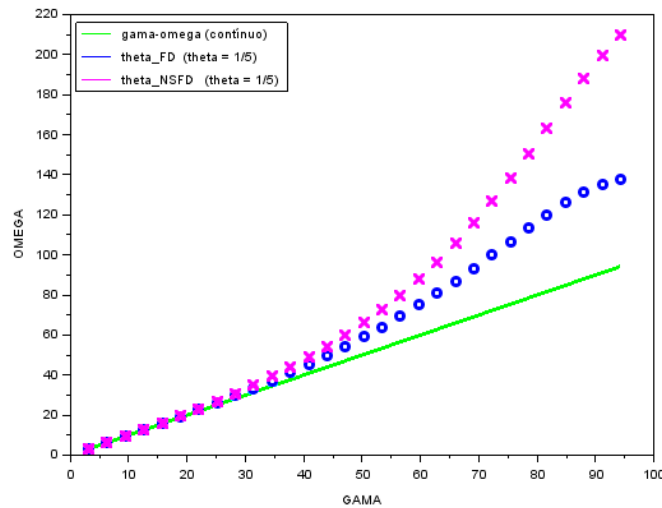


Figura 4.5: Gráfico para  $\theta = 1/5$

Agora, para  $\theta = 1/10$ , a dispersão do modelo  $\theta$ -esquema Usual passa a ficar abaixo da dispersão do contínuo, ao passo que a dispersão  $\theta$ -esquema *NSFD* permanece acima da dispersão do contínuo, como mostra a Figura (4.6).



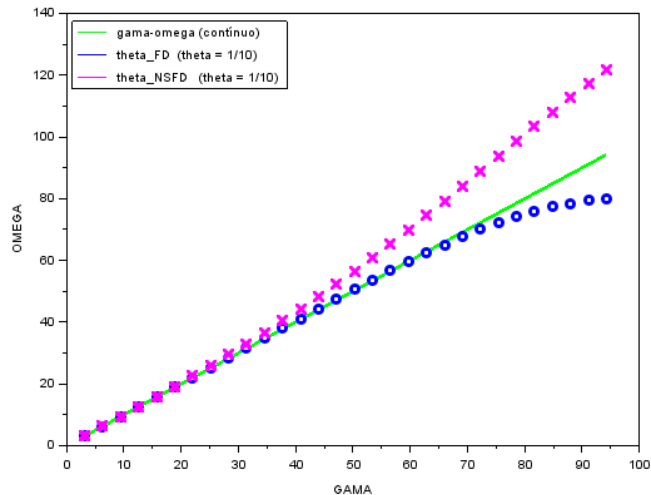


Figura 4.6: Gráfico para  $\theta = 1/10$

Como esperado, a medida que  $\theta$  tende a zero, a dispersão do modelo  $\theta$ -esquema Usual tende à dispersão do modelo semi-discreto em Diferenças Finitas Usuais, enquanto que a dispersão do modelo  $\theta$ -esquema *NSFD* tende à do modelo semi-discreto *NSFD*, que coincide com a do ambiente contínuo. Para ver isso graficamente veja a figura (4.7), onde usamos  $\theta = 1/50$ .

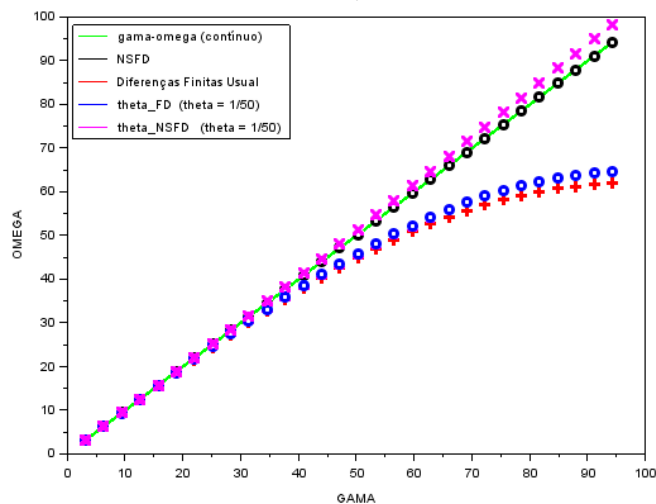


Figura 4.7: Gráfico para Diferenças Finitas Usuais, *NSFD*,  $\theta$ -esquema Usual,  $\theta$ -esquema *NSFD*,  $\theta = 1/50$

A seguir, seguem as conclusões do presente trabalho, bem como as perspectivas para futuras investigações.

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho usamos o método numérico *NSFD*, no qual aplicamos uma função que nos permitiu sanar a anomalia numérica da dispersão do ambiente semi-discreto. Ao recuperar a dispersão do modelo contínuo, obtivemos um indicador de que pode-se mostrar a Observabilidade Uniforme para todas as soluções do sistema investigado. Para trabalhos futuros pretendemos analisar a Observabilidade do problema estudado; adaptar o método aqui implementado para o modelo com Elementos Finitos; analisar a Observabilidade para malha de passo não constante no ambiente semi-discreto; investigar o modelo totalmente discretizado da Equação de Onda.

# Referências Bibliográficas

- [1] D.G.Figueiredo, **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, 4<sup>o</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA , 2014
- [2] E. Isaacson and H.B. Keller, **Analysis of Numerical Methods**, John Wiley & Sons , 1966
- [3] J.A.Cuminato; M.M.Junior, **Discretização de Funções Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas**, 1<sup>o</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM , 2013
- [4] J.A. Infante and E. Zuazua, **Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation**, Math. Model. Num. An. 33(1999), 407-438
- [5] J.L. Lions, **Contrôlabilité exacte, stabilization et perturbations de systèmes distribués**. Tome 1. Contrôlabilité exacte, Masson, RMA8, 1988
- [6] L. Huang and S. Voronin, **Derivation of Nonstandard Finite Difference Schemes of Differential Equations**, Department of Applied Mathematics, University of Colorado Boulder. May 14, 2016.
- [7] M.C. Cunha, **Métodos Numéricos**, Campinas, SP. Editora da Unicamp, 2<sup>o</sup>ed. 2000.
- [8] M.V. Iório., **EDP, Um Curso de Graduação**, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 4<sup>o</sup>ed. Rio de Janeiro, 2006.
- [9] P. M. Manning and G. F. Margrave, **Introduction to Non- standard Finite-difference Modeling**, CREWES Research Report, 2006, pp 1-10.
- [10] R.E. Mickens, **Exact solutions to a finite difference model of a nonlinear reaction-advection equation: Implications for numerical analysis**, Numer. Methods Partial Diff. Eq. 5, 313-325 (1989)

- 
- [11] R.E. Mickens, **Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations**, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1994.
- [12] R.E. Mickens, **Nonstandard finite difference for reaction-diffusion equations**, Numer. Methods Partial Diff. Eq. 15, 201-214 (1999)
- [13] R.E. Mickens, **Aplication of Nonstandard Finite Difference Schame** , World Scientific, Singapore, 2000
- [14] R.E. Mickens, **A Nonstandard Finite Difference Scheme for a Fisher PDE Having Nonlinear Diffusion**, PERGAMON, Computers and Mathematics with Applications. 45, 429-436 (2003)