Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Dissertação de Mestrado

Solução ground state para sistemas acoplados de equações de Schrödinger em $\mathbb{R}^N$

Diego Fernando Coentro Ferreira

Belém - PA

2018

Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Diego Fernando Coentro Ferreira

Solução ground state para sistemas acoplados de equações de Schrödinger em $\mathbb{R}^N$

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento

Belém - PA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383s Ferreira, Diego Fernando Coentro
Solução ground state para sistemas acoplados de equações de Schödinger em R^N / Diego Fernando Coentro Ferreira. — 2018
105 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Rúbia Gonçalves Nascimento

1. Solução ground state . 2. Sistema acoplado. 3. Variedade de Nehari. 4. Imersões de Sobolev. I. Nascimento, Rúbia Gonçalves, *orient.* II. Título

---

CDD 515.353

Diego Fernando Coentro Ferreira

Solução ground state para sistemas acoplados de equações de Schrödinger em $\mathbb{R}^N$

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof^a. Dr^a. Rúbia Gonçalves Nascimento - Orientadora (PPGME/PDM/UFPA)

Augusto César dos R. Costa

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa - Membro Interno (PPGME/PDM/UFPA)

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos - Membro externo (FACMAT/UFPA)

Data de Defesa: 18 de Setembro de 2018

Resultado: APROVADO

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que em meio a todas as lutas e dificuldades me permitiu chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, Edson e Lourdes, por todo apoio, amor, dedicação e, acima de tudo, por sempre acreditarem em mim.

Agradeço também a Professora Rúbia pela orientação e aos professores Gelson Conceição e Augusto César por aceitarem participar da banca.

Ao meus amigos de turma, parceiros de estudos em véspera de prova.

E agradeço ao CNPQ, pelo auxílio financeiro que tornou tudo isso possível.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estabelecer resultados de existência e não existência de solução para a seguinte classe de sistemas acoplados envolvendo equações de Schrödinger não-lineares

$$(S_\mu)\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{q-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $N \geqslant 3, 2 < p \leqslant q \leqslant 2^*$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Seguindo os passos de J.C.A. Melo Junior. [23], solucionaremos os problemas utilizando argumentos dos métodos de Minimização baseado na variedade de Nehari para os casos de existência e utilizaremos a identidade de Pohozaev no caso de não existência de solução.

Palavras-chave: Solução ground state, Sistema acoplado, Variedade de Nehari, Imersões de Sobolev.

Abstract

The objective of this work is to establish the existence and non-existence of a solution for the following class of coupled systems involving non-linear Schrödinger equations

$$(S_\mu)\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{q-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where $N \geqslant 3, 2 < p \leqslant q \leqslant 2^*$ and $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ is the critical exponent of Sobolev.

Following in the ffotsteps of J.C.A. Melo Junior. [23], we will solve the problems using arguments of methods of minimization based on the Nehari Manifold for the cases of existence and we will use Pohozaev identity in case of no solution.

Key words: Ground state solution, Coupled system, Nehari Manifold, Sobolev embedding.

Sumário

Introdução

O interesse deste trabalho é estabelecer resultados de existência e não existência de solução para a seguinte classe de sistemas acoplados envolvendo equações de Schrödinger não-lineares do tipo

$$(S_\mu)\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{q-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $N \geqslant 3, 2 < p \leqslant q \leqslant 2^*$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. Um dos principais resultados é provar a existência de solução ground state para o caso subcrítico, ou seja, quando, $2 < p \leqslant q < 2^*$ e para o caso crítico, quando, $2 < p < q = 2^*$. No caso crítico a existência de solução ground state está relacionada com o parametro μ introduzido na primeira equação do sistema (S_μ).

Estudaremos duas classes de potenciais não-negativos: periódico e assintóticamente periódico. A prova dos resultados apresentados serão via métodos de minimização baseado na variedade de Nehari. Para o caso crítico, quando, $p = q = 2^*$, será utilizado a identidade de Pohozaev para provar que o sistema (S_μ) não admite solução positiva.

Além disso, estudaremos a existência de solução ground state para a seguinte classe de sistemas acoplados.

$$(\hat{S}_\mu)\begin{cases} -\Delta u + \hat{V}_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \hat{\lambda}(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \hat{V}_2(x)v = |v|^{q-2}v + \hat{\lambda}(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde os potenciais $\hat{V}_1(x)$, $\hat{V}_2(x)$ e $\hat{\lambda}(x)$ são assintóticamente periódicos, isto é, são limites infinitos das funções periódicas $V_1(x)$, $V_2(x)$ e $\lambda(x)$.

Esta dissertação é um estudo de J.C.A. Melo Junior [23], onde o autor trata da existência de solução ground state para a seguinte classe de sistemas acoplados

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = f_1(x,u) + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = f_2(x,v) + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde os potenciais $V_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $V_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são não negativos e estão relacionados com o termo de acoplamento $\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por $|\lambda(x)| < \delta\sqrt{V_1(x)V_2(x)}$ para algum $\delta \in (0,1)$.

O estudo de soluções ground state para sistemas acoplados fez grandes progressos e atraiu a atenção de muitos autores por seu grande interesse físico. As soluções do sistema (0.1) estão relacionadas com as ondas estacionárias do sistema a seguir.

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi - V_1(x)\psi + f_1(x,\psi) + \lambda(x)\phi, & x \in \mathbb{R}^N, t \geqslant 0 \\ -i\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \Delta\phi - V_2(x)\phi + f_2(x,\phi) + \lambda(x)\psi, & x \in \mathbb{R}^N, t \geqslant 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

onde i denota a unidade imaginária. Essa classe de sistema surge em vários ramos da física matemática e tópicos não-lineares, e pode descrever diferentes fenômenos físicos, como condensados de Bose-Einsten, mistura de Bose-Ferni, propagação em fibras ópticas birefrigentes e meios fotorefrativos do tipo Kerr, ver [2,12,16,24,26] e suas referências. Para o sistema (0.2), uma solução da forma $(\psi(x,t),\phi(x,t)) = (exp(-iEt)u(x), exp(-iEt)v(x))$, onde E é uma constante real, é chamada de solução de onda estacionária.

Podemos notar que para o caso $\lambda \equiv 0$, $V_1 \equiv V_2 \equiv V$, $f_1 \equiv f_2 \equiv f$ e $u \equiv v$, o sistema (0.1) se reduz a seguinte classe de equações de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u). \tag{0.3}$$

Esta classe de equações foi extensivamente estudada por diversos autores. A fim de superar a dificuldade originada pela falta de compacidade, foi introduzido várias classes de potenciais, podemos citar entre outros o trabalho de P. Rabinowitz [25], que considerou uma classe de potenciais limitados e coercivos, nesse trabalho ele aplicou métodos variacionais baseado em variantes do Teorema do Passo da Montanha para obter resultados de existência para (0.3) quando $f(x,s)$ é subcritico ou superlinear.

Em [10], Z. Chen e W. Zou estudaram a existência de solução ground state para a seguinte classe de sistemas acoplados críticos com potenciais constantes

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = |u|^{p-2}u + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \nu v = |v|^{2^*-2}v + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{0.4}$$

quando $N \geqslant 3$ e $1 < p < 2^* - 1$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. Eles provaram que existem parâmetros críticos $\mu_0 > 0$ e $\lambda_{\mu,\nu} \in \left[\sqrt{(\mu-\mu_0)\nu}, \sqrt{\mu\nu}\right]$ tais que, (0.4) tem uma solução ground state positiva quando $\lambda > \lambda_{\mu,\nu}$ e não possui solução ground state quando $\mu > \mu_0$ e $\lambda < \lambda_{\mu,\nu}$.

Sistemas acoplados de equações de Schrodinger não-lineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = (1+a(x))|u|^{p-1}u + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \nu v = (1+b(x))|v|^{q-1}v + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{0.5}$$

foram estudados por A. Ambrosetti [3] com dimensão $N = 1$ e A. Ambrosetti, G. Cerami, D. Ruiz [5] com $N \geqslant 2$. Em [5] os autores usaram argumentos de concentração de compacidade para provar a existência de solução ground state positivo quando $\mu = \nu = 1$, $\lambda \in (0,1)$, $1 < p = q < 2^* - 1$, $a(x)$ e $b(x)$ se anulando no infinito. Em [11] Z. Chen e W. Zou ampliaram e complementaram alguns resultados apresentados em [5], estudando a seguinte classe de sistemas acoplados

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f_1(x) + \lambda v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \nu v = f_2(x) + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{0.6}$$

os autores obtiveram a existência de solução ground states radiais positivas e estimativas de energia que fornecem uma descrição de comportamento no limite, quando o parametro λ vai pra zero.

No que segue considerando em (0.1) $f_1(x,u) = \mu|u|^{p-2}u$ e $f_2(x,v) = |v|^{q-2}v$ obtemos o sistema (S_μ), o qual será estudado dividido em três casos:

(i) (caso subcrítico) $2 < p \leqslant q < 2^*$

(ii) (caso crítico) $2 < p < q = 2^*$

(iii) (caso crítico) $p = q = 2^*$

O caso subcrítico está relacionado no artigo clássico de H. Brezis e E.H. Lieb. [9], que provaram a existência de solução ground state para a seguinte classe de sistemas

$$-\Delta u_i(x) = g^i(u(x)), i = 1, 2, ..., n, \tag{0.7}$$

onde $g^i(u) = \dfrac{\partial G(u)}{\partial u_i}$, para algum $G \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geqslant 3$. Pode ser verificado que quando $V_1(x) = \mu$, $V_2(x) = \nu$ e $\lambda(x) = \lambda$, com $0 < \lambda < \delta\sqrt{\mu\nu}$, o sistema (S_μ) se torna um caso particular do sistema (0.7), satisfazendo todas as hipóteses requeridas para g em [9]. No entanto, vamos lidar com um termo de acoplamento mais geral e duas classes de potenciais não-negativos: periódicos e assintóticamente periódicos.

Para o sistema $(\hat{S_\mu})$ será estudado os casos:

(i) (caso subcrítico) $2 < p \leqslant q < 2^*$

(ii) (caso crítico) $2 < p < q = 2^*$

Nosso trabalho será estruturado da seguinte forma:

No **capítulo 1**, mostraremos alguns resultados que serão de grande ajuda para demonstrar os principais teoremas deste trabalho, para isso iremos definir solução ground state e os espaços que irão ser trabalhados, iremos introduzir a variedade de Nehari $\aleph$ e mostraremos algumas relações entre o funcional associado ao sistema (S_μ) e o conjunto $\aleph$.

No **capítulo 2**, iremos usar resultados importantes como o Princípio Variacional de Ekeland, o Lema de Lions, o argumento de Bootstrap, desigualdade de Hölder, imersões contínuas e compactas de Sobolev, o Princípio do Máximo Forte, entre outros resultados que serão necessários para mostrar que o sistema (S_μ) possui solução ground state não-negativa e positiva para o caso subcrítico $2 < p \leqslant q < 2^*$ e para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$, onde os potenciais $V_i(x)$ e $\lambda(x)$ são periódicos.

No **capítulo 3**, mostraremos que o sistema $(\hat{S}_\mu)$ possui solução ground state não-negativa e positiva para o caso subcrítico $2 < p \leqslant q < 2^*$ e para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$, para isso trataremos do caso onde os potenciais $\hat{V}_i(x)$ e $\hat{\lambda}(x)$ são assintóticamente periódicos.

No **capítulo 4**, usaremos a identidade de Pohozaev para mostrar que o sistema (S_μ) não possui solução clássica positiva quando $p = q = 2^*$, onde os potenciais $V_i(x)$ e $\lambda(x)$ são periódicos.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Antes de enunciamos e demonstrarmos os principais resultados deste trabalho, iremos neste capítulo, definir solução ground state, os espaços E_i e $\hat{E}_i$ e estabelecer uma abordagem variacional para tratar dos sistemas (S_μ) e $(\hat{S}_\mu)$, iremos também mostrar que os espaços E_i e $\hat{E}_i$ estão imersos continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$ e por fim, enunciar e demonstrar alguns resultados que serão de grande ajuda para a prova dos teoremas principais.

Definição 1.1. *Dizemos que um par $(u, v) \in E\backslash\{(0,0)\}$ é uma solução ground state (solução de menor energia) de (S_μ), se (u, v) é uma solução de (S_μ) e sua energia é mínima entre as energias de todas as soluções não-triviais de (S_μ), isto é, $I(u, v) \leqslant I(w, z)$ para qualquer solução não-trivial $(w, z) \in E$. Dizemos que (u, v) é não-negativa (não-positiva) se $u, v \geqslant 0$ $(u, v \leqslant 0)$ e positiva (negativa) se $u, v > 0$ $(u, v < 0)$.*

Em virtude da presença dos potenciais $V_1(x)$, $V_2(x)$ e $\hat{V_1}(x)$, $\hat{V_2}(x)$ para $i = 1, 2$ apresentamos os seguintes espaços:

$$E_i = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u^2 dx < \infty \right\},$$

dotado com o produto interno

$$(u,v)_{E_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) uv dx,$$

com a norma

$$\|u\|_{E_i}^2 = (u,u)_{E_i} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u^2 dx.$$

E o espaço

$$\hat{E}_i = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \hat{V}_i(x) u^2 dx < \infty \right\},$$

dotado com o produto interno

$$(u,v)_{\hat{E}_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} \hat{V}_i(x) uv dx,$$

e norma dada por

$$\|u\|_{\hat{E}_i}^2 = (u,u)_{\hat{E}_i} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \hat{V}_i(x) u^2 dx.$$

Para estabelecer uma abordagem variacional para tratar do sistema (S_μ) precisamos exigir hipóteses adequadas sobre os potenciais. Para cada $i = 1, 2$ assumimos que

(V_1) $V_i, \lambda \in C^1(\mathbb{R}^N)$ são 1 periódicos em cada um $x_1, ..., x_N$,

(V_2) $V_i(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\nu_i = \inf_{u \in E_i} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x) u^2 dx : \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\} > 0,$$

(V_3) $|\lambda(x)| \leqslant \delta \sqrt{V_1(x) V_2(x)}$, para algum $\delta \in (0,1)$, $\forall \;\; x \in \mathbb{R}^N$,

(V_3') $0 < \lambda(x) \leqslant \delta \sqrt{V_1(x) V_2(x)}$.

Observação 1.1. *uma função é dita 1 periódica quando é periódica de periodo 1 em cada* *coordenada.*

Note que (V_2) implica que E_i é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$, mais adiante iremos demonstrar este fato.

Da mesma forma para o sistema $(\hat{S_\mu})$ precisamos exigir hipóteses adequadas sobre os potenciais. Para cada $i = 1, 2$ assumimos que

(V_4) $\hat{V}_i, \hat{\lambda} \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $\hat{V}_i(x) < V_i(x)$, $\lambda(x) < \hat{\lambda}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} |V_i(x) - \hat{V}_i(x)| = 0$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} |\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)| = 0$,

(V_5) $\hat{V}_i(x) \geqslant 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\hat{\nu_i} = \inf_{u \in \hat{E}_i} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \hat{V}_i(x) u^2 dx : \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\} > 0,$$

(V_6) $|\hat{\lambda}(x)| \leqslant \delta \sqrt{\hat{V}_1(x)\hat{V}_2(x)}$, para algum $\delta \in (0,1)$, $\forall \;\; x \in \mathbb{R}^N$,

(V_6') $0 < \hat{\lambda}(x) \leqslant \delta \sqrt{\hat{V}_1(x)\hat{V}_2(x)}$, para algum $\delta \in (0,1)$, $\forall \;\; x \in \mathbb{R}^N$.

Note que (V_5) implica que $\hat{E}_i$ é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$.

Definimos o espaço produto $E = E_1 \times E_2$, temos que E é um espaço de Hilbert quando dotado do produto interno

$$((u,v),(z,w)) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla z + V_1(x) uz + \nabla v \nabla w + V_2(x) vw)\, dx,$$

com norma dada por

$$\begin{aligned} \|(u,v)\|_E^2 &= ((u,v),(u,v)) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_1(x)u^2\right) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V_2(x)v^2\right) dx = \|u\|_{E_1}^2 + \|v\|_{E_2}^2. \end{aligned}$$

Associado ao sistema (S_μ), temos o funcional energia $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q.$$

Observando que $I \in C^2(E,\mathbb{R})$, ver Lema B.1 com

$$\langle I'(u,v),(\phi,\psi)\rangle = ((u,v),(\phi,\psi)) - \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\mu|u|^{p-2}u\phi + |v|^{q-2}v\psi + \lambda(x)(u\psi + v\phi)\Big)dx,$$

onde $(\phi,\psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Assim, os pontos críticos de I correspondem a soluções fracas de (S_μ).

Da mesma forma definimos o espaço produto $\hat{E} = \hat{E}_1 \times \hat{E}_2$. Temos que $\hat{E}$ é um espaço de Hilbert quando dotado do produto interno

$$((u,v),(z,w)) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla u\nabla z + \hat{V_1}uz + \nabla v\nabla w + \hat{V_2}vw\right)dx$$

e norma

$$\begin{aligned}\|(u,v)\|_{\hat{E}}^2 &= ((u,v),(u,v)) = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + \hat{V_1}(x)u^2)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2 + \hat{V_2}(x)v^2)dx = \|u\|_{\hat{E_1}}^2 + \|v\|_{\hat{E_2}}^2.\end{aligned}$$

Observação 1.2. *Notemos que o espaço E_i está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $p \in [2,2^*]$.*
De fato, segue do Teorema A.2 (ver Apêndice A) que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{H^1}. \tag{1.1}$$

Assim, basta mostrar que existe um $K > 0$, tal que

$$\|u\|_{H^1} \leqslant K\|u\|_{E_i}.$$

Observe que por (V_2), *temos* $\nu_i \leq \|u\|^2_{E_i} \ \ \forall \ \ |u|_{L^2} = 1$, *tomando* $\nu = \dfrac{u}{|u|_{L^2}}; u \neq 0$, *temos* $\nu_i |u|^2_{L^2} \leq \|u\|^2_{E_i}$,

assim,

$$\|u\|^2_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\nu_i}\|u\|^2_{E_i},$$

logo,

$$\|u\|^2_{H^1} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_i(x)u^2\right) dx + \frac{1}{\nu_i}\|u\|^2_{E_i} = \left(1 + \frac{1}{\nu_i}\right)\|u\|^2_{E_i},$$

ou seja,

$$\|u\|_{H^1} \leqslant K\|u\|_{E_i}, \tag{1.2}$$

onde $K = \sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{\nu_i}\right)}$.

De (1.1) e (1.2), concluímos que E_i *é imerso continuamente em* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *para todo* $p \in [2, 2^*]$.

De forma análoga se mostra que o espaço $\hat{E}_i$ *está imerso continuamente em* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *com* $p \in [2, 2^*]$

Observação 1.3. *A hipótese* (V_3) *será muito utilizada daqui em diante. O próximo resultado é uma importante estimativa obtida por essa suposição e será citada e usada no restante do trabalho. Este resultado será importante para provar a existência de solução ground state não negativa para o sistema* (S_μ), *quando* (V_1)-(V_3) *são válidos, para* $2 < p \leqslant q < 2^*$ *e a existência de uma Ground State positiva, quando* (V_3') *é válido, para* $2 < p \leqslant q < 2^*$.

