



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CONTROLABILIDADE EM SISTEMAS DE TIMOSHENKO

Ronald Cardoso Barbosa

Belém-PA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CONTROLABILIDADE EM SISTEMAS DE TIMOSHENKO

Dissertação apresentado ao Programa de Pós graduação em Matemática e Estatística como parte dos pré requisitos para obtenção do grau Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Ronald Cardoso Barbosa

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém-PA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B238c

Barbosa, Ronald Cardoso Barbosa

Controlabilidade em Sistemas de Timoshenko : Controle / Ronald Cardoso Barbosa Barbosa. — 2018
51 f.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior da Silva Almeida Júnior

1. Vigas de Timoshenko, Observabilidade, Controle. I. da Silva Almeida Júnior, Dilberto da Silva Almeida Júnior, *orient.* II. Título

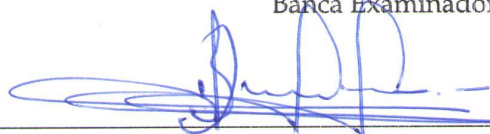
CONTROLABILIDADE EM SISTEMAS DE TIMOSHENKO

Ronald Cardoso Barbosa

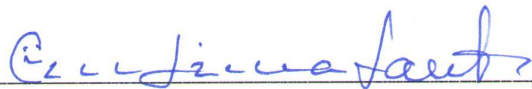
Dissertação apresentado ao Programa de Pós graduação em Matemática e Estatística como parte dos pré requisitos para obtenção do grau Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Banca Examinadora



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior - PPGME/PDM/UFPA



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos -PPGME/PDM/UFPA



Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro- PROFMAT/Campus Abaetetuba

Aprovado em 14 de Março de 2018

Resumo

CONTROLABILIDADE EM SISTEMAS DE TIMOSHENKO

Ronald Cardoso Barbosa

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

No presente trabalho investigamos as propriedades da energia para um modelo de vigas de Timoshenko, visando obter um controle na fronteira. Para isto usamos a desigualdade de Ingham para obtermos a desigualdade de observabilidade, também chamada de desigualdade indireta que é a chave para obtermos o resultado de controlabilidade exata na fronteira que pelo Método de Unicidade Hilbertiana (HUM).

Palavras-chave: Análise; Vigas de Timoshenko; energia; desigualdade de observabilidade e controle.

Belém-Pará

2018

*Abstract***CONTROLLABILITY IN TIMOSHENKO SYSTEMS**

Ronald Cardoso Barbosa

Advisor: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Abstract of Master's Thesis submitted to the Postgraduate Program in Mathematics and Statistics, Federal University of Pará (UFPA-PPGME) as part of the requirements for obtaining a Master's Degree in Mathematics .

In the present work we investigate the properties of the energy for a model of Timoshenko beams, aiming to obtain a border control. For this we use the inequality of Ingham to obtain the inequality of observability, also called indirect inequality, which is the key to obtain the exact controllability result in the frontier that by the Hilbertian Method of Unicity (HUM)

Keywords: Analysis; Beams of Timoshenko; energy; Inequality Observability and Control.

Belém-Pará

2018

“Dedico a Bianca ”

"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre".

(Paulo Freire)

Agradecimentos

- ◆ Agradeço em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida, saúde e pela oportunidade de estar conseguindo, hoje, mais uma vitória, merecidamente e a todos que contribuíram e ainda contribuem para que a cada dia amadureça e aprenda mais.
 - ◆ Em especial, destaco minha mãe Ivone Cardoso Barbosa, mulher batalhadora que sozinho assumiu a responsabilidade de criar a mim e aos meus irmãos Rodrigo Cardoso e Gabriel Cardoso, que nunca me deixou perder o foco nas horas mais difíceis e a outra grande mulher e namorada Bianca Passos, com quem sempre tive e ainda tenho bons momentos de descontração e que sempre me dá forças para dar continuidade nos estudos.
 - ◆ A todos os professores e professoras do programa de pós graduação em matemática que tive a oportunidade de conhecer e principalmente ao meu Orientador professor Dilberto, pessoa simples e gentil que conseguiu me passar todo o conhecimento necessário para desenvolver este trabalho. A todos vocês, meu imenso obrigado.
 - ◆ A meus amigos de jornada Antônio Carlos, Diego, Diogo Moan, Jefferson Macedo e Thiago Laurindo.
 - ◆ Ao apoio financeiro dado pela Capes para que pudesse realizar tudo com sucesso.
-

Sumário

Introdução	9
1 Desigualdade de Observabilidade	12
1.1 Preliminares	12
1.2 O Paradigma Hiperbólico	14
1.3 Método da Unicidade Hilbertiana (HUM)	18
1.4 Observabilidade do Sistema de Timoshenko	21
1.5 Análise Espectral	22
1.6 Desigualdade de Observabilidade	25
2 Controle Exato na Fronteira do Sistema de Timoshenko	39
2.1 Desigualdade Direta e Inversa	39
2.2 Controlabilidade Exata	41
3 Conclusões	48

Introdução

Controlar oscilações em problemas traduzidos em termos de uma equação diferencial parcial de evolução têm despertado o interesse de muitos pesquisadores nos últimos anos. Um exemplo seria controlar as vibrações de uma membrana em duas dimensões, onde as vibrações da membrana são regidas pela clássica equação de onda. Devido a isto, muito se tem estudado a respeito das questões de observabilidade e controlabilidade de EDP's no contexto contínuo.