Lema 1.1. *Se* (V_3) *é válido, então temos*

$$\|(u,v)\|^2_E - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx \geqslant (1-\delta)\|(u,v)\|^2_E. \tag{1.3}$$

Demonstração: *Para* $(u,v) \in E$, *temos*

$$0 \leqslant \Big(\sqrt{V_1(x)}|u| - \sqrt{V_2(x)}|v|\Big)^2 = V_1(x)u^2 - 2\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| + V_2(x)v^2. \tag{1.4}$$

Desde que

$$|\lambda(x)||u||v| \geqslant \lambda(x)uv,$$

segue-se que

$$-2\lambda(x)uv \geqslant -2|\lambda(x)||u||v|.$$

Assim,

$$-2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx \geqslant -2\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||u||v|dx. \tag{1.5}$$

Para $\delta \in (0,1)$, *segue de* (V_3) *que*

$$|\lambda(x)||u||v| \leqslant \delta\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|,$$

o que implica

$$-2\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||u||v|dx \geqslant -2\delta\int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|dx. \tag{1.6}$$

De (1.4), tem-se

$$-2\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| \geqslant -V_1(x)u^2 - V_2(x)v^2,$$

logo,

$$-2\delta\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| \geqslant -\delta\Big(V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2\Big).$$

Assim,

$$-2\delta\int_{\mathbb{R}^N}\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|dx \geqslant -\delta\left(\int_{\mathbb{R}^N}V_1(x)u^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}V_2(x)v^2dx\right). \qquad (1.7)$$

Note que,

$$\|(u,v)\|_E^2=\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^2+V_1(x)u^2+|\nabla v|^2+V_2(x)v^2\Big)dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^N}V_1(x)u^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}V_2(x)v^2dx,$$

o que implica

$$-\delta\left(\int_{\mathbb{R}^N}V_1(x)u^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}V_2(x)v^2dx\right)\geqslant -\delta\|(u,v)\|_E^2. \qquad (1.8)$$

Então, de (1.4) - (1.8), obtemos

$$-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx \geqslant -\delta\|(u,v)\|_E^2.$$

Somando $\|(u,v)\|_E^2$*, em ambos os membros da expressão anterior, temos*

$$\|(u,v)\|_E^2-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx \geqslant (1-\delta)\|(u,v)\|_E^2,$$

mostrando assim o resultado. □

Para provar a existência de solução ground state, consideremos a variedade de Nehari associada ao sistema (S_μ), dada por

$$\aleph=\Big\{(u,v)\in E\backslash\{(0,0)\}:\langle I'(u,v),(u,v)\rangle=0\Big\}.$$

Observamos que todos os pontos críticos não-triviais de I pertencen a $\aleph$ e definimos a energia ground state por

$$c_\aleph=\inf_{(u,v)\in\aleph}I(u,v).$$

Observe que se $(u,v)\in\aleph$, então

$$\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx - \mu\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q = 0,$$

implicando

$$\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx = \mu\|u\|_p^p + \|v\|_q^q. \tag{1.9}$$

O resultado seguinte a ser apresentado também será importante para provar a existência de solução ground state não negativa para o sistema (S_μ), quando (V_1)-(V_3) são válidos, para $2 < p \leqslant q < 2^*$ e a existência de uma solução ground tate positiva quando, (V_3') é válido para $2 < p \leqslant q < 2^*$.

Lema 1.2. *Existe $\alpha > 0$, tal que, $\|(u,v)\|_E \geqslant \alpha$, para todo $(u,v) \in \aleph$. Além disso, $\aleph$ é uma variedade C^1.*

Demonstração: *Seja $(u,v) \in \aleph$. De (1.3) e (1.9) temos*

$$(1-\delta)\|(u,v)\|_E^2 \leqslant \|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx = \mu\|u\|_p^p + \|v\|_q^q.$$

Desde que E_i é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [2, 2^*]$, obtemos

$$(1-\delta)\|(u,v)\|_E^2 \leqslant \mu C_1\|u\|_{E_1}^p + C_2\|v\|_{E_2}^q.$$

Sendo

$$\|u\|_{E_i} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x)u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

então

$$\|u\|_{E_i}^p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_i(x)u^2 dx\right)^{\frac{p}{2}},$$

logo,

$$\|u\|_{E_1}^p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2 dx\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Como $2 < p$, *então* $1 < \dfrac{p}{2}$, *daí segue que*

$$\|u\|^p_{E_1} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x) v^2 dx\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Da definição de norma no espaço E *e nos espaços* E_i *obtemos*

$$\|u\|^p_{E_1} \leqslant \left(\|u\|^2_{E_1} + \|v\|^2_{E_2}\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\|(u,v)\|^2_E\right)^{\frac{p}{2}} = \|(u,v)\|^p_E. \tag{1.10}$$

De forma análoga, mostra-se

$$\|v\|^q_{E_2} \leqslant \|(u,v)\|^q_E. \tag{1.11}$$

Logo,

$$(1-\delta)\|(u,v)\|^2_E \leqslant \mu C_1 \|(u,v)\|^p_E + C_2\|(u,v)\|^q_E.$$

Escolhendo $C = máx\{\mu C_1, C_2\}$, *temos*

$$(1-\delta)\|(u,v)\|^2_E \leqslant C\left(\|(u,v)\|^p_E + \|(u,v)\|^q_E\right).$$

Portanto,

$$0 < \frac{1-\delta}{C} \leqslant \|(u,v)\|^{p-2}_E + \|(u,v)\|^{q-2}_E.$$

Fixando $(u,v) \in \aleph$ *e escolhendo*

$$\|(u,v)\|^r_E = máx\left\{\|(u,v)\|^{p-2}_E, \|(u,v)\|^{q-2}_E\right\},$$

temos

$$0 < \frac{1-\delta}{C} \leqslant 2\|(u,v)\|^r_E,$$

o que implica

$$0 < \sqrt[r]{\frac{1-\delta}{2C}} \leqslant \|(u,v)\|_E.$$

Tomando $\alpha = \sqrt[r]{\dfrac{1-\delta}{2C}}$, *concluímos que*

$$\|(u,v)\|_E \geqslant \alpha, \quad \forall \ \ (u,v) \in \aleph. \tag{1.12}$$

Agora, seja $J : E\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *o funcional* C^1 *definido por*

$$J(u,v) = \langle I'(u,v),(u,v)\rangle = \|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx - \mu\|u\|_p^p - \|v\|_q^q.$$

Observe que, se $(u,v) \in \aleph$, *então* $J(u,v) = 0 \Rightarrow (u,v) = J^{-1}(0)$, $\aleph = J^{-1}(0)$. *Observamos que*

$$\langle J'(u,v),(u,v)\rangle = 2\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) - p\mu\|u\|_p^p - q\|v\|_q^q$$

[Ver Apêndice B]. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle J'(u,v),(u,v)\rangle &= 2\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) - p\mu\|u\|_p^p - p\|v\|_q^q + p\|v\|_q^q - q\|v\|_q^q \\
&= 2\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) - p(\mu\|u\|_p^p + \|v\|_q^q) + (p-q)\|v\|_q^q.
\end{aligned}$$

Segue de (1.9) que,

$$\begin{aligned}
\langle J'(u,v),(u,v)\rangle &= 2 \quad \left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) \\
&- \quad p\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) + (p-q)\|v\|_q^q.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle J'(u,v),(u,v)\rangle = (2-p)\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) + (p-q)\|v\|_q^q.$$

Disso, de (1.3), (1.12) e o fato de que $2 < p \leqslant q$, *obtemos*

$$\langle J'(u,v),(u,v)\rangle \leqslant (2-p)(1-\delta)\|(u,v)\|_E^2 \leqslant (2-p)(1-\delta)\alpha < 0. \tag{1.13}$$

Portanto, 0 é um valor regular de J e $\aleph$ é uma variedade C^1. □

Observação 1.4. *Se $(u_0, v_0) \in \aleph$ for um ponto crítico do funcional $I|_{\aleph}$, então $I'(u_0, v_0) = 0$. De fato, note que*

$$I, J \in C^1(E\backslash\{(0,0)\}, \mathbb{R}), (u_0, v_0) \in E\backslash\{(0,0)\}$$

e

$$\aleph = \Big\{(u,v) \in E\backslash\{(0,0)\} : J(u,v) = J(u_0,v_0)\Big\},$$

pois

$$J(u,v) = \langle I'(u,v),(u,v)\rangle = 0 \quad e \quad J(u_0,v_0) = \langle I'(u_0,v_0),(u_0,v_0)\rangle = 0. \tag{1.14}$$

Assim, desde que

$$\langle J'(u_0,v_0),(u_0,v_0)\rangle \neq 0$$

e I é limitado sobre $\aleph$, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange [ver Teorema A.4], existe $\eta \in \mathbb{R}$, tal que

$$I'(u_0,v_0) = \eta J'(u_0,v_0).$$

Tomando o produto escalar com (u_0, v_0) e usando (1.13) e (1.14), concluímos que $\eta = 0$.

Nosso próximo resultado será utilizado na demonstração de três dos principais resultados deste trabalho, na prova de que o sistema (S_μ) possui uma solução ground state não-negativa quando (V_1)-(V_3) são válidos e $2 < p \leqslant q < 2^*$, possui ground state positiva quando (V_3') é válido e $2 < p \leqslant q < 2^*$, na prova de que o sistema (S_μ) possui uma solução ground state não-negativa quando (V_1)-(V_3) são válidos e $2 < p < q = 2^*$, possui ground state positiva quando (V_3') é válido e $2 < p < q = 2^*$ e na prova da existência de solução ground state não-negativa para o sistema $(\hat{S_\mu})$ quando (V_1)-(V_6) são válidos e de solução ground state positiva quando (V_6') é verdadeira.

Lema 1.3. *Suponha que (V_3) seja válido. Assim, para qualquer $(u,v) \in E\backslash\{(0,0)\}$, existe um único $t_0 > 0$, dependendo apenas de (u,v), tal que*

$$(t_0 u, t_0 v) \in \aleph \quad e \quad I(t_0 u, t_0 v) = \max_{t \geqslant 0} I(tu, tv).$$

Demonstração: *Vamos fixar $(u,v) \in E\backslash\{(0,0)\}$ e considerar a função $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(t) = I(tu,tv) = \frac{1}{2}\left(\|(tu,tv)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) tutv dx\right) - \frac{\mu}{p}\|tu\|_p^p - \frac{1}{q}\|tv\|_q^q,$$

ou seja,

$$g(t) = \frac{t^2}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx\right) - t^p\frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{t^q}{q}\|v\|_q^q.$$

Note que

$$g'(t) = t\|(u,v)\|_E^2 - 2t\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx - t^{p-1}\mu\|u\|_p^p - t^{q-1}\|v\|_q^q$$

e

$$\begin{aligned} \langle I'(tu,tv),(tu,tv)\rangle &= \|(tu,tv)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t^2 uv dx - \mu\|tu\|_p^p - \|tv\|_q^q \\ &= t\left(t\|(u,v)\|_E^2 - 2t\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx - \mu t^{p-1}\|u\|_p^p - t^{q-1}\|v\|_q^q\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle I'(tu,tv),(tu,tv)\rangle = tg'(t).$$

Do Lema 1.1

$$\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uv dx \geqslant 0, \quad \forall \quad (u,v) \in E.$$

Desde que $2 < p \leqslant q$ *e*

$$g(t) = \frac{t^2}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) - \frac{t^p}{p}\mu\|u\|_p^p - \frac{t^q}{q}\|v\|_q^q,$$

segue-se que $g(t) < 0$*, para* $t > 0$ *suficientemente grande. Por outro lado, fazendo uso de (1.3), das imersões de Sobolev e de (1.10) e (1.11), temos*

$$g(t) \geqslant (1-\delta)\frac{t^2}{2}\|(u,v)\|_E^2 - C_1\frac{t^p}{p}\|(u,v)\|_E^p - C_2\frac{t^q}{q}\|(u,v)\|_E^q,$$

ou seja,

$$g(t) \geqslant t^2\|(u,v)\|_E^2\left(\frac{1-\delta}{2} - C_1\frac{t^{p-2}}{p}\|(u,v)\|_E^{p-2} - C_2\frac{t^{q-2}}{q}\|(u,v)\|_E^{q-2}\right) > 0,$$

desde que $t > 0$ *seja suficientemente pequeno. Assim,* g *possui pontos de máximo em* $(0,\infty)$.

Para provar a unicidade suponhamos que existem $t_1, t_2 > 0$ *com* $t_1 < t_2$ *tais que,*

$$g'(t_1) = g'(t_2) = 0.$$

Como cada ponto crítico de g *satisfaz*

$$t\|(u,v)\|_E^2 - 2t\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx - t^{p-1}\mu\|u\|_p^p - t^{q-1}\|v\|_q^q = 0,$$

então,

$$\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx = t^{p-2}\mu\|u\|_p^p + t^{q-2}\|v\|_q^q.$$

De onde segue que

$$t_1^{p-2}\mu\|u\|_p^p + t_1^{q-2}\|v\|_q^q = t_2^{p-2}\mu\|u\|_p^p + t_2^{q-2}\|v\|_q^q.$$

Assim,

$$0 = (t_1^{p-2} - t_2^{p-2})\mu\|u\|_p^p + (t_1^{q-2} - t_2^{q-2})\|v\|_q^q,$$

desde que $(u, v) \neq 0$, *concluímos que existe um único* $t_0 > 0$ *dependendo apenas de* (u, v), *tal que*

$$\langle I'(t_0u, t_0v), (t_0u, t_0v)\rangle = t_0 g'(t_0) = 0.$$

Logo,

$$(t_0u, t_0v) \in \aleph \quad e \quad I(t_0u, t_0v) = g(t_0) = \max_{t\geqslant 0} g(t) = \max_{t\geqslant 0} I(tu, tv).$$

$\square$

O próximo resultado, assim como os Lemas 1.1 e 1.2, será importante para provar a existência de solução ground state não negativa para o sistema (S_μ), quando (V_1)-(V_3) são válidos, para $2 < p \leqslant q < 2^*$ e a existência de uma ground state positiva quando (V_3') é válido, para $2 < p \leqslant q < 2^*$.

Lema 1.4. *Para* $(u, v) \in \aleph$,

$$I(tu, tv) \leqslant I(u, v), \quad \forall \ \ t \geq 0.$$

Demonstração: *Da definição de* I *e de (1.9)*

$$\begin{aligned} I(u,v) &= \frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q \\ &= \frac{1}{2}(\mu\|u\|_p^p + \|v\|_q^q) - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v\|_q^q. \end{aligned}$$

De maneira análoga temos

$$I(tu, tv) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^p}{p}\right)\mu\|u\|_p^p + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^q}{q}\right)\|v\|_q^q.$$

Assim,

$$I(u,v) - I(tu,tv) = \left(\frac{1-t^2}{2} + \frac{t^p - 1}{p}\right)\mu\|u\|_p^p + \left(\frac{1-t^2}{2} + \frac{t^q-1}{q}\right)\|v\|_q^q,$$

para todo $(u,v) \in \aleph$ *e* $t \geq 0$.

Se $t = 0$, *então*

$$I(u,v) - I(0,0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v\|_q^q.$$

Desde que $2 < p \leqslant q$, *temos que,* $I(0,0) < I(u,v), \quad \forall \quad (u,v) \in \aleph.$

Agora para qualquer $r \in (2, 2^*]$, *considere* $\eta_r : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$\eta_r(t) = \frac{1-t^2}{2} + \frac{t^r - 1}{r}.$$

Para que $I(tu,tv) \leqslant I(u,v)$, *é suficiente provar que* $\eta_r(t) \geq 0$. *Para todo* $t > 0$, *note que*

$$\eta_r'(t) = -t + t^{r-1}.$$

Assim, $t = 1$ *é o único ponto crítico de* η_r. *Desde que,*

$$\eta_r''(t) = -1 + (r-1)t^{r-2} \quad e \quad \eta_r''(1) = -2 + r > 0,$$

temos que $t = 1$ *é um minímo para* η_r *e como* $\eta_r(1) = 0$ *então,*

$$\eta_r(t) \geq 0, \quad \forall \quad t > 0.$$

$\square$

No que segue, consideremos os níveis de energia associados ao sistema S_μ

$$c^* = \inf_{(u,v)\in E\setminus\{(0,0)\}} \max_{t\geqslant 0} I(tu,tv), \quad c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \quad e \quad c_{\aleph} = \inf_{(u,v)\in\aleph} I(u,v),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = (0,0), I(\gamma(1)) < 0\}.$$

A seguir iremos enunciar e demonstrar o último resultado deste capítulo, que será importante na prova da existência de solução ground state não-negativa para o sistema $(\hat{S}_\mu)$ quando (V_1)-(V_6) são válidos e de solução ground state positiva quando (V_6') é válido e os potenciais $\hat{V}_i(x)$ e $\hat{\lambda}(x)$ são assintóticamente periódicos.

Lema 1.5. *$0 < c_{\aleph} = c^* = c$.*

Demonstração: *Para qualquer $(u,v) \in \aleph$, usando (1.9) temos*

$$\begin{aligned} I(u,v) &= \frac{1}{2}\left(\mu\|u\|_p^p + \|v\|_q^q\right) - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|v\|_q^q. \end{aligned}$$

Desde que $2 < p \leqslant q$, decorre de (1.3) e (1.12) que

$$I(u,v) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(1-\delta)\|(u,v)\|_E^2 \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(1-\delta)\alpha > 0,$$

implicando que $c_{\aleph} > 0$.

Do Lema 1.4,

$$\max_{t\geq 0} I(tu,tv) = I(u,v), \quad \forall \ (u,v) \in \aleph.$$

Assim, segue que

$$c^* \leqslant \max_{t\geq 0} I(tu,tv) = I(u,v), \quad \forall \ (u,v) \in \aleph.$$

Tomando o ínfimo sobre $\aleph$, concluímos que $c^* \leqslant c_{\aleph}$.

Por outro lado, do Lema 1.3 temos que para qualquer $(u,v) \in E\setminus\{(0,0)\}$ existe um único

$t_0 > 0$ de modo que $(t_0u, t_0v) \in \aleph$. Portanto,

$$c_{\aleph} \leqslant I(t_0u, t_0v) = \max_{t \geq 0} I(tu, tv) \quad \forall \quad (u, v) \in E \backslash \{(0,0)\}.$$

Tomando o infímo sobre $E \backslash \{(0,0)\}$, temos que $c_{\aleph} \leqslant c^*$.

Para provar que $c^* = c$, é suficiente mostrar que $c \leqslant c^*$ e $c_{\aleph} \leqslant c$. Pela definição de c^*, existe uma sequência $(u_n, v_n)_n \subset E \backslash \{(0,0)\}$ tal que

$$c^* \leqslant \max_{t \geqslant 0} I(tu_n, tv_n) < c^* + \frac{1}{n} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Da prova do Lema 1.3, temos que $I(tu, tv) < 0$ para todo $t > 0$ suficientemente grande. Daí, segue do Lema 1.3 que existe $t_n > 0$ dependendo de (u_n, v_n) e $s_n > t_n$, tal que

$$I(t_nu_n, t_nv_n) = \max_{t \geqslant 0} I(tu_n, tv_n) \quad e \quad I(s_nu_n, s_nv_n) < 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos considerar o caminho $\gamma_n : [0,1] \to E$ definido por

$$\gamma_n(t) = ts_n(u_n, v_n).$$

Assim, $\gamma_n(0) = (0,0)$ e usando (1.16) temos que $I(\gamma_n(1)) < 0$, como consequência disto, segue que $\gamma_n \in \Gamma$. Desde que

$$I(t_nu_n, t_nv_n) = \max_{t \geqslant 0} I(tu_n, tv_n),$$

então, $\max_{t \geqslant 0} I(tu_n, tv_n)$ é uma cota superior para $I(\gamma_n(t))$. Logo, de (1.15),

$$\sup_{t \in [0,1]} I(\gamma_n(t)) \leqslant \sup_{t \geqslant 0} I(\gamma_n(t)) \leqslant \max_{t \geqslant 0} I(tu_n, tv_n) < c^* + \frac{1}{n} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pela definição de c, existe uma sequência $\gamma_n(t)$, tal que

$$c \leqslant \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_n(t)) = \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma_n(t)) \leqslant \max_{t\geqslant 0} I(tu_n, tv_n).$$

Assim, c é uma cota inferior para $I(tu_n, tv_n)$ e como $c^* \leqslant \max_{t\geqslant 0} I(tu_n, tv_n)$ é o ínfimo, então $c \leqslant c^*$.

Agora, note que a variedade $\aleph$ separa E em dois componentes

$$H^+ = \Big\{(u,v) \in E : \langle I'(u,v),(u,v)\rangle > 0\Big\} \cup \Big\{(0,0)\Big\}$$

e

$$H^- = \Big\{(u,v) \in E : \langle I'(u,v),(u,v)\rangle < 0\Big\}.$$

Usando (1.3), imersão de Sobolev e (1.10) e (1.11) temos

$$\begin{aligned}\langle I'(u,v),(u,v)\rangle &= \|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx - \mu\|u\|_p^p - \|v\|_q^q \\ &\geqslant (1-\delta)\|(u,v)\|_E^2 - C(\|(u,v)\|_E^p + \|(u,v)\|_E^q),\end{aligned}$$

o que implica que existe uma pequena bola em torno da origem contendo H^+. Além disso,

$$\frac{1}{2}\langle I'(u,v),(u,v)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx - \mu\|u\|_p^p - \|v\|_q^q\right).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}I(u,v) - \frac{1}{2}\langle I'(u,v),(u,v)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q \\ &- \frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx\right) + \frac{\mu}{2}\|u\|_p^p - \frac{1}{2}\|v\|_q^q \\ &= -\frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q + \frac{1}{2}\mu\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v\|_q^q \geqslant 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$I(u,v) \geqslant \frac{1}{2}\langle I'(u,v),(u,v)\rangle, \quad \forall \quad (u,v) \in E.$$

Assim temos, $I(u,v) \geqslant 0$ *para todo* $(u,v) \in H^+$. *Para qualquer* $\gamma \in \Gamma$, *temos que* $\gamma(0) = (0,0) \in H^+$ *e* $I(\gamma(1)) < 0$, *assim,* $\gamma(1)$ *não pertence a* H^+.
Notando que

$$0 > I(\gamma(1)) \geqslant \frac{1}{2}\langle I'(\gamma(1)),(\gamma(1))\rangle,$$

então

$$\langle I'(\gamma(1)),(\gamma(1))\rangle < 0.$$

Logo, $\gamma(1) \in H^-$. *Assim, todo caminho de* Γ *tem que atravessar a variedade* $\aleph$. *Logo, existe* $r_0 \in (0,1)$, *tal que* $\gamma(r_0) \in \aleph$. *Portanto,*

$$c_\aleph \leqslant I(\gamma(r_0)) \leqslant \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

Assim, $c_\aleph$ *é uma cota inferior para* $I(\gamma(t))$, *como* c *é o ínfimo, então* $c_\aleph \leqslant c$. *Assim concluímos que*

$$0 < c_\aleph = c^* = c.$$

$\square$

Capítulo 2

Existência de Solução para o Sistema S_μ

Neste capítulo serão apresentados e demonstrados dois dos principais resultados deste trabalho. Aqui, serão apresentadas condições para a existência de soluções ground states para o sistema (S_μ), no caso subcrítico $2 < p \leqslant q < 2^*$ e no caso crítico $2 < p < q = 2^*$. Em ambos os casos, iremos trabalhar com os potenciais periódicos $V_i(x)$ e $\lambda(x)$.

2.1 Caso Subcrítico

Nesta seção, mostraremos a existência de solução ground state não-negativa e positiva para o sistema (S_μ) para o caso subcrítico $2 < p \leqslant q < 2^*$.

O resultado central dessa seção é o seguinte:

Teorema 2.1. *Suponha que (V_1)-(V_3) sejam válidos, se $2 < p \leqslant q < 2^*$, então existe uma solução ground state não-negativa $(u_0, v_0) \in C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N) \times C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para o sistema (S_μ), para todo $\mu \geqslant 0$. Se (V_3') é válido, então a solução ground state é positiva.*

Observação 2.1. *Pelo Princípio Variacional de Ekeland [ver Apêndice A], observemos que, existe uma sequência* $(u_n, v_n) \subset \aleph$ *de modo que*

$$I(u_n, v_n) \to c_{\aleph} \quad e \quad I'(u_n, v_n) \to 0. \tag{2.1}$$

Note que (u_n, v_n) *é limitado. De fato, de (1.9), temos*

$$\begin{aligned}
I(u_n, v_n) &= \frac{1}{2}\left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx\right) - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\
&= \frac{1}{2}\left(\mu\|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q\right) - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\
&= \frac{\mu}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|v_n\|_q^q - \frac{1}{p}\|v_n\|_q^q - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{p}\|v_n\|_q^q - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(\mu\|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|v_n\|_q^q.
\end{aligned}$$

Assim, desde que, $p \leq q$*, segue do Lema 1.1*

$$I(u_n, v_n) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(1-\delta)\|(u_n, v_n)\|_E^2.$$

Desde que $(I(u_n, v_n))_n$ *é uma sequência limitada, deduzimos que* $(u_n, v_n)_n$ *é limitada em* E*, passando para uma subsequência, se necessário, temos*

$$(u_n, v_n)_n \rightharpoonup (u_0, v_0) \quad em \quad E.$$

Sendo I *de classe* C^1*, segue que* I *é contínuo, daí como* $(u_n, v_n)_n \rightharpoonup (u_0, v_0)$ *em* E*, então* $I(u_n, v_n)_n \to I(u_0, v_0) = c_{\aleph}$*. Assim, temos que* $(u_0, v_0) \in \aleph$ *e* $I'(u_0, v_0) = 0$*.*

A seguir, mostraremos alguns resultados os quais precisaremos para demonstrar o resultado central dessa seção.

Proposição 2.1. *Existe uma solução ground state para o sistema*

$$(S_\mu)\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{q-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Demonstração: *Vamos considerar dois casos:*

Caso 1: $(u_0, v_0) \neq (0,0)$.

Neste caso, (u_0, v_0) *é um ponto crítico não-trivial do funcional energia* I. *Assim,* $(u_0, v_0) \in \aleph$. *Nos resta provar que*

$$I(u_0, v_0) = c_\aleph.$$

Por definição

$$c_\aleph \leqslant I(u_0, v_0).$$

Por outro lado, pela semicontinuidade da norma, temos

$$\begin{aligned} c_\aleph + o_n(1) &= I(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_n v_n dx\right) - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\ &- \frac{1}{2}\left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_n v_n dx\right) + \frac{\mu}{2}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{2}\|v_n\|_q^q \\ &= -\frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q + \frac{1}{2}\mu\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|v_n\|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v_n\|_q^q. \end{aligned}$$

Pela definição de solução ground state, temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v_n\|_q^q \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v_0\|_q^q,$$

daí, segue que

$$
\begin{aligned}
c_{\aleph} + o_n(1) &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \mu \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|v_0\|_q^q + o_n(1) \\
&= I(u_0, v_0) - \frac{1}{2} \langle I'(u_0, v_0), (u_0, v_0) \rangle + o_n(1) \\
&= I(u_0, v_0) + o_n(1),
\end{aligned}
$$

implicando que

$$c_{\aleph} \geqslant I(u_0, v_0).$$

Assim,

$$I(u_0, v_0) = c_{\aleph}.$$

Caso 2: $(u_0, v_0) = (0, 0)$.

Afirmação 2.1. *Existe uma sequência* $(y_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ *e* $R, \varepsilon > 0$*, tais que*

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2) dx \geqslant \varepsilon > 0. \tag{2.2}$$

De fato, suponhamos que (2.2) seja falsa. Assim, para qualquer $R > 0$*, desde que,*

$$u_n^2 \leqslant u_n^2 + v_n^2 \quad e \quad v_n^2 \leqslant u_n^2 + v_n^2,$$

pelo Lema A.2, temos

$$\limsup_{n \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0 \quad e \quad \limsup_{n \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} v_n^2 dx = 0.$$

Segue do Lema de Lions, [ver Lema A.1], que $u_n \to 0$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $v_n \to 0$ *em* $L^q(\mathbb{R}^N)$*, para quaisquer* $2 < p, q < 2^*$*. Desde que* $(u_n, v_n) \subset \aleph$*, segue do Lema 1.1, (1.9) e de (1.12) que*

$$0 < (1-\delta)\alpha \leqslant (1-\delta)\|(u_n,v_n)\|_E^2 \leqslant \|(u_n,v_n)\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_nv_ndx = \mu\|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q \to 0.$$

Logo,

$$0 < (1-\delta)\alpha \leqslant 0.$$

O que é uma contradição, pois $\delta \in (0,1)$, portanto (2.2) é válida.

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $(y_n)_n \subset \mathbb{Z}^N$. Considere a sequência de mudança

$$(\hat{u_n}(x), \hat{v_n}(x)) = (u_n(x+y_n), v_n(x+y_n)).$$

Uma vez que $V_1(.)$, $V_2(.)$ e $\lambda(.)$ são funções 1-periódicas, o funcional energia I é invariante por translação da forma

$$(u,v) \mapsto (u(\boldsymbol{.}-z), v(\boldsymbol{.}-z)), z \in \mathbb{Z}^N.$$

Tomando $y_n = nz$, temos

$$V_1(x) = V_1(x+nz), V_2(x) = V_2(x+nz) \quad e \quad \lambda(x) = \lambda(x+nz), \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \|(\hat{u_n}, \hat{v_n})\|_E^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n(x+nz)|^2 + V_1(x+nz)u_n^2(x+nz)\right) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n(x+nz)|^2 + V_2(x+nz)v_n^2(x+nz)\right) dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $w = x+nz$, onde, para cada $i = 1, ..., N$, temos $w_i = x_i+nz_i$. Assim, o jacobiano é a matriz identidade

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial w_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial w_N}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial w_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto $det(J) = 1$ *e* $dw = dx$.

Assim,

$$\|(\hat{u_n}, \hat{v_n})\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n(w)|^2 + V_1(w)u_n^2(w) + |\nabla v_n(w)|^2 + V_2(w)v_n^2(w))dw \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Desde que w *é uma variável muda,*

$$\|(\hat{u_n}, \hat{v_n})\|_E = \|(u_n, v_n)\|_E.$$

Note ainda que

$$I(\hat{u_n}, \hat{v_n}) = \frac{1}{2}\left(\|(\hat{u_n}, \hat{v_n})\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x + y_n)\hat{u_n}\hat{v_n}dx \right) - \frac{\mu}{p}\|\hat{u_n}\|_p^p - \frac{1}{q}\|\hat{v_n}\|_q^q.$$

Novamente fazendo a mudança de variável, temos

$$\begin{aligned} I(\hat{u_n}, \hat{v_n}) &= \frac{1}{2}\left(\|(\hat{u_n}, \hat{v_n})\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(w)\hat{u_n}\hat{v_n}dw \right) - \frac{\mu}{p}\|\hat{u_n}\|_p^p - \frac{1}{q}\|\hat{v_n}\|_q^q \\ &= \frac{1}{2}\left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_n v_n dx \right) - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\ &= I(u_n, v_n). \end{aligned}$$

Desde que $I(u_n, v_n) \to c_\aleph$*, segue que* $I(\hat{u_n}, \hat{v_n}) \to c_\aleph$*. Como,* $I(\hat{u_n}\hat{v_n}) = I(u_n, v_n)$*, então,* $I'(\hat{u_n}\hat{v_n}) = I'(u_n, v_n) \to 0$.

Note que $(\hat{u_n}, \hat{v_n})$ *é limitado. De fato, de (1.9), temos*

$$
\begin{aligned}
I(\hat{u_n},\hat{v_n}) &= \frac{1}{2}\left(\|(\hat{u_n},\hat{v_n})\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)\hat{u_n}\hat{v_n}dx\right) - \frac{\mu}{p}\|\hat{u_n}\|_p^p - \frac{1}{q}\|\hat{v_n}\|_q^q \\
&= \frac{1}{2}\left(\mu\|\hat{u_n}\|_p^p + \|\hat{v_n}\|_q^q\right) - \frac{\mu}{p}\|\hat{u_n}\|_p^p - \frac{1}{q}\|\hat{v_n}\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left(\|(\hat{u_n},\hat{v_n})\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)\hat{u_n}\hat{v_n}dx\right) + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|\hat{v_n}\|_q^q
\end{aligned}
$$

Assim, desde que, $p \leqslant q$, segue do Lema 1.1

$$
I(\hat{u_n},\hat{v_n}) \geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)(1-\delta)\|(\hat{u_n},\hat{v_n})\|_E^2.
$$

Como $(I(\hat{u_n},\hat{v_n}))_n$ é uma sequência limitada, deduzimos que $(\hat{u_n},\hat{v_n})_n$ é limitada em E. Desta forma, existe um ponto crítico $(\hat{u},\hat{v})$ de I, de modo que, passando para uma subsequência, se necessário,

$$
(\hat{u_n},\hat{v_n}) \rightharpoonup (\hat{u},\hat{v}) \quad em \quad E.
$$

Assim das imersões compactas de Sobolev,

$$
(\hat{u_n},\hat{n_n}) \to (\hat{u},\hat{v}) \quad em \quad \mathrm{L^s(B_R(0))} \times \mathrm{L^s(B_R(0))}, \quad \forall \quad 1 < s < 2^*
$$

Logo,

$$
(\hat{u_n},\hat{v_n}) \to (\hat{u},\hat{v}) \quad em \quad L^2(B_R(0)) \times L^2(B_R(0)).
$$

Usando (2.2) obtemos,

$$
\int_{B_R(0)}(\hat{u}^2+\hat{v}^2)dx = \liminf_{n\to\infty}\int_{B_R(0)}(\hat{u_n}^2+\hat{v_n}^2)dx = \liminf_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)}(u_n^2+v_n^2)dx \geqslant \varepsilon > 0.
$$

Portanto, $(\hat{u},\hat{v}) \neq (0,0)$. Procedendo de forma análoga ao caso 1, concluímos a demonstração. □

Proposição 2.2. *Existe uma solução ground state não-negativa $(\hat{u},\hat{v}) \in C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N) \times$*

$C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para o sistema (S_μ).

Demonstração: *Seja $(u_0, v_0) \in \aleph$ a solução de Ground State que obtemos na Proposição 2.1. Do Lema 1.3, existe $t > 0$ tal que $(t|u_0|, t|v_0|) \in \aleph$. Note que, se $u_0, v_0 > 0$, temos*

$$I(t|u_0|, t|v_0|) = I(tu_0, tv_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) t^p \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t^q \|v_0\|_q^q.$$

Se $u_0 < 0$ e $v_0 > 0$, temos

$$I(t|u_0|, t|v_0|) = I(t(-u_0), tv_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) t^p \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t^q \|v_0\|_q^q = I(tu_0, tv_0).$$

Se $u_0 > 0$ e $v_0 < 0$, temos

$$I(t|u_0|, t|v_0|) = I(tu_0, t(-v_0)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) t^p \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t^q \|v_0\|_q^q = I(tu_0, tv_0).$$

Se $u_0, v_0 < 0$, temos

$$\begin{aligned} I(t|u_0|, t|v_0|) &= I(t(-u_0), t(-v_0)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) (t^p \| - u_0\|_p^p) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) (t^q \| - v_0\|_q^q) \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) t^p \|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t^q \|v_0\|_q^q = I(tu_0, tv_0). \end{aligned}$$

Assim, do Lema 1.4

$$I(t|u_0|, t|v_0|) \leqslant I(tu_0, tv_0) \leqslant I(u_0, v_0) = c_\aleph.$$

Implicando que $(t|u_0|, t|v_0|)$ também é um minimizador de I em $\aleph$. Portanto $(t|u_0|, t|v_0|)$ é uma solução ground state não-negativa para o sistema (S_μ).

Afim de provar a regularidade da solução, vamos usar o argumento do tipo Bootstrap. Inicialmente definimos

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (t|u_0|, t|v_0|),$$

$$P_1(x) = \mu|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} + \lambda(x)\hat{v} - V_1(x)\hat{u}$$

e

$$P_2(x) = |\hat{v}|^{q-2}\hat{v} + \lambda(x)\hat{u} - V_2(x)\hat{v}.$$

Note que, o sistema

$$(P)\begin{cases} -\Delta\hat{u} = P_1(x), & x \in B_1(0), \\ -\Delta\hat{v} = P_1(x), & x \in B_1(0), \end{cases}$$

onde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$, *é um caso particular do sistema* (S_μ). *Assim,* $(\hat{u}, \hat{v})$ *é uma solução fraca do problema* (P). *Usando imersões de Sobolev, temos* $V_1(x)\hat{u}, V_2(x)\hat{v}, \lambda(x)\hat{u}, \lambda(x)\hat{v} \in L^{2^*}(B_1(0))$, *pois* E_i *é imerso continuamente em* $L^p(B_1(0))$ *com* $p \in [2, 2^*]$. *Além disso, note que* $1 < \frac{p}{2} < \frac{2^*}{2} < 2^*$, *assim, desde que* $B_1(0)$ *é de domínio limitado, se* $\hat{u} \in L^p(B_1(0))$ *com* $p \in [2, 2^*]$, *então* $\hat{u} \in L^{\frac{p}{2}}(B_1(0))$ *e, se* $\hat{u} \in L^p(B_1(0))$, *então* $|\hat{u}|^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-2}}(B_1(0))$. *Sendo* $\frac{p}{2}$ *e* $\frac{p}{p-2}$ *expoentes conjugados, segue da desigualdade de Hölder, [ver teorema A.1], que*

$$|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} \in L^1(B_1(0)).$$

Por outro lado, se $\hat{u} \in L^p(B_1(0))$, *com* $p \in [2, 2^*]$, *então* $|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} = \hat{u}^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$, *com* $p \in [2, 2^*]$, *Logo,*

$$|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} \in L^{\frac{2^*}{p-1}}.$$

Assim, segue das imersões compactas de Sobolev que,

$$|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} \in L^r(B_1(0)), \quad \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant \frac{2^*}{p-1} \quad e \quad |\hat{v}|^{q-2}\hat{v} \in L^s(B_1(0)), \quad \forall \quad 1 \leqslant s \leqslant \frac{2^*}{q-1}.$$

Definimos

$$r_1 = \frac{2^*}{q-1}.$$

Com a condição de que $p \leqslant q$, *temos*

$$r_1 = \frac{2^*}{q-1} \leqslant \frac{2^*}{p-1}.$$

Como consequência disto, temos

$$|\hat{u}|^{p-2}\hat{u} \in L^{r_1}(B_1(0)).$$

Desde que $V_1(x)\hat{u}, V_2(x)\hat{v}, \lambda(x)\hat{u}, \lambda(x)\hat{v} \in L^{2^*}(B_1(0))$, $r_1 < 2^*$ *e* $B_1(0)$ *é domínio limitado, segue, por imersão de Sobolev que,* $V_1(x)\hat{u}, V_2(x)\hat{v}, \lambda(x)\hat{u}, \lambda(x)\hat{v} \in L^{r_1}(B_1(0))$, *daí temos*

$$P_1(x), P_2(x) \in L^{r_1}(B_1(0)).$$

Por outro lado, para cada $i = 1, 2$ *seja* w_i *o potencial newtoniano de* $P_i(x)$, *pelo Teorema A.5, temos* $w_i \in W^{2,r_1}(B_1(0))$ *e*

$$\begin{cases} \Delta w_1 = P_1(x), & x \in B_1(0), \\ \Delta w_2 = P_2(x), & x \in B_1(0). \end{cases}$$

Tomando $z_1 = \hat{u} - w_1$ *e* $z_2 = \hat{v} - w_2$, *segue que* $(\hat{u} - w_1, \hat{v} - w_2) \in H^1(B_1(0)) \times H^1(B_1(0))$ *é uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} \Delta z_1 = 0 & em \;\; B_1(0), \\ \Delta z_2 = 0 & em \;\; B_1(0). \end{cases}$$

Assim,

$$(\hat{u} - w_1, \hat{v} - w_2) \in C^\infty(B_1(0)) \times C^\infty(B_1(0)).$$

Note que,

$$\begin{cases} \Delta w_1 = -\Delta \hat{u}, & x \in B_1(0), \\ \Delta w_2 = -\Delta \hat{v}, & x \in B_1(0). \end{cases}$$

Assim sendo,

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_1}(B_1(0)) \times W^{2,r_1}(B_1(0)).$$

Desde que $q-1 < 2^* - 1$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$(q-1)(1+\delta) = 2^* - 1.$$

Note que,

$$\frac{2^*}{q-1} = \frac{2^*(1+\delta)}{2^*-1},$$

assim,

$$r_1 = \frac{2^*(1+\delta)}{2^*-1} = \frac{2N(1+\delta)}{N+2}. \tag{2.3}$$

Da imersão de Sobolev obtemos

$$W^{2,r_1}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{s_1}(B_1(0)), \quad onde \quad s_1 = \frac{Nr_1}{N-2r_1}.$$

Afirmamos que existe $r_2 \in (r_1, s_1)$ *tal que*

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_2}(B_1(0)) \times W^{2,r_2}(B_1(0)).$$

De fato, definindo $r_2 = \dfrac{s_1}{q-1}$, *temos* $r_2 < s_1$, *pois,* $q-1 > 1$.
Usando (2.3), obtemos