Tecnologias modernas e aplicações à ciência requerem modelos matemáticos de sólidos que facilitem o cálculo das deformações e tensões com suficiente precisão e sem excessiva análise matemática. O modelo que analizaremos, típico e fundamental na área de estrutura mecânica, torna possível atingir este objetivo. Por essa razão, é bastante utilizado na área de engenharia. Definimos uma viga como um objeto de estrutura delgada, carregada transversalmente cujo comprimento é grande em relação à largura e secção transversal plana. Iremos assumir que a área da seção transversal da viga é simétrica com respeito ao eixo z e que todas as cargas transversais agindo sobre a viga possuem uma simetria semelhante. O modelo que analizaremos foi deduzido por S. P. Timoshenko e consiste em uma aproximação da Teoria da Elasticidade Tridimensional. Quando levamos em consideração a variável z da teoria espacial, resulta o modelo de Kirchhoff e pode ser visto no livro Lagnese-Lions [6] onde a solução única desse problema aproximado converge, em uma adequada topologia, para a solução do modelo tridimensional de Kirchhoff sujeito a apropriadas condições de fronteira.

Nesse sentido, as pequenas vibrações transversais de uma viga são dadas por um sistema unidimensional acoplado de duas equações diferenciais

$$\rho A \varphi_{tt}(x, t) = Q_x(x, t), \quad (1)$$

$$\rho I \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) - Q(x, t), \quad (2)$$

em que t é o tempo, x é a distância ao longo da linha central da viga, φ é o deslocamento

transversal, ψ a rotação nas seções transversais, ρ é a densidade da massa do material do qual a viga é composta, M é o momento de curvatura, Q é o esforço do cortante, $A = ah$ a área de seção transversal, onde a é a largura, h é espessura e $I = \frac{ah^3}{12}$ é o momento de inércia da seção.

As relações de flexão-esforço para o comportamento elástico são dadas por:

$$M(x, t) = EI\psi_x(x, t), \quad (3)$$

$$Q(x, t) = kAG(\varphi_x(x, t) + \psi(x, t)), \quad (4)$$

em que E é o módulo de elasticidade de Young, $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ é o módulo de rigidez do cortante, onde $\mu \in \left(1, \frac{1}{2}\right)$ é o coeficiente de Poisson e k é o fator de correção do cortante.

Assim, usando essas relações, Timoshenko chegou ao seguinte sistema de equações diferenciais

$$\rho A \varphi_{tt} - (kAG(\varphi_x + \psi))_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (5)$$

$$\rho I \psi_{tt} - (EI\psi_x)_x + kAG(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, T). \quad (6)$$

Pondo $\rho A = \rho_1$, $kAG = \kappa$, $\rho I = \rho_2$ e $EI = b$ temos o seguinte sistema com as condições de contorno e iniciais

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (7)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (8)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = 0, \quad \psi_x(L, t) = f(t), \quad 0 < t < T, \quad (9)$$

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1(\cdot), \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(\cdot), \quad \forall x \in (0, L), \quad (10)$$

Estrutura da Dissertação

Neste trabalho, construiremos uma desigualdade de observabilidade para o sistema (7) – (10) com as condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann, neste caso para $f(t) = 0$, mostraremos que existe um $C(T) > 0$ para o problema homogêneo tal que

$$E(0) \leq C(T) \int_0^T \psi^2(L, t) dt. \quad (11)$$

que é a desigualdade que é útil para obtermos o controle exato na fronteira, esta desigualdade será obtida via Inghan do problema homogêneo.

A desigualdade (11) quando existe, garante que a energia na fronteira $x = L$ pode ser estimada por um determinado espaço de tempo, tal fato ocorre porque neste caso o sistema é conservativo, isto é,

$$E(t) = E(0) \leq C(T) \int_0^T \psi^2(L, t) dt. \quad (12)$$

Já a constante $C(T) > 0$ é dita constante de observabilidade.

O objetivo deste trabalho é mostrar o seguinte resultado:

Teorema 0.1 (Controle Exato na Fronteira do Sistema de Timoshenko) *Sejam*

$$\gamma_1 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2} M}{\frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)} > 0 \quad e \quad \gamma_2 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2} M}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} > 0$$

supondo que seja válida a igualdade entre as velocidades de propagação $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e se $T > \frac{2\pi}{\gamma_i}$, $i = 1, 2$, então para todo conjunto de dados $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \in X$ existe um controle $f(t) \in L^2(0, T)$ tal que a solução $\{\varphi, \psi\}$ do sistema (7) – (10) satisfaz

$$\varphi(x, T) = \varphi_t(x, T) = 0 \text{ em } (0, L) \quad (13)$$

$$\psi(x, T) = \psi_t(x, T) = 0 \text{ em } (0, L). \quad (14)$$

Este trabalho está dividido em dois Capítulos

Capítulo 1: Vamos fazer uma breve descrição dos resultados que vamos usar no restante do presente trabalho, comentar rapidamente sobre o paradigma hiperbólico, do Método de Unicidade Hilbertiana (Método HUM) e por fim construir a desigualdade de Observabilidade do Sistema de Timoshenko, no caso das condições de contorno homogênia que será feita usando o Teorema de Ingham.