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{Nr_1}{(q-1)(N-2r_1)}\frac{1}{r_1} = \frac{Nr_1}{(q-1)(N-2r_1)}\frac{q-1}{2^*} = \frac{Nr_1(N-2)}{(N-2r_1)2N},$$

ou seja,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1(N-2)}{2(N-2r_1)} = \frac{2N(N-2)(1+\delta)}{2N(N+2-4-4\delta)} = \frac{(N-2)(1+\delta)}{N-2-4\delta} > 1+\delta.$$

Logo,

$$r_2 > (1+\delta)r_1$$

implicando que $r_2 \in (r_1, s_1)$. *Sendo* $B_1(0)$ *domínio limitado, por imersão de Sobolev, temos*

$$W^{2,r_1}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{s_1}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{r_2}(B_1(0)).$$

Como consequência disto, temos $p_1(x), p_2(x) \in L^{r_2}(B_1(0))$. *Fazendo uso dos mesmos argumentos usados anteriormente, concluimos que*

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_2}(B_1(0)) \times W^{2,r_2}(B_1(0)).$$

Da imersão de Sobolev, temos

$$W^{2,r_2}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{s_2}(B_1(0)), \quad onde \quad s_2 = \frac{Nr_2}{N-2r_2}.$$

Afirmamos que existe $r_3 \in (r_2, s_2)$ *tal que*

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_3}(B_1(0)) \times W^{2,r_3}(B_1(0)).$$

De fato, definindo $r_3 = \dfrac{s_2}{q-1}$, *temos* $r_3 < s_2$, *pois,* $q-1 > 1$. *Agora, note que*

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{Nr_2}{(q-1)(N-2r_2)}\frac{1}{r_2} = \frac{Nr_2}{(q-1)(N-2r_2)}\frac{q-1}{s_1} = \frac{Nr_2}{N-2r_2}\frac{N-2r_1}{Nr_1} = \frac{(N-2r_1)r_2}{(N-2r_2)r_1}$$

Desde que $r_1 < r_2$, *segue que* $N - 2r_1 > N - 2r_2$, *o que implia*

$$\frac{N-2r_1}{N-2r_2} > 1.$$

Assim, pelo fato de $\dfrac{r_2}{r_1} > 1 + \delta$, *obtemos*

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{(N-2r_1)r_2}{(N-2r_2)r_1} > 1+\delta.$$

Logo,

$$r_3 > (1+\delta)r_2,$$

implicando que $r_3 \in (r_2, s_2)$. *Sendo,* $B_1(0)$ *domínio limitado, por imersão de Sobolev, temos*

$$W^{2,r_2}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{s_2}(B_1(0)) \hookrightarrow L^{r_3}(B_1(0)).$$

Como consequência disto, $p_1(x), p_2(x) \in L^{r_3}(B_1(0))$. *Fazendo uso dos mesmos argumentos usados anteriormente, concluímos que*

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r_3}(B_1(0)) \times W^{2,r_3}(B_1(0)).$$

Prosseguindo com os mesmos passos, após a n-éssima iteração obtemos

$$r_{n+1} = \frac{1}{q-1}\left(\frac{Nr_n}{N-2r_n}\right).$$

Observe que $r_{n+1} \to \infty$, *quando* $n \to \infty$, *portanto,*

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in W^{2,r}_{loc}(\mathbb{R}^N) \times W^{2,r}_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad \forall \;\; 2 \leqslant r < \infty.$$

Da imersão de Sobolev, temos

$$(\hat{u}, \hat{v}) \in C^{1,\beta}(\mathbb{R}^N) \times C^{1,\beta}(\mathbb{R}^N), \quad para \quad \beta \in (0,1).$$

□

Proposição 2.3. *Se* (V_3') *é válido, então a solução ground state é positiva.*
Demonstração: *Seja* $(\hat{u}, \hat{v}) \in E\backslash\{(0,0)\}$ *a solução ground state não-negativa que obtemos*

na Proposição 2.2. Como $(\hat{u},\hat{v}) \neq (0,0)$, assumimos sem perda de generalidade que $\hat{u} \neq 0$ e supomos que $\hat{v} = 0$. Assim,

$$0 = \langle I'(\hat{u},0),(0,\psi)\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\hat{u}\psi dx, \quad \forall \ \ \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Com a condição de que $\lambda(x)$ seja positivo, temos $\hat{u} = 0$, o que é uma contradição, assim, $\hat{v} \neq 0$.

Tomando $(\varphi,0)$ como uma função teste, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I'(\hat{u},\hat{v}),(\varphi,0)\rangle = ((\hat{u},\hat{v}),(\varphi,0))_E - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|\hat{u}|^{p-2}\hat{u}\varphi + \lambda(x)\hat{v}\varphi)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\hat{u}\nabla\varphi + V_1(x)\hat{u}\varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|\hat{u}|^{p-2}\hat{u}\varphi + \lambda(x)\hat{v}\varphi)dx, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\hat{u}\nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)\hat{u}\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mu|\hat{u}|^{p-2}\hat{u}\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\hat{u}\varphi dx \geqslant 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, deduzimos que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(-\hat{u})\nabla\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[-V_1(x)\right](-\hat{u})\varphi dx \leqslant 0, \quad \forall \ \ \varphi \geqslant 0, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Além disso, uma vez que $V_1(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)\varphi dx \leqslant 0, \quad \forall \ \ \varphi \geqslant 0, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Para provar que $(\hat{u},\hat{v})$ é positivo supomos que existe $p \in \mathbb{R}^N$ tal que $\hat{u}(p) = 0$. Assim, com a condição de que $-\hat{u} \leqslant 0$ em $\mathbb{R}^N$, para qualquer $R > 0$, temos da definição de supremo que

$$0 = \sup_{B_R(p)} (-\hat{u}) = \sup_{\mathbb{R}^N} (-\hat{u})$$

Pelo princípio do Máximo Forte, [Ver Teorema A.9], concluímos que $-\hat{u}$ é constante. Logo, como $-\hat{u}(p) = \hat{u}(p) = 0$, então $-\hat{u} \equiv 0$ em todo ponto de $\mathbb{R}^N$, o que é uma contradição. Portanto $\hat{u} > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Analogamente podemos provar que $\hat{v} > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Assim a solução ground state $(\hat{u}, \hat{v})$ é positiva. □

Demonstração do Teorema 2.1: *Na Proposição 2.1 provamos a existência da Solução ground state para o sistema (S_μ). Na Proposição 2.2 foi provado que a Solução ground state é não-negativa com a condição de que (V_3) seja válido, para todo $\mu \geqslant 0$. Por fim, provamos na Proposição 2.3 que se (V_3') é válido, então a solução ground state é positiva.*
Portanto, o Teorema 2.1 segue das Proposições 2.1 - 2.3. □

2.2 Caso Crítico

Nesta seção, mostraremos a existência de solução ground state não-negativa e positiva para o sistema (S_μ) para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$.

O principal resultado dessa seção é o seguinte Teorema:

Teorema 2.2. *Suponha que (V_1)-(V_3) sejam válidos. Se $2 < p < q = 2^*$, então existe $\mu_0 > 0$ de modo que o sistema (S_μ) possui uma solução ground state não-negativa $(u_0, v_0) \in E$, para todo $\mu \geqslant \mu_0$. Se (V_3') é válido, então a solução ground states é positiva.*
Para provar este teorema, necessitamos do seguinte lema:

Lema 2.1. *Existe $\mu_0 > 0$ tal que $c_{\aleph} < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$, para todo $\mu \geqslant \mu_0$.*
Demonstração: *Vamos considerar $(u, v) \in E$ tal que, $u, v \geqslant 0$. Vamos denotar $u_\mu = \mu u$ e $v_\mu = \mu v$. Do Lema 1.3 para qualquer $\mu > 0$, existe um único $t_\mu > 0$ tal que $(t_\mu u_\mu, t_\mu v_\mu) \in \aleph$. Daí, segue-se de (1.9) que,*

$$\|(t_\mu \mu u, t_\mu \mu v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t_\mu \mu u t_\mu \mu v dx = \mu \|t_\mu \mu u\|_p^p + \|t_\mu \mu v\|_q^q.$$

O que implica que

$$(t_\mu\mu)^2\|(u,v)\|_E^2 - 2(t_\mu\mu)^2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx = (t_\mu\mu)^p\mu\|u\|_p^p + (t_\mu\mu)^q\|v\|_q^q.$$

Assim,

$$(t_\mu\mu)^2\|(u,v)\|_E^2 = (t_\mu\mu)^p\mu\|u\|_p^p + (t_\mu\mu)^{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*} + 2(t_\mu\mu)^2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx, \tag{2.4}$$

implicando

$$\|(u,v)\|_E^2 = (t_\mu\mu)^{p-2}\mu\|u\|_p^p + (t_\mu\mu)^{2^*-2}\|v\|_{2^*}^{2^*} + 2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx \geqslant (t_\mu\mu)^{2^*-2}\|v\|_{2^*}^{2^*}.$$

Assim, segue-se que, $(t_\mu\mu)_\mu$ *é uma sequência limitada. Passando para uma subsequência se necessário, podemos assumir que* $t_\mu\mu \to \hat{t} \geqslant 0$, *quando* $\mu \to \infty$.
Se $\hat{t} > 0$, *então*

$$(t_\mu\mu)^p\mu\|u\|_p^p + (t_\mu\mu)^{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*} + 2(t_\mu\mu)^2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx \to \infty, \quad \textit{quando} \quad \mu \to \infty.$$

Como $(t_\mu\mu)_\mu$ *é uma sequência limitada, então este limite contradiz (2.4). Portanto,* $t_\mu\mu \to 0$ *quando* $\mu \to \infty$.

Desde que $c_\aleph = \inf_{(u,v)\in\aleph} I(u,v)$, *existe* $\mu_0 > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned}
c_\aleph &\leqslant I(t_\mu\mu u, t_\mu\mu v)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|(t_\mu\mu u, t_\mu\mu v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)t_\mu\mu u t_\mu\mu v dx\right) - \frac{\mu}{p}\|t_\mu\mu u\|_p^p - \frac{1}{2^*}\|t_\mu\mu v\|_{2^*}^{2^*}\\
&= \frac{(t_\mu\mu)^2}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx\right) - \frac{(t_\mu\mu)^p}{p}\mu\|u\|_p^p - \frac{(t_\mu\mu)^{2^*}}{2^*}\|v\|_{2^*}^{2^*}\\
&\leqslant \frac{(t_\mu\mu)^2}{2}\|(u,v)\|_E^2 < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}, \quad \forall \quad \mu \geqslant \mu_0.
\end{aligned}$$

$\square$

Demonstração do Teorema 2.2: *De forma análoga ao Teorema 2.1, temos uma sequência* $(u_n, v_n)_n \subset \aleph$ *que satisfaz (2.1). Além disso, a sequência é limitada e* $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0)$ *em* E*. Temos também que* (u_0, v_0) *é um ponto crítico do funcional energia* I*. Analogamente a prova do Teorema 2.1, dividimos a prova em dois casos*

Caso 1: $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$.

A demonstração deste caso é analoga a prova do caso subcrítico na Proposição 2.1

Caso 2: $(u_0, v_0) = (0, 0)$.

Seja $\mu_0 > 0$ *o parâmetro que obtivemos no Lema 2.1. Afirmamos que se* $\mu \geqslant \mu_0$*, então existe uma sequência* $(y_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ *e constantes* $R, \varepsilon > 0$ *de modo que*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2)dx \geqslant \varepsilon > 0. \tag{2.5}$$

Vamos supor que (2.5) não seja válido. Assim, para qualquer $R > 0$*, pelo Lema A.2*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} u_n^2 dx = 0 \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} v_n^2 dx = 0.$$

O que implica que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} (u_n^2 + v_n^2)dx = 0.$$

Do Lema de Lions [ver Lema A.1] temos que, $u_n \to 0$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$*, para* $2 < p < 2^*$*. Note que*

$$\begin{aligned} I(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v_n\|_q^q \\ &= \frac{p-2}{2p}\mu\|u_n\|_p^p + \frac{2^*-2}{2^*2}\|v_n\|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{p-2}{2p}\mu\|u_n\|_p^p + \frac{1}{N}\|v_n\|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Por este fato, de (2.1) e do Lema de Lions, obtemos

$$
\begin{aligned}
Nc_{\aleph} + o_n(1) &= N(I(u_n,v_n)) - N\left(\frac{1}{2}\langle I'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle + \frac{p-2}{2p}\mu\|u_n\|_p^p\right)\\
&= N\left(I(u_n,v_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle - \frac{p-2}{2p}\mu\|u_n\|_p^p\right) = \|v_n\|_{2^*}^{2^*}.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
Nc_{\aleph} + o_n(1) = \|v_n\|_{2^*}^{2^*} + \mu\|u_n\|_p^p + \langle I'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle = \|(u_n,v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_nv_ndx.
$$

Seja S *a melhor constante na imersão* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2dx \geqslant S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}},
$$

onde

$$
D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.
$$

Se $v_n \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, *então*

$$
\|v_n\|_{2^*}^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}.
$$

O que implica que

$$
S\|v_n\|_{2^*}^2 = S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2dx.
$$

Assim,

$$
\|v_n\|_{2^*}^2 \leqslant \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2dx,
$$

o que fornece

$$
\|v_n\|_{2^*}^{2^*} \leqslant \frac{1}{S^{\frac{2^*}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2dx\right)^{\frac{2^*}{2}}.
$$

Logo,

$$\|v_n\|_{2^*}^{2^*} \leqslant S^{\frac{-N}{N-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx\right)^{\frac{\frac{2N}{N-2}}{2}} = S^{\frac{-N}{N-2}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2N}{N-2}} = S^{\frac{-N}{N-2}} \|\nabla v_n\|_2^{\frac{2N}{N-2}}.$$

Note ainda que

$$\begin{aligned} S^{\frac{-N}{N-2}} \|\nabla v_n\|_2^{\frac{2N}{N-2}} &\leqslant S^{\frac{-N}{N-2}} \left[\left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2N}{N-2}} \\ &= S^{\frac{-N}{N-2}} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx\right)^{\frac{N}{N-2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$Nc_{\aleph} + o_n(1) = \|v_n\|_{2^*}^{2^*} \leqslant S^{\frac{-N}{N-2}} \|\nabla v_n\|_2^{\frac{2N}{N-2}} \leqslant S^{\frac{-N}{N-2}} \left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) u_n v_n dx\right)^{\frac{N}{N-2}}.$$

Concluimos que

$$Nc_{\aleph} + o_n(1) \leqslant \left(\frac{Nc_{\aleph}}{S}\right)^{\frac{N}{N-2}} + o_n(1).$$

Logo, $S^{\frac{N}{N-2}} \leqslant \dfrac{(Nc_{\aleph})^{\frac{N}{N-2}}}{Nc_{\aleph}} = (Nc_{\aleph})^{\frac{2}{N-2}}$. *Assim,* $\sqrt[\frac{2}{N-2}]{S^{\frac{N}{N-2}}} \leqslant Nc_{\aleph}$. *Portanto,*

$$c_{\aleph} \geqslant \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

o que contradiz o Lema 2.1. Uma vez que (2.5) é válido, podemos considerar a sequência de mudança

$$(\hat{u_n}(x), \hat{v_n}(x)) = (u_n(x + y_n), v_n(x + y_n)).$$

Agora, basta repetir os mesmos argumentos que usamos na prova do Teorema 2.1 para concluir a demonstração. □

Capítulo 3

Existência de Solução para o Sistema $\hat{S}_\mu$

Neste capítulo mostraremos a existência de solução ground state não-negativa e positiva para o sistema $(\hat{S}_\mu)$ para o caso subcrítico $2 < p \leqslant q < 2^*$ e para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Suponha que $(V_1) - (V_6)$ sejam válidos. Se $2 < p \leqslant q < 2^*$, então existe uma solução ground state não-negativa $(u_0, v_0) \in C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N) \times C^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para o sistema $(\hat{S}_\mu)$, para todo $\mu \geqslant 0$. Além disso, se $2 < p < q = 2^*$, então existe $\mu_0 > 0$ de modo que o sistema $(\hat{S}_\mu)$ possui uma solução ground state não-negativa para todo $\mu \geqslant \mu_0$. Se (V_6') é válido, então as ground states são positivas.*

Recordemos o sistema

$$(\hat{S}_\mu) \begin{cases} -\Delta u + \hat{V}_1(x)u = \mu|u|^{p-2}u + \hat{\lambda}(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \hat{V}_2(x)v = |v|^{q-2}v + \hat{\lambda}(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Para a prova deste Teorema, estudaremos a existência de solução ground state para *o caso asintoticamente periódico, onde a diferença entre* $V_i(x), \lambda(x)$ *e* $\hat{V}_i(x), \hat{\lambda}(x)$ *é a 1-periodicidade, necessária para* $V_i(x)$ *e* $\lambda(x)$. *Assim, se* $\hat{V}_i(x)$ *e* $\hat{\lambda}(x)$ *são potenciais periódicos, podemos proceder de forma análoga aos Teoremas 2.1 e 2.2 para conseguir uma solução ground state para o sistema* $(\hat{S}_\mu)$. *Suponhamos que eles não sejam periódicos. Associado ao sistema* $(\hat{S}_\mu)$, *temos o funcional energia*

$$\hat{I}(u,v) = \frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|^2_{\hat{E}} - 2\int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x)uvdx\right) - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q.$$

A Variedade Nehari associada ao sistema $(\hat{S}_\mu)$ *é definido por*

$$\hat{\aleph} = \left\{(u,v) \in \hat{E}\backslash\{(0,0)\} : \langle \hat{I}'(u,v), (u,v)\rangle = 0\right\}$$

e a energia de Ground State é dada por

$$c_{\hat{\aleph}} = \inf_{\hat{\aleph}} \hat{I}(u,v).$$

De maneira análoga ao Lema 1.5, temos

$$\hat{I}(u,v) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(1-\delta)\|(u,v)\|^2_{\hat{E}} \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(1-\delta)\alpha > 0, \quad \forall \quad (u,v) \in \hat{\aleph}.$$

Como consequência, temos $c_{\hat{\aleph}} > 0$.

A seguir mostraremos um resultado que estabelece uma relação entre os níveis $c_{\hat{\aleph}}$ *e* $c_\aleph$.