Capítulo 2: Neste capítulo, de posse da desigualdade direta e da desigualdade de observabilidade, isto é, existirão constantes M_1 e M_2 tais que

$$E(0) \leq M_2 \int_0^T \psi^2(L, t) dt \quad e \quad M_1 \int_0^T \psi^2(L, t) dt \leq E(0) \quad (15)$$

e de posse de (15) vamos usar o Método HUM para obter o controle exato na fronteira.

Capítulo 1

Desigualdade de Observabilidade

Apresentaremos neste capítulo os resultados já obtidos com respeito ao paradigma hiperbólico, ou seja, a equação de ondas que servirá de motivação para um melhor entendimento do método para a obtenção do controle na fronteira.

1.1 Preliminares

Nesta seção, X representará o espaço de Banach de norma $\|\cdot\|$ e dual X' . Denotaremos por $C^1([0, T]; X)$ espaço das funções continuamente deriváveis. Dito isto é possível definir os espaços $C^k([0, T]; X)$, $k > 1$ que é as das funções que possuem derivadas de até ordem k em todos os pontos de $[0, T]$ e a derivada de ordem k é contínua e $C^\infty([0, T]; X)$ o espaço que possui derivadas de todas as ordens em todos os pontos de $[0, T]$.

Dados $1 \leq p \leq \infty$ e $T > 0$ denota-se por $L^p([0, T]; X)$ o espaço das funções mensuráveis $f : (0, T) \rightarrow X$ tais que

$$\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty \quad (1.1)$$

e neste caso é possível definir

$$\int_0^T f(t) dt \in X \quad (1.2)$$

A norma em $L^p([0, T]; X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ é definida por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.3)$$

Teorema 1.1 O espaço $(L^p([0, T]; X), \|f\|_{L^p})$ é de Banach.

Demonstração: Ver [9]

Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T)$ o conjunto das funções $\phi : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $\phi \in C^\infty(0, T)$ e $\overline{\text{supp}(\phi)} \subset (0, T)$, tais funções são chamadas de Funções Testes.

Representaremos por $\mathcal{D}'([0, T]; X)$ o espaço das aplicações lineares contínuas $T : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, tal espaço é chamado de Distribuições Vetoriais em $(0, T)$.

Definição 1.1 Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $W^{1,p}([0, T]; X)$ o espaço das funções $f \in L^p([0, T]; X)$ tais que $f' \in L^p([0, T]; X)$ no sentido de $\mathcal{D}'([0, T]; X)$, isto é

$$\int_0^T f(t)\phi'(t)dt = - \int_0^T f'(t)\phi(t)dt \quad (1.4)$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$. A norma neste espaço é dada por

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}. \quad (1.5)$$

Teorema 1.2 O espaço $(W^{1,p}([0, T]; X), \|f\|_{W^{1,p}})$ é Banach.

Demonstração: Ver [9]

Os espaços $W^{1,p}([0, T]; X)$ é também conhecido como espaços de Sobolev.

Denotamos $W^{1,2}([0, L]; X) = H^1([0, L]; X)$ que é um espaço de Hilbert dotado com a norma

$$\|u\|^2 = \int_0^L u^2(x)dx$$

que provém do produto interno

$$(u, v) = \int_0^L u(x)v(x)dx. \quad (1.6)$$

Proposição 1.1 (Desigualdade de Young) Dados a e b reais positivos e $1 \leq p, q \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.7)$$

Demonstração: Ver [9]

Teorema 1.3 (Lax-Milgran) Seja H um espaço de Hilbert sobre \mathbb{R} e $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Para todo funcional linear contínuo $\varphi \in H'$ existe um único vetor $x_0 \in H$ tal que

$$a(x, x_0) = \langle \varphi, x \rangle \quad (1.8)$$

possui única solução $x \in H$.

Demonstração: Ver [9]

Definição 1.2 Dado $1 < p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}([0, T], X)$ o fechado de $C_0^1([0, T], X)$ em $W_0^{1,p}([0, T], X)$. O conjunto

$$H_0^1([0, T], X) = W_0^{1,p}([0, T], X).$$

O espaço $W_0^{1,p}([0, T], X)$ é equipado com a norma de $W^{1,p}([0, T], X)$, e o espaço $H_0^1([0, T], X)$ é equipado com o produto escalar de $H^1([0, T], X)$.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Poincaré) Seja Ω um subconjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n . Se $v \in H_*^1(\Omega)$ então existe uma constante positiva C tal que

$$|v|_{L^2(\Omega)} \leq C |\nabla v|_{L^2(\Omega)} \quad (1.9)$$

onde ∇v é o gradiente de v .

Demonstração: Ver [9]

Observe que $H_0^1(\Omega) \subset H_*^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ onde

$$H_*^1 = \left\{ u \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \right\}$$

que é conhecida como conjunto de média nula.

1.2 O Paradigma Hiperbólico

A fim de motivar nossos estudos, analisaremos primeiramente as propriedades de observabilidade da equação de propagação de ondas unidimensional dada por:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.10)$$

$$u(0, t) = g(t), u(L, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (1.11)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 < x < L. \quad (1.12)$$

Em (1.10) – (1.12), $u = u(x, t)$ descreve o deslocamento de uma corda vibrante atuando no intervalo $(0, L)$ e $g(t) \in L^2(0, T)$ é o controle.

Matematicamente o problema (1.10) – (1.12) é bem posto no espaço de energia $H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$. Mais precisamente, para quaisquer $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ existe uma única solução

$$u \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)).$$

Quando $g(t) = 0$ energia das soluções é dada por,

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L (|u_t|^2 + |u_x|^2) dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.13)$$

e ela é conservada ao longo do tempo, isto é,

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.14)$$

O problema de observabilidade da fronteira de (1.10) – (1.12) pode ser formulado da seguinte maneira: Dado um $T > 0$, existe $C(T) > 0$ tal que a seguinte desigualdade

$$E(0) \leq C(T) \int_0^T |u_x(L, t)|^2 dt, \quad (1.15)$$

conhecida como desigualdade de observabilidade é válida para todas as soluções de (1.10) – (1.12).

Observe que em (1.15) a energia está sendo estimada em $x = L$, mas também podemos ter a energia sendo estimada em $x = 0$. Pode-se obter as desigualdades via técnicas multiplicativas.

Teorema 1.4 *Para toda solução u de (1.10) – (1.12) temos para $T > 2L$*

$$E(0) \leq C_1(T) \int_0^T |u_x(0, t)|^2 dt \quad (1.16)$$

Demonstração: Considere o funcional

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_x^{T-x} (u_t^2 + u_x^2) dt. \quad (1.17)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_0^L F(x) dx &= \int_0^L \int_x^{T-x} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} \right) dx dt = \int_x^{T-x} E(t) dt \\ &= \int_x^{T-x} E(0) dt \geq (T - 2L)E(0). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Agora, derivando (1.17) com respeito a x , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} &= \int_x^{T-x} (u_t u_{tx} + u_x u_{xx}) dt - \frac{1}{2} \sum_{t=x}^{t=T-x} (u_t^2 + u_x^2) \\ &= u_t u_x \Big|_{t=x}^{T-x} - \int_x^{T-x} u_{tt} u_x dt + \int_x^{T-x} u_{xx} u_x dt - \frac{1}{2} \sum_{t=x}^{t=T-x} (u_t^2 + u_x^2) \end{aligned}$$

e usando (1.10) obtemos

$$\frac{dF(x)}{dx} = u_t u_x \Big|_{t=x}^{T-x} - \frac{1}{2} \sum_{t=x}^{t=T-x} (u_t^2 + u_x^2)$$

que pela desigualdade de Young nos dá

$$\frac{dF(x)}{dx} \leq 0, \quad \forall x \in [0, L],$$

isto é

$$F(x) \leq F(0), \quad \forall x \in [0, L].$$

Assim,

$$\int_0^L F(x) dx \leq \int_0^L F(0) dx = F(0)L$$

o que nos dá

$$(T - 2L)E(0) \leq LF(0).$$

Vemos que

$$F(0) = \frac{1}{2} \int_0^T (u_t^2(0, t) + u_x^2(0, t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^T u_x^2(0, t) dt,$$

daí,

$$\begin{aligned} (T - 2L)E(0) &\leq \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(0, t) dt \\ E(0) &\leq \frac{L}{2(T - 2L)} \int_0^T u_x^2(0, t) dt \end{aligned}$$

e fazendo $C_1(T) = \frac{L}{2(T - 2L)}$ temos o resultado.

Podemos ainda obter a desigualdade direta, assim temos

Teorema 1.5 Para toda solução u de (1.10) – (1.12) temos para $T > 2L$

$$C_2(T) \int_0^T |u_x(0, t)|^2 dt \leq E(0). \quad (1.19)$$

Demonstração: Basta multiplicar (1.10) por $(L - x)u_x$ e integrar em $(0, L) \times (0, T)$.

Observe que do Teorema 1.4 e do Teorema 1.5 que

$$K_1 E(0) \leq \int_0^T |u_x(0, t)|^2 dt \leq K_2 E(0) \quad (1.20)$$

onde $K_1 = \frac{1}{C_1(T)}$ e $K_2 = \frac{1}{C_2(T)}$.