Lema 3.1. $c_{\hat{\aleph}} \leqslant c_\aleph$

Demonstração: *Seja* $(u_0, v_0) \in \aleph$ *a solução ground state não-negativa para o sistema* (S_μ). *Realizando um processo semelhante ao que foi feito no Lema 1.3 para* $\hat{I}$ *e* $\hat{\aleph}$, *existe um único* $t_0 > 0$, *dependendo apenas de* (u_0, v_0), *de modo que* $(t_0u_0, t_0v_0) \in \hat{\aleph}$. *Usando* (V_4) *obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big((\hat{V}_1(x)-V_1(x))u_0^2+(\hat{V}_2(x)-V_2(x))v_0^2+(\lambda(x)-\hat{\lambda}(x))u_0v_0\Big)dx<0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\hat{V}_1(x)u_0^2+\hat{V}_2(x)v_0^2-\hat{\lambda}(x)u_0v_0)dx-\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u_0^2+V_2(x)v_0^2-\lambda(x)u_0v_0)dx<0.$$

Como $\hat{V}_i(x)<V_i(x)$, *então* $\frac{1}{2}\hat{V}_i<\frac{1}{2}V_i(x)$. *Logo,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}(\hat{V}_1(x)u_0^2 &+ \hat{V}_2(x)v_0^2)dx-\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_0v_0dx-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}(V_1(x)u_0^2+V_2(x)v_0^2)dx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)u_0v_0dx<0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}(|\nabla u_0|^2 &+ \hat{V}_1(x)u_0^2)dx+\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}(|\nabla v_0|^2+\hat{V}_2(x)v_0^2)dx-\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_0v_0dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}(|\nabla u_0|^2+V_1(x)u_0^2)dx-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}(|\nabla v_0|^2+V_2(x)v_0^2)dx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)u_0v_0dx\end{aligned}$$

O que implica

$$\frac{1}{2}\|(u_0,v_0)\|_{\hat{E}}^2-\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_0v_0dx-\frac{1}{2}\|(u_0,v_0)\|_E^2+\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)u_0v_0dx<0.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\left(\|(u_0,v_0)\|_{\hat{E}}^2-2\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_0v_0dx\right)-\frac{1}{2}\left(\|(u_0,v_0)\|_E^2-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)u_0v_0dx\right)<0.$$

Multiplicando por t_0^2, *a expressão acima, obtemos*

$$\frac{t_0^2}{2}\left(\|(u_0,v_0)\|_{\hat{E}}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_0v_0dx\right) - \frac{t_0^2}{2}\left(\|(u_0,v_0)\|_{E}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)u_0v_0dx\right) < 0.$$

Logo,

$$\hat{I}(t_0u_0,t_0v_0) - I(t_0u_0,t_0v_0) < 0.$$

Como $(t_0u_0,t_0v_0) \in \hat{\aleph}$*, então* $c_{\hat{\aleph}} \leqslant \hat{I}(t_0u_0,t_0v_0) < I(t_0u_0,t_0v_0)$

Uma vez que (u_0,v_0) *é uma solução ground state para o sistema* (S_μ) *e* $t_0 > 0$*, usando o Lema 1.4 temos*

$$I(t_0u_0,t_0v_0) \leqslant I(u_0,v_0) = c_{\aleph}.$$

Concluindo a demonstração do Lema. □

Observação 3.1. *Seja* $(u_n,v_n)_n \subset \hat{\aleph}$ *a sequência minimizante que satisfaz*

$$\hat{I}(u_n,v_n) \to c_{\hat{\aleph}} \quad e \quad \hat{I}|_{\hat{\aleph}}'(u_n,v_n) \to 0. \tag{3.1}$$

Note que (u_n,v_n) *é limitado em* $\hat{E}$*. De fato, de (1.9), temos*

$$\begin{aligned}
\hat{I}(u_n,v_n) &= \frac{1}{2}\left(\|(u_n,v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_nv_ndx\right) - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\
&= \frac{1}{2}\left(\mu\|u_n\|_p^p + \|v_n\|_q^q\right) - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left(\|(u_n,v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_nv_ndx\right) + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|v_n\|_q^q.
\end{aligned}$$

Assim, desde que, $2 < p \leq q$*, segue do Lema 1.1*

$$\hat{I}(u_n,v_n) \geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)(1-\delta)\|(u_n,v_n)\|_{\hat{E}}^2.$$

Desde que $(\hat{I}(u_n,v_n))_n$ *é uma sequência limitada, deduzimos que* $(u_n,v_n)_n$ *é limitada em* $\hat{E}$*, passando para uma subsequência, se necessário, temos*

$$(u_n, v_n)_n \rightharpoonup (u_0, v_0) \quad em \quad \hat{E}.$$

Proposição 3.1. *O limite fraco (u_0, v_0) da sequência minimizante $(u_n, v_n)_n$ é não-trivial.*

Demonstração: *Suponhamos que $(u_0, v_0) = (0, 0)$. Das imersões compactas*

$$u_n \to 0 \quad e \quad v_n \to 0 \quad em \quad L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad \forall \quad 2 \leqslant p < 2^*$$

e dos resultados de medida

$$u_n(x) \to 0 \quad e \quad v_n(x) \to 0 \quad q.t.p \quad em \quad \mathbb{R}^N.$$

Resulta da condição (V_4) que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|V_1(x) - \hat{V}_1(x)| < \varepsilon, |V_2(x) - \hat{V}_2(x)| < \varepsilon, |\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)| < \varepsilon, \quad para \quad |x| \geqslant R, \tag{3.2}$$

pois, $\lim\limits_{|x|\to\infty} |V_i(x) - \hat{V}_i(x)| = 0$ e $\lim\limits_{|x|\to\infty} |\hat{\lambda}(x) - \lambda(x)| = 0$.
Note que,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) - \hat{V}_1(x)) u_n^2 dx \right| \leqslant \int_{B_R(0)} |V_1(x) - \hat{V}_1(x)| u_n^2 dx + C_\varepsilon \int_{B_R(0)^c} u_n^2 dx.$$

Desde que $\hat{E}_i$ é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p \in [2, 2^*]$, temos

$$C_\varepsilon \int_{B_R(0)^c} u_n^2 dx \leqslant C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx = C_\varepsilon \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_\varepsilon \|u_n\|^2_{\hat{E}_1}.$$

Uma vez que $B_R(0)$ é compacta e $V_1(x), \hat{V}_1(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$, existe $C_1, \hat{C}_1 > 0$, tais que $|V_1(x)| \leqslant C_1$ e $|\hat{V}_1(x)| \leqslant \hat{C}_1$, $\forall \ x \in B_R(0)$. Da definição de norma em L^∞_{loc}, temos

$$\|V_1\|_{L^\infty_{loc}} = \inf\{C_1; |V_1(x)| \leqslant C_1, x \in B_R(0)\} \quad e \quad \|\hat{V}_1\|_{L^\infty_{loc}} = \inf\{\hat{C}_1; |\hat{V}_1(x)| \leqslant \hat{C}_1, x \in B_R(0)\}.$$

Usando a desigualdade triangular, temos

$$|V_1(x) - \hat{V}_1(x)| \leqslant |V_1(x)| + |\hat{V}_1(x)|.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} |V_1(x) - \hat{V}_1(x)| u_n^2 dx &\leqslant \int_{B_R(0)} (|V_1(x)| + |\hat{V}_1(x)|) u_n^2 dx \leqslant \int_{B_R(0)} (C_1 + \hat{C}_1) u_n^2 dx \\
&= \int_{B_R(0)} \left(\|V_1\|_{L^\infty_{loc}} + \|\hat{V}_1\|_{L^\infty_{loc}} \right) u_n^2 dx \\
&= \left(\|V_1\|_{L^\infty_{loc}} + \|\hat{V}_1\|_{L^\infty_{loc}} \right) \int_{B_R(0)} u_n^2 dx \\
&= \left(\|V_1\|_{L^\infty_{loc}} + \|\hat{V}_1\|_{L^\infty_{loc}} \right) \|u_n\|_{L^2_{B_R(0)}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) - \hat{V}_1(x)) u_n^2 dx \right| &\leqslant \int_{B_R(0)} |V_1(x) - \hat{V}_1(x)| u_n^2 dx + C_\varepsilon \int_{B_R(0)^c} u_n^2 dx \\
&\leqslant \left(\|V_1\|_{L^\infty_{loc}} + \|\hat{V}_1\|_{L^\infty_{loc}} \right) \|u_n\|^2_{L^2(B_R(0))} + C_\varepsilon \|u_n\|^2_{\hat{E}_1}.
\end{aligned}$$

Como $(u_n, v_n)_n$ é uma sequência limitada em $\hat{E}$, então u_n é limitada em $\hat{E}_1$, logo, existe $C > 0$ tal que $\|u_n\|^2_{\hat{E}_1} < C$. Assim, $C_\varepsilon \|u_n\|^2_{\hat{E}_1} \leqslant C_\varepsilon$. Desde que $u_n \to 0$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n\|_{L^p_{loc}} < \varepsilon$, $\forall \;\; n \geqslant n_0$, em particular $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$. Usando (3.2), imersão de Sobolev e convergência local, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) - \hat{V}_1(x)) u_n^2 dx \right| \leqslant \left(\|V_1\|_{L^\infty_{loc}} + \|\hat{V}_1\|_{L^\infty_{loc}} \right) \varepsilon + C_\varepsilon, \quad \forall \;\; n \geqslant n_0.$$

Analogamente, obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (V_2(x) - \hat{V}_2(x)) v_n^2 dx \right| \leqslant \left(\|V_2\|_{L^\infty_{loc}} + \|\hat{V}_2\|_{L^\infty_{loc}} \right) \varepsilon + C_\varepsilon.$$

Note ainda que,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(\hat{\lambda}(x)-\lambda(x))u_nv_ndx\right| \leqslant \int_{B_R(0)}|\hat{\lambda}(x)-\lambda(x)||u_n||v_n|dx + C_\varepsilon\int_{B_R(0)^c}|u_n||v_n|dx.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$C_\varepsilon\int_{B_R(0)^c}|u_n||v_n|dx \leqslant C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|u_n||v_n|dx = C_\varepsilon\|u_nv_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_\varepsilon\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que $\hat{E}_i$ é imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p\in[2,2^*]$, temos

$$C_\varepsilon\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_\varepsilon\|u_n\|_{\hat{E}_1}\|v_n\|_{\hat{E}_2}.$$

Recordando que u_n é limitada em $\hat{E}_1$ e v_n é limitada em $\hat{E}_2$, obtemos

$$C_\varepsilon\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_\varepsilon\|u_n\|_{\hat{E}_1}\|v_n\|_{\hat{E}_2} \leqslant C_\varepsilon.$$

Pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)}|\hat{\lambda}(x)-\lambda(x)||u_n||v_n|dx &\leqslant \left(\|\hat{\lambda}\|_{L^\infty_{loc}}+\|\lambda\|_{L^\infty_{loc}}\right)\|u_n\|_{L^2(B_R(0))}\|v_n\|_{L^2(B_R(0))}\\ &\leqslant \left(\|\hat{\lambda}\|_{L^\infty_{loc}}+\|\lambda\|_{L^\infty_{loc}}\right)\varepsilon.\end{aligned}$$

Usando novamente (3.2),

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}(\hat{\lambda}(x)-\lambda(x))u_nv_ndx\right| \leqslant \left(\|\hat{\lambda}\|_{L^\infty_{loc}}+\|\lambda\|_{L^\infty_{loc}}\right)\varepsilon + C_\varepsilon, \quad \forall \quad n\geqslant n_0.$$

Assim, concluimos que

$$
\begin{aligned}
I(u_n,v_n)-\hat{I}(u_n,v_n) &= \frac{1}{2}\Big(\|(u_n,v_n)\|_E^2-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)u_nv_ndx\Big)-\frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p-\frac{1}{q}\|v_n\|_q^q\\
&- \frac{1}{2}\Big(\|(u_n,v_n)\|_{\hat{E}}^2-2\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_nv_ndx\Big)+\frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p+\frac{1}{q}\|v_n\|_q^q\\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)-\hat{V}_1(x))u_n^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}(V_2(x)-\hat{V}_2(x))v_n^2dx\Big)\\
&+ \frac{1}{2}\Big(2\int_{\mathbb{R}^N}(\hat{\lambda}(x)-\lambda(x))u_nv_ndx\Big)=o_n(1)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\langle I'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle-\langle \hat{I}'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle &= \|(u_n,v_n)\|_E^2-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)u_nv_ndx-\mu\|u_n\|_p^p\\
&- \|v_n\|_q^q-\|(u_n,v_n)\|_{\hat{E}}^2+2\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\lambda}(x)u_nv_ndx\\
&+ \mu\|u_n\|_p^p+\|v_n\|_q^q=\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)-\hat{V}_1(x))u_n^2dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}(V_2(x)-\hat{V}_2(x))v_n^2dx\\
&+ 2\int_{\mathbb{R}^N}(\hat{\lambda}(x)-\lambda(x))u_nv_ndx=o_n(1),
\end{aligned}
$$

que juntamente com (3.1) implicam

$$
I(u_n,v_n)=c_{\hat{\aleph}}+o_n(1) \quad e \quad \langle I'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle=o_n(1). \tag{3.3}
$$

Desde que $(u_n,v_n)\subset E\backslash\{(0,0)\}$*, do Lema 1.3, existe uma sequência* $(t_n)_n\subset(0,\infty)$ *de modo que* $(t_nu_n,t_nv_n)\subset\aleph$.

Afirmação 3.1. $\limsup\limits_{n\to\infty} t_n\leqslant 1$

Suponhamos que existe $\varepsilon_0>0$ *tal que, passando a uma subsequência, temos* $t_n\geqslant 1+\varepsilon_0$*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*. Assim, usando (3.3) e o fato de que* $(t_nu_n,t_nv_n)\subset\aleph$*, segue de (1.9) que*

$$\|(t_nu_n, t_nv_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)t_nu_nt_nv_ndx - \mu\|t_nu_n\|_p^p - \|t_nv_n\|_q^q = 0.$$

Passando o limite com $n \to \infty$, temos

$$\|(t_nu_n, t_nv_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)t_nu_nt_nv_ndx - \mu\|t_nu_n\|_p^p - \|t_nv_n\|_q^q = o_n(1).$$

O que implica

$$t_n^2\left(\|(u_n, v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)u_nv_ndx\right) - \mu t_n^p\|u_n\|_p^p - t_n^q\|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Novamente usando (1.9), temos

$$t_n^2\mu\|u_n\|_p^p + t_n^2\|v_n\|_q^q - t_n^p\mu\|u_n\|_p^p - t_n^q\|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Multiplicando essa expressão por $\left(-\dfrac{1}{t_n^2}\right)$*, tem-se*

$$-\mu\|u_n\|_p^p - \|v_n\|_p^p + t_n^{p-2}\mu\|u_n\|_p^p + t_n^{q-2}\|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Logo,

$$(t_n^{p-2} - 1)\mu\|u_n\|_p^p + (t_n^{q-2} - 1)\|v_n\|_q^q = o_n(1).$$

Como $t_n \geqslant 1 + \varepsilon_0$, temos

$$((1+\varepsilon_0)^{p-2} - 1)\mu\|u_n\|_p^p + ((1+\varepsilon_0)^{q-2} - 1)\|v_n\|_q^q \leqslant (t_n^{p-2} - 1)\mu\|u_n\|_p^p + (t_n^{q-2} - 1)\|v_n\|_q^q = o_n(1) \tag{3.4}$$

De maneira análoga à prova dos Teoremas 2.1 e 2.2, existe uma sequência $(y_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $R, \varepsilon > 0$ tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2)dx \geqslant \varepsilon > 0. \tag{3.5}$$

Observe que, quando $q = 2^*$, (3.5) é válido para os parâmetros $\mu \geqslant \mu_0$, onde μ_0 foi introduzido no Lema 2.1.

Definimos $(\hat{u_n}(x), \hat{v_n}(x)) = (u_n(x + y_n), v_n(x + y_n))$. Segue-se da hipótese (V_4) que $\hat{V_1}, \hat{V_2} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, fazendo uso da imersão continua $\hat{E_i} \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ deduzimos que $(\hat{u_n}, \hat{v_n})$ é limitada em $\hat{E}$. Assim, passando a uma subsequência se necessário, podemos considerar $(\hat{u_n}, \hat{v_n}) \rightharpoonup (\hat{u}, \hat{v})$ em $\hat{E}$.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} (\hat{u_n}^2 + \hat{v_n}^2)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} (u_n^2 + v_n^2)dx \geqslant \varepsilon > 0.$$

implicando que $(\hat{u}, \hat{v}) \neq (0, 0)$. Assim, ao usar (3.4) e a semicontinuidade da norma obtemos

$$0 < ((1 + \varepsilon_0)^{p-2} - 1)\mu\|\hat{u}\|_p^p + ((1 + \varepsilon_0)^{q-2} - 1)\|\hat{v}\|_q^q \leqslant o_n(1).$$

O que é um absurdo, pois teriamos $0 < 0$. Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leqslant 1.$$

Afirmação 3.2. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $t_n \geqslant 1$, para $n \geqslant n_0$.*

Vamos supor que $t_n < 1$, Desde que

$$(t_n u_n, t_n v_n) \subset \aleph \quad e \quad c_\aleph = \inf_{(u,v)\in\aleph} I(u, v),$$

segue-se

$$c_\aleph \leqslant I(t_n u_n, t_n v_n) = \frac{1}{2}\left(\|(t_n u_n, t_n v_n)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) t_n u_n t_n v_n dx\right) - \frac{\mu}{p}\|t_n u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|t_n v_n\|_q^q.$$

De (1.9) temos

$$
\begin{aligned}
c_{\aleph} &\leqslant \frac{1}{2}(\mu\|t_n u_n\|_p^p + \|t_n v_n\|_q^q) - \frac{\mu}{p}\|t_n u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|t_n v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu t_n^p \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) t_n^q \|v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{p-2}{2p}\right)\mu t_n^p \|u_n\|_p^p + \left(\frac{q-2}{2q}\right) t_n^q \|v_n\|_q^q.
\end{aligned}
$$

Desde que, $t_n < 1$, concluímos

$$
c_{\aleph} \leqslant \left(\frac{p-2}{2p}\right)\mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{q-2}{2q}\right) \|v_n\|_q^q.
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{p-2}{2p}\right)\mu \|u_n\|_p^p &+ \left(\frac{q-2}{2q}\right) \|v_n\|_q^q = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu \|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \|v_n\|_q^q \\
&= \frac{\mu}{2}\|u_n\|_p^p - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|v_n\|_q^q - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\
&= \frac{1}{2}\left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx\right) - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\
&- \frac{1}{2}\left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx\right) + \frac{\mu}{2}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{2}\|v_n\|_q^q \\
&= \hat{I}(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle \hat{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle.
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.2) segue que

$$
c_{\aleph} \leqslant \hat{I}(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle \hat{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle = c_{\hat{\aleph}} + o_n(1).
$$

Portanto, $c_{\aleph} \leqslant c_{\hat{\aleph}}$, contradizendo o Lema 3.1. Logo, a Afirmação 3.2 é verdadeira.

Observe que,

$$
\begin{aligned}
I(t_nu_n,t_nv_n)-I(u_n,v_n) &= \frac{1}{2}\left(\|(t_nu_n,t_nv_n)\|_E^2-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)t_nu_nt_nv_ndx\right)-\frac{\mu}{p}\|t_nu_n\|_p^p\\
&- \frac{1}{q}\|t_nv_n\|_q^q-\frac{1}{2}\left(\|(u_n,v_n)\|_E^2-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)u_nv_ndx\right)\\
&+ \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p+\frac{1}{q}\|v_n\|_q^q
\end{aligned}
$$

Assim, de (1.9) temos

$$
\begin{aligned}
I(t_nu_n,t_nv_n)-I(u_n,v_n) &= \frac{1}{2}\left(\mu\|t_nu_n\|_p^p+\|t_nv_n\|_q^q\right)-\frac{\mu}{p}\|t_nu_n\|_p^p-\frac{1}{q}\|t_nv_n\|_q^q\\
&- \frac{1}{2}\left(\mu\|u_n\|_p^p+\|v_n\|_q^q\right)+\frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p+\frac{1}{q}\|v_n\|_q^q\\
&= \left(\frac{t_n^p-1}{2}+\frac{1-t_n^p}{p}\right)\mu\|u_n\|_p^p+\left(\frac{t_n^q-1}{2}+\frac{1-t_n^q}{q}\right)\|u_n\|_q^q.
\end{aligned}
$$

Combinando as Afirmações 3.1 e 3.2, vem que

$$0\leqslant I(t_nu_n,t_nv_n)-I(u_n,v_n)\leqslant 0,$$

isto é,

$$I(t_nu_n,t_nv_n)-I(u_n,v_n)=o_n(1)$$

Daí, segue da definição de $c_{\aleph}$ e de (3.3) que

$$c_{\aleph}\leqslant I(t_nu_n,t_nv_n)=I(u_n,v_n)+o_n(1)=c_{\hat{\aleph}}+o_n(1).$$

O que contradiz novamente o Lema 3.1, portanto, $(u_0,v_0)\neq(0,0)$. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1: *Desde que (u_0,v_0) é um ponto crítico não-trivial do funcional energia $\hat{I}$, segue que $(u_0,v_0)\in\hat{\aleph}$. Portando, $c_{\hat{\aleph}}\leqslant\hat{I}(u_0,v_0)$. Por outro lado, usando a semicontinuidade da norma, temos*

$$
\begin{aligned}
c_{\hat{\aleph}} + o_n(1) &= \hat{I}(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\langle \hat{I}'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx\right) - \frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q \\
&- \frac{1}{2}\left(\|(u_n, v_n)\|_{\hat{E}}^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \hat{\lambda}(x) u_n v_n dx\right) + \frac{\mu}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|v_n\|_q^q \\
&= -\frac{\mu}{p}\|u_n\|_p^p - \frac{1}{q}\|v_n\|_q^q + \frac{\mu}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|v_n\|_q^q \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v_n\|_q^q.
\end{aligned}
$$

Pela definição de solução ground state,

$$
\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u_n\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v_n\|_q^q \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v_0\|_q^q.
$$

Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
c_{\hat{\aleph}} + o_n(1) &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\mu\|u_0\|_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\|v_0\|_q^q + o_n(1) \\
&= \hat{I}(u_0, v_0) - \langle \hat{I}'(u_0, v_0), (u_0, v_0)\rangle + o_n(1) \\
&= \hat{I}(u_0, v_0) + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Como consequência disto, temos, $c_{\hat{\aleph}} \geqslant \hat{I}(u_0, v_0)$. *Portanto,* $\hat{I}(u_0, v_0) = c_{\hat{\aleph}}$. *Agora, podemos usar os mesmos argumentos da prova do Teorema 2.1 para concluir que existe* $t_0 > 0$ *tal que* $(t_0|u_0|, t_0|v_0|) \in \hat{\aleph}$ *é uma solução ground state do sistema* $(\hat{S}_\mu)$, *para o caso subcrítico* $2 < p \leqslant q < 2^*$.