O controle exato na fronteira de (1.10) – (1.12) pode ser formulado da seguinte maneira: Para $T > T_0$, $T_0 > 0$ e dado um espaço de Hilbert \mathcal{F} tal que para todo dado inicial $\{u_0, u_1\}$ existe um controle $g(t) \in L^2(0, T)$ tal que a solução u de (1.10) – (1.12) obedece as condições

$$u(x, T) = u_t(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, L).$$

Teorema 1.6 (Ingham) Seja $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de números reais tais $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Então para qualquer $T > \frac{2\pi}{\gamma}$ existem constantes positivas $C_j(T, \gamma) > 0$, $j = 1, 2$ tal que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leq \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \quad (1.21)$$

para toda sequência $(\alpha_n) \in l^2$ de números complexos.

Demonstração: Ver [1].

A solução em série de Fourier de (1.10) – (1.12) é dado por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \text{sen}(\lambda_n t)) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (1.22)$$

onde $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$. Podemos ainda escrever ela na sua forma complexa, isto é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n t} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (1.23)$$

e com esta solução, usando a energia dada por (1.13) calculando as suas derivadas em $t = 0$ segue das relações de ortogonalidade que

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2} \int_0^L \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n i \lambda_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{L} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right|^2 dx \\ &= L \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Temos ainda que sendo $\lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L} =: \gamma > 0$ e vemos facilmente que

$$u_x(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{L} e^{i\lambda_n t} \quad (1.25)$$

e então pela desigualdade de Ingham aplicado em (1.25) que existem constantes $C_i = C_i(T, \gamma) > 0$ com $i = 1, 2$ tais que

$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{n\pi}{L} \right)^2 \leq \int_0^T u_x^2(0, t) dt \leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (1.26)$$

e de (1.24) obtemos

$$M_1 E(0) \leq \int_0^T u_x^2(0, t) dt \leq M_2 E(0) \quad (1.27)$$

onde $M_1 = \frac{C_1}{L}$ e $M_2 = \frac{C_2}{L}$.

De maneira totalmente análogo temos para $u_x(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$, onde $a_n = A_n (-1)^n \lambda_n$ e $A_n = \frac{1}{n\lambda_n}$ obteremos

$$N_1 E(0) \leq \int_0^T u_x^2(L, t) dt \leq N_2 E(0) \quad (1.28)$$

onde $N_1 = \frac{C_1}{L}$ e $N_2 = \frac{C_2}{L}$.

1.3 Método da Unicidade Hilbertiana (HUM)

A controlabilidade é uma das propriedades mais estudadas em EDP, provavelmente porque uma EDP controlável também é estabilizável, e a recíproca também é válida para uma ampla classe de EDP's. Observamos que, para uma EDP, temos à nossa disposição três conceitos de controlabilidade, ou seja, a controlabilidade exata, a controlabilidade nula e a controlabilidade aproximada. Nesta seção vamos descrever o método HUM, para um bom entendimento daremos a seguir os passos para o controle exato na fronteira.

Considere seguinte o problema de Equação de ondas mais geral:

$$P_1 = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \\ u = g & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad (1.29)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave, Γ a fronteira, $g \in L^2(\Sigma)$ o controle, $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $u_1 \in H^{-1}(\Omega)$ as condições iniciais. Lions [3] provou que a solução do problema P_1 satisfaz o problema de controlabilidade exata na fronteira, isto é:

Dado $T > 0$ e condições iniciais $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, existe um controle $g \in L^2(\Sigma_0)$ tal que

$$u(x, t) = \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0, \forall \in \Omega. \quad (1.30)$$

Isto foi demonstrado, usando a implementação do Método de Unicidade Hilbertiana (HUM) descrito nos trabalhos de Lions [3] – [5]. Por questões didáticas vamos nomear os passos do método HUM para que haja um bom entendimento.

Primeiro Passo: Problema Homogêneo Adjunto

Dado $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ consideremos

$$P_1 = \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 0, & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x), \\ u = 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{cases} \quad (1.31)$$

o qual possui única solução.

Segundo Passo: Problema de controlabilidade exata na fronteira

Uma vez calculada a solução de (1.31), passamos a resolver o seguinte problema:

$$P_1 = \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 0, & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ \varphi(x, T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, T) = 0, \\ u = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & \text{sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T) \end{cases} \quad (1.32)$$

onde $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal unitário exterior à Ω no ponto $x \in \Gamma$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \in L^2(\Sigma_0)$ é a derivada de φ nesta direção. O problema (1.32) possui novamente uma única solução regular.