Para o caso crítico $2 < p < q = 2^*$, *decorre dos Lemas 2.1 e 3.1 que, existe* $\mu_0 > 0$ *tal que*

$$
c_{\hat{\aleph}} < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \quad \forall \quad \mu \geq \mu_0.
$$

Agora, podemos usar os mesmos argumentos da prova do Teorema 2.2 para concluir que existe $\mu_0 > 0$ de modo que o sistema $(\hat{S}_\mu)$ possui uma solução ground state para todo $\mu \geq \mu_0$.

$\square$

Capítulo 4

Resultado de não Existência de Solução para o Sistema S_μ

Neste capítulo apresentaremos o nosso último resultado deste trabalho e usaremos a identidade de Pohozaev para mostrar que o sistema (S_μ) não possui solução clássica positiva quando $p = q = 2^*$.

O principal resultado deste capítulo é

Teorema 4.1. *Assuma $p = q = 2^*$, Além disso, considere as seguintes hipóteses:*

(V_7) $0 \leqslant \langle \nabla V_i(x), x\rangle \leqslant CV_i(x)$;

(V_8) $|\langle \nabla \lambda(x), x\rangle| \leqslant C|\lambda(x)|$ *e* $\langle \nabla \lambda(x), x\rangle \leqslant 0$.

Então o sistema (S_μ) não tem solução clássica positiva para todo $\mu \geqslant \mu_0$.

Recordemos o sistema (S_μ):

$$(S_\mu)\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu|u|^{2^*-2}u + \lambda(x)v, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = |v|^{2^*-2}v + \lambda(x)u, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Para obtermos um resultado de não existência, iremos provar a seguinte identidade de Pohozaev.

Lema 4.1. *Suponha que* $(V_7), (V_8)$ *sejam válidos e* $N \geqslant 3$. *Se* $(u, v) \in E$ *é uma solução clássica de* (S_μ)*, então satisfaz a seguinte identidade de Pohozaev:*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mu |u|^{2^*} + |v|^{2^*} + 2^* \lambda(x) uv) dx \\
&+ \frac{2}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \lambda(x), x \rangle uv dx - \frac{2^*}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x) u^2 + V_2(x) v^2) dx \\
&- \frac{1}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} (\langle \nabla V_1(x), x \rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x \rangle v^2) dx.
\end{aligned}$$

Demonstração: *Seja* $(u, v) \in E$ *uma solução clássica do sistema* (S_μ). *Denotemos*

$$f(x, u, v) = -V_1(x) u + \mu |u|^{2^*-2} u + \lambda(x) v \quad e \quad g(x, u, v) = -V_2(x) v + |v|^{2^*-2} v + \lambda(x) u.$$

Consideremos a função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *definida por*

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & se \quad |t| \leqslant 1, \\ 0 & se \quad |t| \geqslant 2, \end{cases}$$

tal que $|\psi'(t)| \leqslant C$, *para algum* $C > 0$. *Definimos* $\psi_n(x) = \psi\Big(\frac{|x|^2}{n^2}\Big)$. *Note que*

$$\nabla \psi_n = \frac{1}{n^2} 2x \psi'\Big(\frac{|x|^2}{n^2}\Big) = \frac{2}{n^2} \psi'\Big(\frac{|x|^2}{n^2}\Big) x$$

e

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & se \quad |x| \leqslant n, \\ 0 & se \quad |x| \geqslant \sqrt{2} n. \end{cases}$$

Assim, temos

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = 1.$$

Multiplicando a primeira e a segunda equações de (S_μ) *pelos fatores* $\langle \nabla u, x\rangle \psi_n$ *e* $\langle \nabla v, x\rangle \psi_n$ *respectivamente e integrando-as, obtemos*

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \langle \nabla u, x\rangle \psi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u,v)\langle \nabla u, x\rangle \psi_n dx \tag{4.1}$$

e

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta v \langle \nabla v, x\rangle \psi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u,v)\langle \nabla v, x\rangle \psi_n dx. \tag{4.2}$$

Somando (4.1) e (4.2), temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta u \langle \nabla u, x\rangle + \Delta v \langle \nabla v, x\rangle)\psi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u,v)\langle \nabla u, x\rangle + g(x,u,v)\langle \nabla v, x\rangle)\psi_n dx \tag{4.3}$$

Note que, pela definição de divergente, temos

$$div(\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \nabla u) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} div(\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \nabla u) &= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \psi_n\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} \end{aligned}$$

realizando as operações necessárias, obtemos

$$div(\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \nabla u) = \langle \nabla(\langle \nabla u, x\rangle \psi_n), \nabla u\rangle + \langle \nabla u, x\rangle \psi_n div(\nabla u).$$

Pela regra do produto de derivadas e propriedade de produto interno, temos

$$
\begin{aligned}
div(\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \nabla u) &= \langle \psi_n \nabla(\langle \nabla u, x\rangle) + \langle \nabla u, x\rangle \nabla \psi_n, \nabla u\rangle + \langle \nabla u, x\rangle \psi_n \Delta u \\
&= \psi_n \langle \nabla(\langle \nabla u, x\rangle), \nabla u\rangle + \langle \nabla u, x\rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u\rangle + \langle \nabla u, x\rangle \psi_n \Delta u.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla(\langle \nabla u, x\rangle), \nabla u\rangle &= \left\langle \nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_N}x_N\right), \nabla u\right\rangle = \left\langle \nabla\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right), \nabla u\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right), ..., \sum_{1=i}^{N}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right)\right), \nabla u\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_i + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_1}x_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)
$$

$$
\vdots
$$

$$
\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_i + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_N}x_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)
$$

Fazendo

$$
\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_i, ..., \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_i\right) = w
$$

e

$$
\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_1}x_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), ..., \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_N}x_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) = z,
$$

temos,

$$
\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right), ..., \sum_{1=i}^{N}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right)\right) = w + z
$$

Note que,

$$
z = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = \nabla u
$$

Assim,

$$\langle \nabla(\langle \nabla u, x\rangle), \nabla u\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) x_i, ..., \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) x_i \right) + \nabla u, \nabla u \right\rangle.$$

Por propriedade de produto interno, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla(\langle \nabla u, x\rangle), \nabla u\rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) x_i, ..., \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) x_i \right), \nabla u \right\rangle + \langle \nabla u, \nabla u\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u}{\partial x_1} x_i + ... + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u}{\partial x_N} x_i + |\nabla u|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} x_j + |\nabla u|^2
\end{aligned}$$

Através de cálculos diretos, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} x_j &= \left\langle \nabla\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial u}{\partial_N}\right)\right), x \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right), x \right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \nabla(\langle \nabla u, x\rangle), \nabla u\rangle = \left\langle \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right), x \right\rangle + |\nabla u|^2,$$

de onde deduzimos que

$$div(\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \nabla u) = \psi_n \left\langle \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right), x \right\rangle + \psi_n |\nabla u|^2 + \langle \nabla u, x\rangle\langle \nabla \psi_n, \nabla u\rangle + \langle \nabla u, x\rangle \psi_n \Delta u.$$

O que implica que,

$$\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \Delta u = div(\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \nabla u) - \psi_n \left\langle \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right), x \right\rangle - \psi_n |\nabla u|^2 - \langle \nabla u, x\rangle\langle \nabla \psi_n, \nabla u\rangle.$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned}
div\left(\psi_n\frac{|\nabla u|^2}{2}x\right) &= div\left(\psi_n\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+\frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)x\right)\\
&= div\left(\psi_n\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x\right)\\
&= div\left(\psi_n\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_1,...,\psi_n\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_N\right)\\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\psi_n\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_j\right).
\end{aligned}$$

Pela regra do produto de derivadas, temos

$$\begin{aligned}
div\left(\psi_n\frac{|\nabla u|^2}{2}x\right) &= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\psi_n\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_j+\left(\sum_{i=1}^{N}\psi_n\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}x_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\psi_n\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)x_j+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\psi_n\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}x_j
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
div\left(\psi_n\frac{|\nabla u|^2}{2}x\right) &= \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi_n\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)x_1+...+\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\psi_n\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)x_N\\
&+ \left(\sum_{i=1}^{N}\psi_n\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1+...+\frac{\partial}{\partial x_N}x_N\right)\\
&= \left\langle\nabla\left(\psi_n\frac{|\nabla u|^2}{2}\right),x\right\rangle+\psi_n\frac{|\nabla u|^2}{2}div(x).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
div\left(\psi_n\frac{|\nabla u|^2}{2}x\right) &= \left\langle\psi_n\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)+\frac{|\nabla u|^2}{2}\nabla\psi_n,x\right\rangle+\psi_n\frac{|\nabla u|^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&= \psi_n\left\langle\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right),x\right\rangle+\frac{N}{2}\psi_n|\nabla u|^2+\frac{|\nabla u|^2}{2}\langle\nabla\psi_n,x\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi_n \left\langle \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right), x \right\rangle = div \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) - \frac{N}{2} \psi_n |\nabla u|^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u &= div(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) - \left(div \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) - \frac{N}{2} \psi_n |\nabla u|^2 - \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle \right) \\ &- \psi_n |\nabla u|^2 - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u &= div(\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \nabla u) - div \left(\psi_n \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) + \frac{N}{2} \psi_n |\nabla u|^2 \\ &+ \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle - \psi_n |\nabla u|^2 - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

Pela propriedade da soma do divergente, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u &= div \left(\psi_n \left(\langle \nabla u, x \rangle \nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) \right) + \frac{N-2}{2} \psi_n |\nabla u|^2 \\ &+ \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

Definindo

$$H(x,u) = \langle \nabla u, x \rangle \nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} x,$$

temos que,

$$\langle \nabla u, x \rangle \psi_n \Delta u = div(\psi_n H(x,u)) + \frac{N-2}{2} \psi_n |\nabla u|^2 + \frac{|\nabla u|^2}{2} \langle \nabla \psi_n, x \rangle - \langle \nabla u, x \rangle \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle \tag{4.4}$$

Denotamos $H^i(x,u)$ a coordenada i de $H(x,u)$ para $1 \leqslant i \leqslant N$, pelo Lema A.3, $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e desde que $supp(\psi_n) \subset B_{2n}(0)$, usando a definição de derivadas fracas *concluimos que*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} div(\psi_n H(x,u))dx &= \sum_{i=1}^{N}\int_{B_{2n}(0)} \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_n H^i(x,u))dx \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i}H^i(x,u) + \psi_n \frac{\partial}{\partial x_i}(H^i(x,u))\right)dx \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i}H^i(x,u) - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i}(H^i(x,u))\right)dx = 0.
\end{aligned}$$

Desde que, $\psi_n \leqslant 1$ *e* $\lim_{n\to\infty}\psi_n = 1$ *e da definição do espaço* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *temos que,*

- $|\psi_n|\nabla u|^2| \leqslant |\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $\psi_n|\nabla u|^2 \to |\nabla u|^2$, *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$*;*
- $\left|\frac{|\nabla u|^2}{2}\langle \nabla\psi_n, x\rangle\right| = \frac{1}{2}\langle \nabla\psi_n, x\rangle|\nabla u|^2 \leqslant C|\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $\frac{|\nabla u|^2}{2}\langle \nabla\psi_n, x\rangle \to 0$, *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$*;*
- $|\langle \nabla u, x\rangle\langle \nabla\psi_n, \nabla u\rangle| = |\langle \nabla u, \nabla u\rangle\langle \nabla\psi_n, x\rangle| = |\langle \nabla\psi_n, x\rangle|\nabla u|^2| \leqslant C|\nabla u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $\langle \nabla u, x\rangle\langle \nabla\psi_n, \nabla u\rangle \to 0$, *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

Assim sendo,

$$|\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \Delta u| \leqslant \left(\frac{N-2}{2}|\nabla u|^2 + C_1|\nabla u|^2 + C_2|\nabla u|^2\right) \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \Delta u \to \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2.$$

Daí segue que, integrando (4.4) e passando o limite, obtemos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, [ver Teorema A.6],

$$-\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\langle \nabla u, x\rangle \psi_n \Delta u dx = -\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx. \tag{4.5}$$

De forma análoga, deduzimos o limite

$$-\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla v, x\rangle\psi_n\Delta v dx = -\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2 dx. \tag{4.6}$$

O limite do lado esquerdo de (4.3) segue das convergências (4.5) e (4.6), isto é,

$$-\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta u\langle\nabla u, x\rangle + \Delta v\langle\nabla v, x\rangle)\psi_n dx = -\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx$$

Defina

$$F(x,u,v) = -\frac{1}{2}V_1(x)u^2 + \frac{\mu}{2^*}|u|^{2^*} + \lambda(x)uv,$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
div(\psi_n F(x,u,v)x) &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi_n F(x,u,v)x\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{\partial\psi_n F(x,u,v)}{\partial x_i}\right)x_i + \psi_n F(x,u,v)\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\psi_n F(x,u,v)}{\partial x_i}\right)x_i + \sum_{i=1}^{N}\psi_n F(x,u,v)\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\\
&= \langle\nabla(\psi_n F(x,u,v)), x\rangle + \psi_n F(x,u,v) div(x).
\end{aligned}$$

Pela regra do produto de derivadas e propriedade de produto interno,

$$\begin{aligned}
div(\psi_n F(x,u,v)x) &= \langle\psi_n\nabla F(x,u,v) + F(x,u,v)\nabla\psi_n, x\rangle + N\psi_n F(x,u,v)\\
&= \psi_n\langle\nabla F(x,u,v), x\rangle + F(x,u,v)\langle\nabla\psi_n, x\rangle + N\psi_n F(x,u,v).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\nabla F(x,u,v) &= \nabla\left(-\frac{1}{2}V_1(x)u^2 + \frac{\mu}{2^*}|u|^{2^*-2}u^2 + \lambda(x)uv\right)\\
&= \nabla\left(-\frac{1}{2}V_1(x)u^2\right) + \nabla\left(\frac{\mu}{2^*}|u|^{2^*-2}u^2\right) + \nabla(\lambda(x)uv).
\end{aligned}$$

Pela propriedade do gradiente do produto, temos

$$\begin{aligned}
\nabla F(x,u,v) &= -\frac{1}{2}\nabla V_1(x)u^2 - V_1(x)u\nabla u + \mu|u|^{2^*-2}u\nabla u \\
&+ \lambda(x)v\nabla u + \nabla\lambda(x)uv + \lambda(x)u\nabla v \\
&= -\frac{1}{2}\nabla V_1(x)u^2 + (-V_1(x)u + \mu|u|^{2^*-2}u + \lambda(x)v)\nabla u + \nabla\lambda(x)uv + \lambda(x)u\nabla v \\
&= -\frac{1}{2}\nabla V_1(x)u^2 + f(x,u,v)\nabla u + \nabla\lambda(x)uv + \lambda(x)u\nabla v.
\end{aligned}$$

implicando,

$$\langle \nabla F(x,u,v), x\rangle = -\frac{1}{2}\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2 + f(x,u,v)\langle \nabla u, x\rangle + \langle \nabla\lambda(x), x\rangle uv + \langle \lambda(x)u\nabla v, x\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
div(\psi_n F(x,u,v)x) &= -\frac{1}{2}\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2\psi_n + f(x,u,v)\langle \nabla u, x\rangle\psi_n + \langle \lambda(x), x\rangle uv\psi_n \\
&+ \langle \lambda(x)u\nabla v, x\rangle\psi_n + F(x,u,v)\langle \nabla\psi_n, x\rangle + N\psi_n F(x,u,v).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(x,u,v)\langle \nabla u, x\rangle\psi_n &= div(\psi_n F(x,u,v)x) - F(x,u,v)\langle \nabla\psi_n, x\rangle \\
&+ \left(\frac{1}{2}\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2 - NF(x,u,v) - \langle \lambda(x), x\rangle uv - \langle \lambda(x)u\nabla v, x\rangle\right)\psi_n.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u,v)\langle \nabla u, x\rangle\psi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} (div(\psi_n F(x,u,v)x) - F(x,u,v)\langle \nabla\psi_n, x\rangle)dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2 - NF(x,u,v) - \langle \lambda(x), x\rangle uv - \langle \lambda(x)u\nabla v, x\rangle\right)\psi_n dx.$$

De forma análoga, denotamos $G(x,u,v) = -\frac{1}{2}V_2(x)v^2 + \frac{1}{2^*}|v|^{2^*} + \lambda(x)uv$*, assim,* *deduzimos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u,v)\langle \nabla v, x\rangle \psi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} (div(\psi_n G(x,u,v)x) - G(x,u,v)\langle \nabla \psi_n, x\rangle)dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}\langle \nabla V_2(x), x\rangle v^2 - NG(x,u,v) - \langle \lambda(x), x\rangle uv - \langle \lambda(x) v \nabla u, x\rangle\right)\psi_n dx.$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl}
\int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u,v)\langle \nabla u, x\rangle + g(x,u,v)\langle \nabla v, x\rangle)\psi_n dx & = & \int_{\mathbb{R}^N} (div(\psi_n (F(x,u,v)x + G(x,u,v)x)) \\
& - & (F(x,u,v) + G(x,u,v))\langle \nabla \psi_n, x\rangle)dx \\
& + & \int_{\mathbb{R}^N} (\frac{1}{2}(\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x\rangle v^2) \\
& - & NF(x,u,v) - NG(x,u,v) \\
& - & 2\langle \nabla \lambda(x), x\rangle uv \\
& - & \lambda(x)\langle u\nabla v + v\nabla u, x\rangle)\psi_n dx
\end{array}$$

Denotamos $F^i(x,u,v)$ *a coordenada* i *de* $F(x,u,v)$ *para* $1 \leqslant i \leqslant N$. *Desde que* $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *e* $supp(\psi_n) \subset B_{2n}(0)$, *usando a definição de derivadas fracas concluímos que*

$$\begin{array}{rcl}
\int_{\mathbb{R}^N} div(\psi_n(F(x,u,v)x)dx & = & \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_n F^i(x,u,v)x)dx \\
& = & \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} F^i(x,u,v)x + \psi_n \frac{\partial}{\partial x_i} F^i(x,u,v)x\right) dx \\
& = & \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} F^i(x,u,v)x - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} F^i(x,u,v)x\right) dx = 0.
\end{array}$$

De forma análoga obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} div(\psi_n(G(x,u,v)x)dx = 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} div(\psi_n(F(x,u,v)x + G(x,u,v)x))dx = 0.$$

Desde que, $\psi_n \leqslant 1$ *e* $\lim_{n\to\infty} \psi_n = 1$*, temos*

- $|(F(x,u,v) + G(x,u,v)))\langle \nabla\psi_n, x\rangle - N(F(x,u,v) + G(x,u,v))\psi_n| = |(F(x,u,v) + G(x,u,v))(\langle \nabla\psi_n, x\rangle - N\psi_n)| \leqslant |F(x,u,v)|(\langle \nabla\psi_n, x\rangle - N) + |G(x,u,v)|(\langle \nabla\psi_n, x\rangle - N) \leqslant C\left(|V_1(x)u^2| + |u|^{2^*} + |\lambda(x)uv| + |V_2(x)v^2| + |v|^{2^*} + |\lambda(x)uv|\right) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $(F(x,u,v) + G(x,u,v))\langle \nabla\psi_n, x\rangle - N(F(x,u,v) + G(x,u,v))\psi_n \to -NF(x,u,v) - G(x,u,v)$*, q.t.p em* $\mathbb{R}^N$*;*
- $\left|\frac{1}{2}(\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x\rangle v^2)\psi_n\right| \leqslant \frac{1}{2}|\langle \nabla V_1(x), x\rangle||u|^2 + \frac{1}{2}|\langle \nabla V_2(x), x\rangle||v|^2 \leqslant C(|u|^2 + |v|^2) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $\frac{1}{2}(\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x\rangle v^2)\psi_n \to \frac{1}{2}(\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x\rangle v^2)$*, q.t.p em* $\mathbb{R}^N$*;*
- $|2\langle \nabla\lambda(x), x\rangle uv\psi_n| \leqslant 2|\langle \nabla\lambda(x), x\rangle||u||v| \leqslant C|u||v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $2\langle \nabla\lambda(x), x\rangle uv\psi_n \to 2\langle \nabla\lambda(x), x\rangle uv$*, q.t.p em* $\mathbb{R}^N$*;*
- $|\lambda(x)(\langle u\nabla v + v\nabla u, x\rangle)\psi_n = |\lambda(x)(\langle u\nabla v, x\rangle + \langle v\nabla u, x\rangle)\psi_n| \leqslant |\lambda(x)||\langle u\nabla v, x\rangle| + |\lambda(x)||\langle v\nabla u, x\rangle| \leqslant C|\lambda(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$

e

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\langle u\nabla v + v\nabla u, x\rangle\psi_n dx &= -\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(\langle u\nabla v, x\rangle + \langle v\nabla u, x\rangle)\psi_n dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\left(\sum_{i=1}^N u\frac{\partial v}{\partial x_i}x_i + \sum_{i=1}^N v\frac{\partial u}{\partial x_i}x_i\right)\psi_n dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\sum_{i=1}^N \left(u\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_i\psi_n dx.
\end{aligned}$$

Pela regra do produto de derivadas, temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\langle u\nabla v + v\nabla u, x\rangle \psi_n dx = -\int_{B_{2n}(0)} \lambda(x) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} x_i \psi_n dx.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_{B_{2n}(0)} \lambda(x) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} x_i \psi_n dx &= -\sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} \lambda(x)\psi_n x_i \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} \frac{\partial(\lambda\psi_n x_i)}{\partial x_i} uvdx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} x_i \lambda(x) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} x_i \psi_n + N\psi_n \lambda(x) \right) uvdx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\langle u\nabla v + v\nabla u, x\rangle \psi_n &= -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} x_i \lambda(x) \right) uvdx \\
&- \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} \left(\frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_i} x_i \psi_n \right) uvdx \\
&- \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{2n}(0)} (N\psi_n \lambda(x)) uvdx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla\lambda(x), x\rangle uvdx - N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x) uvdx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(f(x,u,v) + g(x,u,v))\langle \nabla u, x\rangle \psi_n &\leqslant (C_1 \left(|V_1(x)u^2| + |u|^{2^*} + 2|\lambda(x)uv| + |V_2(x)v^2| + |v|^{2^*} \right) \\
&+ C_2(|u|^2 + |v|^2) + C_3|u||v| + C_4|\lambda(x)|) \in L^1(\mathbb{R}^N),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f(x,u,v) + g(x,u,v))\langle \nabla u, x\rangle \psi_n &\to -NF(x,u,v) - NG(x,u,v) \\
&+ \frac{1}{2}(\langle \nabla V_1(x), x\rangle u^2 + \langle \nabla V_2(x), x\rangle v^2) \\
&- \langle \nabla\lambda(x), x\rangle uv + N\lambda(x)uv.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u,v)\langle\nabla u,x\rangle &+ g(x,u,v)\langle\nabla v,x\rangle)\psi_n dx = -N\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u,v)dx\\ &- N\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u,v)dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2)dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx+N\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx.\end{aligned}$$

Substituindo $F(x,u,v)$ e $G(x,u,v)$ na equação acima, segue de (4.3) que

$$\begin{aligned}-\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx &= -N\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{1}{2}V_1(x)u^2+\frac{\mu}{2^*}|u|^{2^*}+\lambda(x)uv\right)dx\\ &- N\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{1}{2}V_2(x)v^2+\frac{1}{2^*}|v|^{2^*}+\lambda(x)uv\right)dx\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2)dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx+N\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}-\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx &= -N\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\mu}{2^*}|u|^{2^*}+\frac{1}{2^*}|v|^{2^*}+\lambda(x)uv\right)dx\\ &+ \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2\right)dx-N\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx\\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2)dx\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx+N\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx.\end{aligned}$$

Logo, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx &= \frac{2N}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\mu}{2^*}|u|^{2^*}+\frac{1}{2^*}|v|^{2^*}+\lambda(x)uv\right)dx\\
&+ \frac{2}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx-\frac{2N}{2(N-2)}\int_{\mathbb{R}^N}\left(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2\right)dx\\
&- \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2)dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\mu|u|^{2^*}+|v|^{2^*}+2^*\lambda(x)uv\right)dx\\
&+ \frac{2}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx-\frac{2^*}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2\right)dx\\
&- \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2)dx.
\end{aligned}
$$

Provando assim a identidade. □

Demonstração do Teorema 4.1 *Seja* $(u,v)\in E$ *uma solução clássica positiva de* (S_μ), *pela definição de solução fraca, temos*

$$((u,v),(u,v))=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu|u|^{p-2}uu+|v|^{q-2}vv+\lambda(x)(uv+vu))dx.$$

O que implica

$$\|(u,v)\|_E^2=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu|u|^{2^*-2}u^2+|v|^{2^*-2}v^2+2\lambda(x)uv)dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+V_1(x)u^2+|\nabla v|^2+V_2(x)v^2)dx=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu|u|^{2^*}+|v|^{*}+2\lambda(x)uv)dx,$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu|u|^{2^*}+|v|^{2^*})dx-\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2-2\lambda(x)uv).dx \quad (4.7)$$

Combinando (4.7) com a identidade de Pohozaev obtida no Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(\mu|u|^{2^*}+|v|^{2^*})dx &- \int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2-2\lambda(x)uv)dx=\int_{\mathbb{R}^N}(\mu|u|^{2^*}+|v|^{2^*})dx\\ &+ 2\frac{2^*}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx-\frac{2^*}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2)dx\\ &+ \frac{2}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx\\ &- \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2)dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2-2\lambda(x)uv)dx &= -\frac{2^*}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2-2\lambda(x)uv)dx\\ &+ \frac{2}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx\\ &- \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2)dx.\end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned}0=-\Big(\frac{2}{N-2}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2 &+ V_2(x)v^2-2\lambda(x)uv)dx+\frac{2}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx\\ &- \frac{1}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2\Big)dx. \quad (4.8)\end{aligned}$$

Multiplicando (4.8) pelo fator $\frac{N-2}{2}$, temos

$$\begin{aligned}0=-\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2 &+ V_2(x)v^2-2\lambda(x)uv)dx+\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx\\ &- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2)dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2 &+& V_2(x)v^2-2\lambda(x)uv)dx=\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx\\ &-& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2).\end{aligned}$$

De (V_7) *e* (V_8), *segue-se*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla\lambda(x),x\rangle uvdx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\langle\nabla V_1(x),x\rangle u^2+\langle\nabla V_2(x),x\rangle v^2dx\leqslant 0$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)u^2+V_2(x)v^2-2\lambda(x)uv)dx\leqslant 0. \tag{4.9}$$

Por outro lado, temos

$$0\leqslant\left(\sqrt{V_1(x)}|u|-\sqrt{V_2(x)}|v|\right)^2=V_1(x)u^2-2\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|+V_2(x)v^2.$$

Agora, desde que,

$$|\lambda(x)||u||v|\geqslant\lambda(x)uv,$$

temos

$$-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx\geqslant-2\int_{\mathbb{R}^N}|\lambda(x)|u||v|dx.$$

Usando (V_3) *otemos*

$$\begin{aligned}-2\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx &\geqslant& -2\delta\int_{\mathbb{R}^N}\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|dx\\ &\geqslant& -\delta\left(\int_{\mathbb{R}^N}V_1(x)u^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}V_2(x)v^2dx\right).\end{aligned}$$

Como $\delta\in(0,1)$, *então*

$$-\delta\left(\int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)v^2dx\right) \geqslant -\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2)dx.$$

Assim,

$$-2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx \geqslant -\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2)dx,$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv)dx \geqslant 0. \tag{4.10}$$

Desta forma, obtemos de (4.9) e (4.10)

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv)dx = 0.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sqrt{V_1(x)}u - \sqrt{V_2(x)}v\right)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(V_1(x)u - 2\sqrt{V_1(x)V_2(x)}uv + V_2(x)v^2\right)dx. \end{aligned}$$

De (V_3'),

$$2\lambda(x)uv \leqslant 2\delta\sqrt{V_1(x)V_2(x)}uv,$$

o que implica

$$-2\delta\sqrt{V_1(x)V_2(x)}uv \leqslant -2\lambda(x)uv.$$

Assim,

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left(V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - \frac{2}{\delta}\lambda(x)uv\right)dx < \int_{\mathbb{R}^N} \left(V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2 - 2\lambda(x)uv\right)dx = 0.$$

o que não é possível, pois teríamos $0 < 0$, *logo, o sistema* (S_μ) *não tem solução clássica positiva para todo* $\mu \geqslant 0$. $\square$

Apêndice A

Resultados Utilizados

Aqui, exibiremos alguns dos resultados utilizados no decorrer deste trabalho, bem como algumas definições importantes que foram necessárias para a demonstração de parte dos mesmos.

Definição A.1. *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H equipado com um produto interno tal que H é completo para a norma $\|.\|$.*

Definição A.2. *Representa-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, o espaço de Banach das funções numéricas u definidas em Ω, mensuráveis cuja potência p, $|u|^p$, é integrável em Ω, equipado com a norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uvdx.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach das funções numéricas u, mensuráveis e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leqslant C$ q.t.p em Ω com

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C; |u(x)| \leqslant C \quad q.t.p \quad em \quad \Omega\}.$$

Definição A.3. *Denota-se por* $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *o conjunto das funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $f \in L^p(K)$ *para todo* K *compacto de* Ω.

Definição A.4. *Representa-se por* $W^{m,p}(\Omega)$ *o espaço de Sobolev, que é o espaço vetorial de todas as funções* $u \in L^p(\Omega)$ *tais que,* $\forall \;\; |\alpha| \leqslant m \;\; D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, *sendo* $D^\alpha u$ *a derivada de* u *no sentido das distribuições, isto é,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \forall \;\; |\alpha| \leqslant m, \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *defini-se a norma de* u *por*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty.$$

O caso particular $p = 2$, *o espaço de Sobolev* $W^{m,2}(\Omega)$ *é representado por* $H^m(\Omega)$, *e é denominado espaço de sobolev de ordem* m.
Assim, o espaço

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); Du \in L^2(\Omega)\},$$

com

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Teorema A.1. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *onde* $p > 1$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então* $fg \in L^1$ *e* $|fg|_1 \leqslant |f|_p |g|_q$.

Demonstração. Ver [7] pág. 57. □

Teorema A.2. *(Teorema de Imersão contínua) Sejam Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^N$, $(N \geqslant 2)$, Ω de classe C^m e $1 \leqslant p < \infty$, então*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q \leqslant \dfrac{Np}{N - mp} = p^*$ *se* $mp < N$

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \infty$ *e* $mp = N$

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ *se* $mp > N$

No caso c), k é um inteiro verificando $k < m - \dfrac{N}{p} \leqslant k + 1$ e λ um real satisfazendo $0 < \lambda \leqslant m - k - \dfrac{N}{p} = \lambda_0$ se $\lambda_0 < 1$ e $0 < \lambda < 1$ se $\lambda_0 = 1$.

Demonstração. Ver [22] pág. 76. □

Teorema A.3. *(Teorema de Imersão compacta) Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, Ω de classe C^m, e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \dfrac{Np}{N - mp}$ *se* $mp < N$

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \infty$ *se* $mp = N$

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$. $k < m - \dfrac{N}{p} \leqslant k + 1$ *se* $mp > N$ *onde* k *é um inteiro não negativo.*

Demonstração. Ver [22] pág. 84. □

Teorema A.4. *(Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam X um espaço de Banach, $F, J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e*

$$M = \{x \in X : J(x) = 0\} = J^{-1}(0) \quad com \quad J'(u) \neq 0, \quad \forall \;\; u \in M.$$

Se F é limitado sobre M e existe $u \in M$ tal que

$$F(u_0) = \inf_{u \in M} F(u),$$

então existe $\eta \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) tal que

$$F'(u_0) = \eta J'(u_0).$$

Demonstração. Ver [17] pág.55. $\square$

Lema A.1. *(Lions) Seja $r > 0$ e $2 \leqslant q < 2^*$. Se $(u_n)_n \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência limitada de modo que*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^q dx = 0,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 < p < 2^*$

Demonstração. Ver [26] pág. 16. $\square$

Lema A.2. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leqslant y$. Então $\sup A \leqslant \inf B$. Afim de ser $\sup A = \inf B$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$*

Demonstração. Ver [20] pág.117. $\square$

Teorema A.5. *Seja $f \in L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é de domínio limitado, $1 < p < \infty$ e seja w o potencial newtoniano de f. Então $w \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta w = f$. q.t.p em Ω e*

$$\|D^2 w\|_p \leqslant c\|f\|_p,$$

onde c depende apenas de N e p. Além disso, quando $p = 2$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D^2 w|^2 = \int_\Omega f^2 dx.$$

Demonstração. Ver [15] pág. 230. $\square$

Definição A.5. *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^N$. *Suponha que* $u \in C^1(\Omega)$ *é uma função real continuamente diferenciável. Se* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *é uma função suave com suporte compacto em* Ω, *segue da fórmula de integração por partes*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} uv\eta_i dx - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

que

$$\int_\Omega u(\partial_i \varphi) dx = - \int_\Omega (\partial_i u) \varphi dx$$

para $i = 1, ..., N$.

Definição A.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um subconjunto aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Dizemos que uma função* $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ *é a derivada parcial fraca de* u *em relação a* x_i, *se*

$$\int_\Omega u(\partial_i \varphi) dx = - \int_\Omega v_i \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Neste caso, denotaremos*

$$v_i = \partial_i u.$$

Lema A.3. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e suponha que* $V \in L^\infty(\Omega)$ *e que* $u \in H^1(\Omega)$ *é uma solução fraca do problema*

$$-\Delta u + V(x)u = f \quad em \quad \Omega,$$

onde $f \in L^2(\Omega)$. *Então* $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.
Para uma versão mais geral e sua demonstração, veja [14] Teorema 1 na seção 6.3.1

Teorema A.6. *(Teorema da convergência dominada de Lebesgue) Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* L^1 *que satisfaça*

- *(a)* $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω,

- *(b) Existe uma função* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *q.t.p em* Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [7] pág.44. □

Teorema A.7. *(Valor Médio) Seja* $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ *contínua, derivável em* $(a, a+h)$. *Existe um número* θ, $0 < \theta < 1$ *tal que* $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$.

Demonstração. Ver [20] pág. 96. □

Teorema A.8. *(Vaimberg) Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^p(\Omega)$ *e seja* f *tal que* $|f_n - f|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então existe uma subsequência* f_{n_k} *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$, *quase sempre em* Ω;

(b) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$, *quase sempre em* Ω.

Demonstração. Ver [8] pág. 94. □

Teorema A.9. *(Princípio do Máximo Forte) Seja L um operador satisfazendo as seguintes condições.*

(i) $a^{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \quad \forall \quad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N$;

(ii) Para algumas constantes $\Lambda, \nu \geqslant 0$, *temos para todo* $x \in \Omega$,

$$\sum |a^{i,j}(x)|^2 \leqslant \Lambda^2, \lambda^{-2} \sum (|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)| \leqslant \nu^2;$$

(iii) $\int_\Omega (dv - b^i D_i v)dx \leqslant 0, \quad \forall \quad v \geqslant 0, v \in C_0^1(\Omega)$.

e seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo $Lu \geqslant 0$ em Ω. Então, se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$, temos

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geqslant 0$$

a função u deve ser constante em Ω e a igualdade é válida em (iii) quando $u = 0$.

Demonstração. Ver [15] pág. 198. □

O próximo resultado trata-se de um Teorema provado por Ekeland em 1972. A demonstração deste Teorema e de suas consequências podem ser encontradas em [13].

Teorema A.10. *(Princípio Variacional de Ekeland) Seja X um espaço métrico completo e $\Phi : X \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponha que Φ seja limitado inferiormente e sejam $\varepsilon, \lambda > 0$ e $u \in X$ dados tais que*

$$\Phi(u) \leqslant \inf_X \Phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então existe $v_\varepsilon \in X$ tal que

(a) $\Phi(v_\varepsilon) \leqslant \Phi(u)$;

(b) $d(u, v_\varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$;

(c) Para cada $w \neq v_\varepsilon \in X$, $\Phi(v_\varepsilon) < \Phi(w) + \varepsilon\lambda d(v_\varepsilon, w)$.

Uma consequência importante deste Teorema é o seguinte:

Corolário A.1. *Sejam E um espaço de Banach e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente que seja limitado inferiormente. Suponhamos que Φ seja diferenciável no sentido de Frechét em todo $u \in E$. Então dado $\delta > 0$, existe $u_\delta \in E$ tal que*

$$\Phi(u_\delta) \leqslant \inf_{u \in E} \Phi(u) + \frac{\delta}{2} \quad e \quad \|\Phi'(u_\delta)\|_{E'} \leqslant \delta.$$

Para enunciar a segunda consequência do princípio variacional de Ekeland, vamos precisar da seguinte definição:

Definição A.7. *(Sequência Palais-Smale e condição Palais-Smale) Seja E um espaço de Banach e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subset E$ tais que*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad \Phi'(u_n) \to 0.$$

Dizemos que (u_n) é uma sequência Palais-Smale no nível c para Φ, ou de forma resumida, (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para Φ. Se tal sequência possui uma subsequência convergente, diz-se que Φ satisfaz a condição Palais-Smale no nível c ou que Φ satisfaz a condição $(PS)_c$.

Corolário A.2. *Sejam E um espaço de Banach e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que seja limitado inferiormente. Então, existe (u_n) uma sequência Palais-Smale no nível c para Φ, onde $c = \inf_{u \in E} \Phi(u)$.*

Corolário A.3. *Sejam E um espaço de Banach e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que seja limitado inferiormente. Se Φ satisfaz a condição $(PS)_c$ com $c = \inf_{u \in E} \Phi(u)$, então c é atingido em um ponto $u_0 \in E$ e u_0 é um ponto crítico de Φ*

Apêndice B

Funcionais Diferenciáveis

Neste apêndice nosso objetivo é mostrar que o funcional energia I associado ao sistema (S_μ) é de classe $C^2(E,\mathbb{R})$, para isso precisamos enunciar definições e apresentar algumas propriedades sobre funcionais diferenciáveis.

Definição B.1. *Considere o funcional $I : X \to \mathbb{R}$, onde X é um espaço normado. O funcional I é Fréchet Diferenciável em $u \in X$, se existir $L : X \to \mathbb{R}$ funcional linear contínuo verificando*

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0} \frac{|I(u+\varphi) - I(u) - L(\varphi)|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Definição B.2. *A derivada de Gateaux é definida por*

$$I'(u)\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{[I(u+t\varphi) - I(u)]}{t}.$$

Definição B.3. *Dizemos que o funcional $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ se a derivada a Frechét I' é contínua sobre X.*

Observe que todo funcional Frechét-Diferenciável é também Gateaux-Diferenciável, porém, a recíproca não é verdadeira, no entanto temos a seguinte proposição:

Proposição B.1. *Seja X um espaço de Banach e I um funcional definido em X, se I tem derivada de Gateaux contínua em X, então $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração: *Ver [18]* $\square$

Agora vamos mostrar que o funcional energia I é de classe C^2 através do seguinte Lema:

Lema B.1. *O funcional energia I definido por*

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\left(\|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx \right) - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{q}\|v\|_q^q$$

é de classe $C^2(E, \mathbb{R})$.

Demonstração: *Consideremos os funcionais $I_1, I_2, I_3, I_4 : E \to \mathbb{R}$, definidos por*

$$I_1(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_E^2; I_2(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx; I_3(u,v) = \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p \;\; e \;\; I_4(u,v) = \frac{1}{q}\|v\|_q^q.$$

Primeiramente vamos mostrar que I está bem definido.