Terceiro Passo: O operador $A\{.,.\}$

Definimos o operador

$$A\{\varphi_0, \varphi_1\} = \{u_1, -u_0\}, \quad (1.33)$$

e multiplicamos a primeira equação de (1.32) por $\psi = \psi(x, t)$, uma solução do problema ho-

homogêneo (1.31) com dados iniciais $\{\psi_0, \psi_1\}$ para então obtermos

$$\begin{aligned} \langle A\{\varphi_0, \varphi_1\}, \{\psi_0, \psi_1\} \rangle &:= \int_{\Omega} (u_1\psi_0 - u_0\psi_1) dx \\ &= \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} d\Sigma, \end{aligned} \quad (1.34)$$

onde $d\Sigma = d\Gamma dt$ é a medida sobre a superfície lateral do cilindro Q . Definimos a norma

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_F = \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \right|^2 d\Sigma, \quad (1.35)$$

sobre o espaço $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ que induz o produto interno

$$\langle A\{\varphi_0, \varphi_1\}, \{\psi_0, \psi_1\} \rangle_F := \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} d\Sigma. \quad (1.36)$$

Considerando a estrutura algébrica (1.35) – (1.36) definimos o espaço de Hilbert

$$F = \overline{\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_F}. \quad (1.37)$$

Em vista de (1.36) o operador A se estende a um operador linear e contínuo de F em F' . Por outro lado, de (1.35) deduzimos que

$$A : F \longrightarrow F' \quad \text{é um isomorfismo.} \quad (1.38)$$

Em particular, se quisermos mostrar a controlabilidade exata em $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, precisamos provar que $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ou equivalentemente

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Com efeito, a inclusão $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset F$ é imediata em vista de (1.37) e a densidade de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Resta então provar a outra inclusão

$$F \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

que é garantida graças a desigualdade indireta

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq C(T) \|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_F, \quad \text{com } C(T) > 0 \quad (1.39)$$

também conhecida como desigualdade de Observabilidade do problema homogêneo (1.31).

1.4 Observabilidade do Sistema de Timoshenko

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } Q \quad (1.40)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em } Q \quad (1.41)$$

em que $Q = (0, L) \times (0, T)$ com as condições de fronteira

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0 \text{ em } (0, T), \quad (1.42)$$

$$\psi_x(0, t) = 0, \psi_x(L, t) = f(t) \text{ em } (0, T), \quad (1.43)$$

e condições iniciais

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x) \text{ em } (0, L) \quad (1.44)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x) \text{ em } (0, L). \quad (1.45)$$

É sabido que para $f(t) = 0$ o sistema (1.40) – (1.45) é conservativo, isto é,

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0 \quad (1.46)$$

onde

$$E(t) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx. \quad (1.47)$$

De fato, multiplicando a equação (1.40) por φ_t e a equação (1.41) por ψ_t , integramos temos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx &= 0 \\ \rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx &= 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições (1.42) e (1.43) e as identidades $\frac{d}{dt} |\varphi_t|^2 = 2\varphi_{tt}\varphi_t$, $\frac{d}{dt} |\psi_t|^2 = 2\psi_{tt}\psi_t$ e $\frac{d}{dt} |\psi_x|^2 = 2\psi_{tx}\varphi_x$ temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx = 0 \quad (1.48)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \quad (1.49)$$

Somando (1.48) e (1.49) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\rho_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{\rho_2}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \right) &= 0, \end{aligned}$$

logo

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.50)$$

obtendo assim (1.46).

1.5 Análise Espectral

Nesta seção vamos estudar o problema espectral associado ao sistema (1.40) – (1.45) e analizaremos a mudança assintótica dos autovalores. Assumiremos em particular a conhecida hipótese entre as velocidades, isto é,

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}. \quad (1.51)$$

Antes de tudo vamos reescrever o sistema (1.40) – (1.45) como

$$\Phi' = A\Phi, \quad (1.52)$$

onde $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T$ e $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ é o operador diferencial dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 \\ \kappa/\rho_1 \partial_x^2 & 0 & \kappa/\rho_1 \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \\ -\kappa/\rho_2 \partial_x^2 & 0 & b/\rho_2 \partial_x^2 - \kappa/\rho_2 I_d & 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

onde I_d é o operador identidade e X é o espaço de Hilbert dado por

$$X = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L)$$

tal que a norma é dada por

$$\|V\|_X^2 = \|(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi})\|_X^2 = \int_0^L (\rho_1 |\tilde{\varphi}|^2 + \rho_2 |\tilde{\psi}|^2 + b |\varphi_x|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi|^2) dx. \quad (1.54)$$

O operador A dado em (1.53) tem como domínio

$$D(A) = [H_0^1(0, L) \times H^2(0, L)] \times H_0^1(0, L) \times W \times H_*^1(0, L),$$

onde

$$W = \{v \in H^2(0, L), v_x(0) = v_x(L) = 0\} \quad (1.55)$$

é um semigrupo gerado por $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$, conforme [2].

Agora vamos proceder com o estudo espectral. Seja

$$(A - \lambda I)\Psi = 0 \quad (1.56)$$

onde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\Psi = (\varphi, \lambda\varphi, \psi, \lambda\psi)^T \in D(A)$, obtemos assim o sistema de equações dada por

$$\rho_1 \lambda^2 \varphi - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad (1.57)$$

$$\rho_2 \lambda^2 \psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0 \quad (1.58)$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \psi_x(0) = \psi_x(L) = 0. \quad (1.59)$$

Agora consideremos as sequências

$$\varphi_n(x, t) = e^{\lambda t} u_n(x) \quad (1.60)$$

$$\psi_n(x, t) = e^{\lambda t} v_n(x) \quad (1.61)$$

solução de (1.57) – (1.59), onde $u_n(x) = \text{sen}(\theta_n x)$ e $v_n(x) = c_n \cos(\theta_n x)$ com $\theta_n = \frac{n\pi}{L}$. Substituindo (1.60) – (1.61) em (1.57) obtemos

$$\{\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2 + \kappa \theta_n c_n\} \text{sen}(\theta_n x) = 0, \quad (1.62)$$

como $\text{sen}(\theta_n x) \neq 0$ temos

$$c_n = -\frac{\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2}{\kappa \theta_n}. \quad (1.63)$$

Levando (1.60) – (1.61) em (1.58) e procedendo como acima, temos

$$c_n = -\frac{k \theta_n}{\rho_2 \lambda^2 + b \theta_n^2 + \kappa}. \quad (1.64)$$

Combinando (1.63) e (1.64) obtemos

$$\lambda^4 + \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \lambda^2 + \frac{\kappa b \theta_n^2}{\rho_1 \rho_2} = 0. \quad (1.65)$$

A solução de (1.65) é

$$\lambda_n = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}}, n \in \mathbb{N} \quad (1.66)$$

onde

$$\Delta_n = \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2 - 4 \frac{\kappa b \theta_n^2}{\rho_1 \rho_2}, n \in \mathbb{N}. \quad (1.67)$$

É fácil ver que

$$\Delta_n = \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} \right)^2 \theta_n^4 + \left(\frac{\kappa}{\rho_2} \right)^2 + 2 \frac{\kappa}{\rho_2} \left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 > 0 \quad (1.68)$$

e com isto temos

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2 - 4 \frac{\kappa b \theta_n^2}{\rho_1 \rho_2} \\ &< \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right]^2 \end{aligned}$$

e que nos dá

$$-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} < 0 \quad (1.69)$$

e assim

$$\lambda_n^\pm = \sqrt{-\left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2} \right)}$$

donde concluímos que

$$\lambda_n = \pm i \lambda_n^\pm, n \in \mathbb{N} \quad (1.70)$$

onde

$$\lambda_n^\pm = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right] \pm \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}}, \quad (1.71)$$

para simplificação de notação vamos denominar por $B_n = \left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}$ e por $C_n = \frac{\kappa b \theta_n^2}{\rho_1 \rho_2}$ e então reescrevemos (1.71) como

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{B_n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{B_n^2 - 4C_n}} \quad (1.72)$$

Concluimos que, em vista dos autovalores obtidos a solução do sistema (1.40) – (1.45) é dado por :

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{-i\lambda_n^+} + b_n e^{-i\lambda_n^-} \right) \text{sen}(\theta_n x), \quad (1.73)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{-i\lambda_n^+} + b_n e^{-i\lambda_n^-} \right) c_n \cos(\theta_n x). \quad (1.74)$$

Observe que $\{\varphi, \psi\}$ satisfazem (1.40) – (1.45), no caso em que $f(t) = 0$.

1.6 Desigualdade de Observabilidade

Consideremos a solução (1.73) e (1.74), onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier. Nesta seção vamos mostrar que existe uma constante positiva $C(T, \gamma)$ tal que

$$E(0) \leq C(T, \gamma) \int_0^T \psi^2(L, t) dt, \quad (1.75)$$

onde γ é uma constante positiva que limita inferiormente o gap para a sequência (λ_n) e ψ como em (1.74). Antes provaremos alguns resultados que usaremos para a demonstração de (1.75)

Proposição 1.3 *Para todo $n \in \mathbb{Z}^*$ existem constantes positivas γ_1 e γ_2 tal que*

$$|\lambda_{n+1}^{\pm} - \lambda_n^{\pm}| > \gamma_i > 0, \quad \forall \quad i = 1, 2 \quad (1.76)$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2}M}{\frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)} > 0 \quad e \quad \gamma_2 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2}M}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} > 0$$

Demonstração: Vamos fazer para o sinal + primeiramente. De fato, observe que

$$\lambda_{n+1}^+ - \lambda_n^+ = \sqrt{\frac{B_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}}} - \sqrt{\frac{B_n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2}(B_{n+1} - B_n) + \frac{1}{2}(\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} - \sqrt{B_n^2 - 4C_n})}{\sqrt{\frac{B_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}}} + \sqrt{\frac{B_n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}}} \end{aligned} \quad (1.78)$$

e que

$$\begin{aligned} B_{n+1} - B_n &= (\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2)M \\ &= (2n+1) \frac{\pi^2}{L^2} M. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Assim,

$$|\lambda_{n+1}^+ - \lambda_n^+| = \frac{\left| \frac{1}{2}(B_{n+1} - B_n) + \frac{1}{2}(\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} - \sqrt{B_n^2 - 4C_n}) \right|}{\underbrace{\left| \sqrt{\frac{B_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}}} + \sqrt{\frac{B_n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}} \right|}_H} \quad (1.80)$$