Note que

$$I_1(u,v) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)u^2 dx \right) + \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)v^2 dx \right).$$

Pela definição do espaço E_i, temos que $I_1(u,v) < +\infty$. Logo, I_1 está bem definido

$$I_2(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||u||v|dx.$$

Por (V_3) temos

$$I_2(u,v) \leqslant \delta \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v|dx.$$

Note ainda que,

$$0 \leqslant \left(\sqrt{V_1(x)}|u| - \sqrt{V_2(x)}|v| \right)^2 = V_1(x)u^2 - 2\sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|v| + V_2(x)v^2,$$

o que implica que

$$\delta \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V_1(x)}|u|\sqrt{V_2(x)}|u|dx \leqslant \frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2\right) dx < +\infty.$$

Logo, I_2 está bem definido.

$$I_3(u,v) = \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p = \frac{\mu}{p}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p = \frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx < +\infty.$$

Assim, I_3 está bem definido.

$$I_4(u,v) = \frac{1}{q}\|v\|_q^q = \frac{1}{q}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q = \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx < +\infty.$$

Portanto, I_4 está bem definido e consequentemente I está bem definido.

Afirmação B.1. *$I_1 \in C^1(E,\mathbb{R})$.*

Vamos calcular a derivada de Gateaux

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1(u,v)}{\partial(\phi,\psi)} &= DI_1(u,v).(\phi,\psi) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{I_1((u,v)+t(\phi,\psi)) - I_1(u,v)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{I_1(u+t\phi, v+t\psi) - I_1(u,v)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\|(u+t\phi, v+t\psi)\|_E^2 - \frac{1}{2}\|(u,v)\|_E^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\|u+t\phi\|_{E_1}^2 + \|v+t\psi\|_{E_2}^2 - \|u\|_{E_1}^2 - \|v\|_{E_2}^2}{t}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \nabla \phi + V_1(x)u\phi + \nabla v \nabla \psi + V_2(x)v\psi\right) dx = ((u,v),(\phi,\psi))
\end{aligned}$$

Vamos verificar agora se I_1 é Frechét Diferenciável

$$I_1'(u,v)(\phi,\psi) = \lim_{\|(\phi,\psi)\|\to 0} \frac{|I_1((u,v)+(\phi,\psi)) - I_1(u,v) - ((u,v)(\phi,\psi))|}{\|(\phi,\psi)\|}.$$

Vamos calcular $I_1((u,v)+(\phi,\psi))$. *Temos da definição*

$$\begin{aligned} I_1((u,v)+(\phi,\psi)) &= I_1(u+\phi,v+\psi)=\frac{1}{2}\|(u+\phi,v+\psi)\|_E^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u+\phi\|_{E_1}^2+\frac{1}{2}\|v+\psi\|_{E_2}^2 \\ &= \frac{1}{2}\|(\phi,\psi)\|_E^2+\frac{1}{2}\|(u,v)\|_E^2+((u,v),(\phi,\psi)) \\ &= \frac{1}{2}\|(\phi,\psi)\|_E^2+I_1(u,v)+((u,v),(\phi,\psi)). \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\frac{|I_1((u,v)+(\phi,\psi))-I_1(u,v)-((u,v),(\phi,\psi))}{\|(\phi,\psi)\|}=\frac{1}{2}\frac{\|(\phi,\psi)\|^2}{\|(\phi,\psi)\|}=\frac{1}{2}\|(\phi,\psi)\|\to 0.$$

Portanto I_1 *é diferenciável com*

$$I_1'(u,v)(\phi,\psi)=((u,v),(\phi,\psi)).$$

Vamos mostrar que I_1' *é contínuo.*

Seja (u_n,v_n) *uma sequência em* E, *tal que* $(u_n,v_n)\to(u,v)$ *em* E. *Devemos mostrar que* $I_1'(u_n,v_n)\to I_1'(u,v)$

Note que para cada $(\phi,\psi)\in E$, *com* $\|(\phi,\psi)\|\leqslant 1$ *temos*

$$|(I_1'(u_n,v_n)-I_1'(u,v))(\phi,\psi)|=|((u_n,v_n)(\phi,\psi))-((u,v),(\phi,\psi))|=|((u_n,v_n)-(u,v)),(\phi,\psi)|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e das imersões contínuas, existe $C>0$ *tal que*

$$|(I_1'(u_n,v_n)-I_1'(u,v))(\phi,\psi)|\leq C\|(u_n,v_n)-(u,v)\|_E\|(\phi,\psi)\|_E\leq C\|(u_n,v_n)-(u,v)\|_E.$$

Deste modo, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\|I_1'(u_n,v_n)-I_1'(u,v)\|_E &= \sup_{\|(\phi,\psi)\|\leqslant 1}|(I_1'(u_n,v_n)-I_1'(u,v))(\phi,\psi)| \\
&\leqslant C\sup_{\|(\phi,\psi)\|\leqslant 1}\|(u_n,v_n)\|_E\|(\phi,\psi)\|_E \\
&= C\|(u_n,v_n)-(u,v)\|_E \to 0.
\end{aligned}
$$

Mostrando assim que quando $(u_n,v_n)\to(u,v)$ em E temos $I_1'(u_n,v_n)\to I_1'(u,v)$ em E. Portanto, o operador I_1' é contínuo, e deste modo $I_1\in C^1(E,\mathbb{R})$

Afirmação B.2. *$I_2\in C^1(E,\mathbb{R})$.*

Vamos calcular a derivada de Gateaux

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I_2(u,v)}{\partial(\phi,\psi)} &= DI_2(u,v).(\phi,\psi)=\lim_{t\to 0}\frac{I_2((u,v)+t(\phi,\psi))-I_2(u,v)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{I_2(u+t\phi,v+t\psi)-I_2(u,v)}{t},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I_2(u,v)}{\partial(\phi,\psi)} &= \lim_{t\to 0}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)(u+t\phi)(v+t\psi)dx-\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)uvdx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(\lambda(x)uv+\lambda(x)tu\psi+\lambda(x)tv\phi+\lambda(x)t^2\phi\psi-\lambda(x)uv)dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}t\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda(x)u\psi+\lambda(x)v\phi+t\lambda(x)\phi\psi)dx}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(\lambda(x)u\psi+\lambda(x)v\phi)dx=\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)(u\psi+v\phi)dx.
\end{aligned}
$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)(u\phi+v\phi)dx$ é candidato a ser derivada de I_2 no sentido de Frechét, basta verificar se,

$$
\lim_{\|(\phi,\psi)\|\to 0}\frac{|I_2((u,v)+(\phi,\psi))-I_2(u,v)-\int_{\mathbb{R}^N}\lambda(x)(u\psi+v\phi)dx|}{\|(\phi,\psi)\|}=0.
$$

Vamos calcular $I_2((u,v)+(\phi,\psi))$. *Temos da definição*

$$\begin{aligned} I_2((u,v)+(\phi,\psi)) &= I_2(u+\phi,v+\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u+\phi)(v+\psi)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda(x)uv + \lambda(x)u\psi + \lambda(x)v\phi + \lambda(x)\phi\psi)dx \\ &= I_2(u,v) + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda(x)u\psi + \lambda(x)v\phi + \lambda(x)\phi\psi)dx. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\frac{|I_2((u,v)+(\phi,\psi)) - I_2(u,v) - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi+v\phi)dx|}{\|(\phi,\psi)\|} = \frac{|\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)\phi\psi|}{\|(\phi,\psi)\|}.$$

Assim,

$$\frac{|I_2((u,v)+(\phi,\psi)) - I_2(u,v) - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi+v\phi)dx|}{\|(\phi,\psi)\|} \leqslant \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||\phi||\psi|dx}{\|(\phi,\psi)\|}.$$

De (V_3) *temos*

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||\phi||\psi|dx}{\|(\phi,\psi)\|} &\leqslant \frac{\frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V_1(x)\phi^2 + V_2(x)\psi^2)dx}{\|(\phi,\psi)\|} \\ &\leqslant \frac{\frac{\delta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\phi|^2 + V_1(x)\phi^2 + |\nabla\psi|^2 + V_2(x)\psi^2)dx}{\|(\phi,\psi)\|} \\ &= \frac{\delta}{2}\frac{\|(\phi,\psi)\|_E^2}{\|(\phi,\psi)\|} = \frac{\delta}{2}\|(\phi,\psi)\| \to 0. \end{aligned}$$

Portanto I_2 *é diferenciável com*

$$I_2'(u,v)(\phi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi)dx.$$

Vamos mostrar que I_2' *é contínuo.*

Seja (u_n,v_n) *uma sequência em* E, *tal que* $(u_n,v_n)\to(u,v)$ *em* E. *Devemos mostrar que*

$I_2'(u_n,v_n) \to I_2'(u,v)$

Note que para cada $(\phi,\psi) \in E$, com $\|(\phi,\psi)\| \leqslant 1$ temos

$$\begin{aligned}
|(I_2'(u_n,v_n) - I_2'(u,v))(\phi,\psi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u_n\psi + v_n\phi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u\psi + v\phi)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(u_n - u)\psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)(v_n - v)\phi dx\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||(u_n - u)||\psi| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(x)||(v_n - v)||\phi| dx.
\end{aligned}$$

Novamente por (V_3), temos

$$|(I_2'(u_n,v_n) - I_2'(u,v))(\phi,\psi)| \leqslant \frac{\delta}{2}\|(u_n - u, v_n - v)\|_E^2 + \frac{\delta}{2}\|(\phi,\psi)\|_E^2,$$

para algum $\delta \in (0,1)$

Note que, indexando $\delta_n = \dfrac{1}{n+1}$, temos $\dfrac{\delta_n}{2}\|(\phi,\psi)\|_E^2 = o_n(1)$ quando $n \to \infty$.

Assim,

$$\frac{\delta_n}{2}\|(u_n - u, v_n - v)\|_E^2 + \frac{\delta_n}{2}\|(\phi,\psi)\|_E^2 \to 0$$

quando $n \to \infty$. Logo,

$$I_2'(u_n,v_n) \to I_2'(u,v).$$

Portanto, o operador I_2' é contínuo, e deste modo

$$I_2 \in C^1(E,\mathbb{R}).$$

Afirmação B.3. $I_3 \in C^1(E,\mathbb{R})$.

Vamos calcular a derivada de Gateaux DI_3. Para cada $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e para cada $u,\phi \in E_1$, consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = |u + st\phi|^p$.

Observe que $h'(s) = p|u + st\phi|^{p-2}(u + st\phi)t\phi$, $h(1) = |u + t\phi|^p$ e $h(0) = |u|^p$. Desde que h

é contínua em $[0,1]$ *e diferenciável em* $(0,1)$, *segue do Teorema do Valor Médio que existe* $c \in (0,1)$, *tal que* $h(1) - h(0) = h'(c)$, *o que implica que*

$$\frac{|u+t\phi|^p - |u|^p}{t} = p|u+ct\phi|^{p-2}(u+ct\phi)\phi. \tag{2.1}$$

Assim,

$$\lim_{t\to 0} \frac{|u+t\phi|^p - |u|^p}{t} = \lim_{t\to 0} p|u+ct\phi|^{p-2}(u+ct\phi)\phi = p|u|^{p-2}u\phi.$$

Agora, usando a desigualdade triângular em 2.1 temos

$$\left|\frac{|u+t\phi|^p - |u|^p}{t}\right| \leqslant p\left(|u| + |ct\phi|\right)^{p-2}|u+ct\phi||\phi|.$$

De onde segue que

$$\left|\frac{|u+t\phi|^p - |u|^p}{t}\right| \leqslant p(|u| + |c||t||\phi|)^{p-1}|\phi|.$$

Agora, usando o fato de que $|c| < 1$ *e* $|t| < 1$, *obtemos*

$$\left|\frac{|u+t\phi|^p - |u|^p}{t}\right| \leqslant p(|u| + |\phi|)^{p-1}|\phi|.$$

Vamos mostrar que $(|u| + |\phi|)^{p-1}|\phi| \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Temos $u, \phi \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *daí* $u + \phi \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *o que implica que,* $(|u| + |\phi|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$.

Agora, usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\dfrac{p}{p-1}$ *e* p, *temos*

$$(|u| + |\phi|)^{p-1}|\phi| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$\left|\frac{|u+t\phi|^p - |u|^p}{t}\right| \leqslant p(|u| + |\phi|)^{p-1}|\phi| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} p|u|^{p-2}u\phi dx = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u+t\phi|^p - |u|^p}{t} dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{I_3((u,v)+t(\phi,\psi))-I_3(u,v)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{I_3(u+t\phi,v+t\psi)-I_3(u,v)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\mu}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u+t\phi|^p-|u|^p}{t}\right)dx\\ &= \mu\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u\phi dx.\end{aligned}$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}^N}\mu|u|^{p-2}u\phi dx$ *é candidato a ser derivada no sentido de Frechét. Portanto, é suficiente mostrar que* I_3' *seja contínuo. Seja* (u_n,v_n) *uma sequência em* E*, tal que* $(u_n,v_n)\to(u,v)$ *em* E*.*
Assim,

$$u_n \to u \ \ em \ \ L^p(\mathbb{R}^N).$$

Vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p-2}u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u dx.$$

De fato, pelo Teorema de Vaimberg, passando a uma subsequência, temos que $u_n(x)\to u(x)$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^N$ *e que existe* $h\in L^p(\mathbb{R}^N)$*, tal que*

$$|u_n(x)|\leqslant h(x) \ \ quase \ \ sempre \ \ em \ \ \mathbb{R}^N.$$

Portanto,

$$|u_n(x)|^{p-2}u_n(x)\to|u(x)|^{p-2}u(x) \ \ quase \ \ sempre \ \ em \ \ \mathbb{R}^N,$$

e

$$||u_n(x)|^{p-2}u_n(x)|\leqslant h^{p-1}(x)\in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto $h\in L^1(\mathbb{R}^N)$*. Do Teorema da Convergência Domonada de Lebesgue*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p-2}u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}u dx.$$

Agora note que,

$$\begin{aligned}
|(I_3'(u_n,v_n)-I_3'(u,v))(\phi,\psi)| &= |I_3'(u_n,v_n)(\phi,\psi)-I_3'(u,v)(\phi,\psi)| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N}\mu|u_n|^{p-2}u_n\phi dx-\int_{\mathbb{R}^N}\mu|u|^{p-2}u\phi dx\right| \\
&\leqslant \mu\int_{\mathbb{R}^N}||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u||\phi|dx.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder para os expoentes $\dfrac{p}{p-2}$ *e* p*, temos*

$$|(I_3'(u_n,v_n)-I_3'(u,v)(\phi,\psi)|\leqslant\mu||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u|_{\frac{p}{p-1}}|\phi|_p.$$

Para $|\phi|_p\leqslant 1$*, temos*

$$|(I_3'(u_n,v_n)-I_3'(u,v)(\phi,\psi)|\leqslant\mu||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u|_{\frac{p}{p-1}}.$$

Portanto,

$$|I_3'(u_n,v_n)-I_3'(u,v)|_{E'}\leqslant\mu||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u|_{\frac{p}{p-1}}.$$

Passando o limite na expressão acima, obtemos

$$|I_3'(u_n,v_n)-I_3'(u,v)|_{E'}\to 0.$$

Consequentemente

$$I_3\in C^1(E,\mathbb{R}).$$

Afirmação B.4. $I_4\in C^1(E,\mathbb{R})$.

De forma análoga ao que foi feito para I_3*, para cada* $t\in\mathbb{R}$ *com* $0<|t|<1$*, para cada* $x\in\mathbb{R}^N$ *e para cada* $v,\psi\in E_2$*, mostra-se que*

$$I_4 \in C^1(E,\mathbb{R}) \quad com \quad I_4'(u,v)(\phi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-2} v\psi dx.$$

Das afirmações B.1 - B.4, segue que

$$I \in C^1(E,\mathbb{R})$$

com

$$\langle I'(u,v),(\phi,\psi)\rangle = ((u,v),(\phi,\psi)) - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu|u|^{p-2}u\phi + |v|^{q-2}v\psi + \lambda(x)(u\psi + v\phi))dx,$$

onde $(\phi,\psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Agora, vamos definir $J : E \to \mathbb{R}^N$ *por*

$$J(u,v) = \langle I'(u,v),(u,v)\rangle = \|(u,v)\|_E^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx - \mu\|u\|_p^p - \|v\|_q^q.$$

Para mostrar que $I \in C^2(E,\mathbb{R})$ *basta mostrar que* $J \in C^1(E,\mathbb{R})$. *Para tal, consideremos os funcionais* $J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4 : E \to \mathbb{R}$, *definidos por*

$$J_1(u,v) = \|(u,v)\|_E^2; J_2(u,v) = 2\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(x)uvdx; J_3(u,v) = \mu\|u\|_p^p \quad e \quad J_4(u,v) = \|v\|_q^q.$$

Agora basta proceder de forma análoga ao que foi feito para o funcional I *para concluir que* $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ *com*

$$\langle J'(u,v),(\phi,\psi)\rangle = 2((u,v),(\phi,\psi)) - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu p|u|^{p-2}u\phi + q|v|^{q-2}v\psi + 2\lambda(x)(u\psi + v\phi))dx.$$

Portanto $I \in C^2(E,\mathbb{R})$ $\square$

Referências Bibliográficas

[1] R.A. Adams & J.J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2003.

[2] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers*, Physical Review Letters 70 (1993) 2395-2398. 2

[3] A. Ambrosetti, Remarks on some systems of nonlinear Schrödinger equations, Fixed Point Theory and Appl. 4 (2008) 35-46. 3

[4] A. Ambrosetti and P. H Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and apllications*, J. Functional Analysis, vol 14(1973) 349-381.

[5] A. Ambrosetti, G. Cerami and D. Ruiz, *solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on* $\mathbb{R}^N$, J. Funct. Anal. 254 (2008) 2816-2845. 3

[6] J.G. Azorero & I.P. Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*, American Mathematical Society, vol 323 n 2(1991) 65-74.

[7] R.G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue Measure*, Willey Classics Library, New york, 1995.

[8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev, Space and Partial Differential Equations*, Springer, (2010).

[9] H. Brezis and E.H. Lieb, *Minimum action solutions of some vector field equations*, Comm. Math. Phys. 96 (1984) 97-113. 5,6

[10] Z. Chen and W. Zou, *Ground State for a system of Schrödinger equations with critical exponent*, J. Funct. Anal 262 (2012) 3091-3107. 3

[11] Z. Chen and W. Zou, *On coupled systems of Schrödinger equations*, Adv. Differential Equations 16 (2011) 755-800. 3

[12] D.N. Christodoulides, T.H. Coskun, M. Mitchell and M. Segev, *Theory of incoherent self-focusing in biased photorefractive media*, Phys. Rev. Lett. 78(1997) 646-649. 2

[13] I. Ekeland, *On the Variational Principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[14] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society.

[15] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer 2nd. ed (1983).

[16] N. Kalyanasundaram and P. Muthuchidambaranathan, *Nonlinear pulse propagation in a weakly birefrigent optical fiber part 1: derivation of coupled nonlinear Schrödinger equations (CNLSE)*, Progress In Electromagnetcs Research B 19 (2010) 205-231. 2

[17] O. Kavian *Introduction à lá théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, (1993).

[18] A.N. Kolmogorov and S.V. Farnin, *Introductory real analysis*, Dover, 1975.

[19] Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley. Canadá, 1989.

[20] E.L. Lima, *Analise Real*, vol 1. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[21] E.L. Lima, *Analise Real*, vol 2. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[22] L.A.J. Medeiros, Espaços de Sobolev: Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos, Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[23] J.C.A. Melo Junior, On linearly coupled systems of Schrödinger equations with critical growth, tese de doutorado. PAPGM-UFPB/UFCG (2017)

[24] C.R. Menyuk, *Nonlinear pulse propagation in birrefrigent optical fibers*, IEEE J Quantum Electron 23 (1987) 174-176. 2

[25] P. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrodinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992) 270-291. 2

[26] E. Schrödinger, *Collected Papers on Wave Mchanics*, AMS Chelsea Puplishing (2003) 2

[27] M. Willem, Minimax theorems, Volume 24, Birkhauser, Boston, 1996.