onde

$$\begin{aligned} H &= \left| \sqrt{\frac{B_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}}} + \sqrt{\frac{B_n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}} \right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sqrt{B_{n+1} + \sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}}} + \sqrt{B_n + \sqrt{B_n^2 - 4C_n}} \right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} + \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_1}\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}} + \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} + \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_1}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}} \right\} \end{aligned}$$

onde assumimos $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e que $M = \frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}$, assim

$$\begin{aligned} H &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_1}\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}}{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}}} \right\} + \\ &\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_1}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}}{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}}} \right\} \quad (1.81) \end{aligned}$$

uma vez que

$$\left(M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right)^2 = M^2\theta_n^4 + \frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2} \geq \frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2},$$

temos como consequência

$$0 < \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}}{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \leq 1 \quad (1.82)$$

e da mesma maneira

$$0 < \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}}{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \leq 1. \quad (1.83)$$

Podemos então usar a seguinte aproximação $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, $0 < x < 1$, para (1.81) para obtermos

$$H \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_1} \theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}}{2 \left(M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right)} \right\}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_1} \theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}}{2 \left(M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right)} \right\}$$

donde por (1.82) e (1.83) temos

$$H \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} \left\{ \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} + \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \right\}$$

e usando a desigualdade elementar $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ onde $a, b > 0$ temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} H &\leq \frac{3\sqrt{2}}{4} \left\{ \sqrt{M\theta_{n+1}^2} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} + \sqrt{M\theta_n^2} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \left\{ (\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right\} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Agora, levando (1.84) em (1.80) temos

$$|\lambda_{n+1}^+ - \lambda_n^+| \geq \frac{\frac{1}{2}(B_{n+1} - B_n) + \frac{1}{2}(\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} - \sqrt{B_n^2 - 4C_n})}{\frac{3\sqrt{2}}{4} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)}.$$

De

$$\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} = \sqrt{2\frac{\kappa}{\rho_1} M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}} \quad (1.85)$$

e

$$\sqrt{B_n^2 - 4C_n} = \sqrt{2\frac{\kappa}{\rho_1} M\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}}, \quad (1.86)$$

temos de $\theta_{n+1}^2 \geq \theta_n^2$ e (1.85) e (1.86) que

$$\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} - \sqrt{B_n^2 - 4C_n} \geq 0, \quad (1.87)$$

logo, de (1.79) e (1.87) para $n \geq 1$ segue que

$$|\lambda_{n+1}^+ - \lambda_n^+| \geq \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2}M}{\frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)} =: \gamma_1 > 0 \quad (1.88)$$

Faremos agora para $|\lambda_{n+1}^- - \lambda_n^-|$, com efeito, da mesma maneira como para o sinal + temos

$$\lambda_{n+1}^- - \lambda_n^- = \frac{\frac{1}{2}(B_{n+1} - B_n) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} - \sqrt{B_n^2 - 4C_n} \right)}{\sqrt{\frac{B_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} + \sqrt{\frac{B_n}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}}}}.$$

Denotando por

$$H_{1n} = \sqrt{\frac{B_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}}} + \sqrt{\frac{B_n}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}} \quad (1.89)$$

temos

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^- - \lambda_n^- &= \frac{1/2}{H_{1n}} \left\{ (B_{n+1} - B_n) - \left(\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} - \sqrt{B_n^2 - 4C_n} \right) \right\} \\ &= \frac{1/2}{H_{1n}} \left\{ \frac{(B_{n+1} - B_n) \left(\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} + \sqrt{B_n^2 - 4C_n} \right) - B_{n+1}^2 + 4C_{n+1} + B_n^2 - 4C_n}{\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} + \sqrt{B_n^2 - 4C_n}} \right\} \end{aligned}$$

pondo

$$H_{2n} = \sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}} + \sqrt{B_n^2 - 4C_n} \quad (1.90)$$

temos

$$\lambda_{n+1}^- - \lambda_n^- = \frac{1/2}{H_{1n}H_{2n}} \left\{ (B_{n+1} - B_n)H_{2n} - (B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}) + (B_n^2 - 4C_n) \right\}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} |\lambda_{n+1}^- - \lambda_n^-| &= \left| \frac{1/2}{H_{1n}H_{2n}} \left\{ (B_{n+1} - B_n)H_{2n} - (B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}) + (B_n^2 - 4C_n) \right\} \right| \\ &= \left| \frac{1/2}{H_{1n}H_{2n}} \right| \left| (B_{n+1} - B_n)H_{2n} - (B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}) + (B_n^2 - 4C_n) \right| \\ &= \left| \frac{1/2}{H_{1n}H_{2n}} \right| \left| (\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2)H_{2n} - \frac{2\kappa M}{\rho_2} (\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2) \right| \\ &= \left| \frac{1/2}{H_{1n}H_{2n}} \right| \left| (\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2)M \right| \left| H_{2n} - \frac{2\kappa}{\rho_2} \right| \\ &= \frac{1/2}{\left| H_{1n} \right| \left| H_{2n} \right|} \left| (\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2)M \right| \left| H_{2n} - \frac{2\kappa}{\rho_2} \right|. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Agora

$$\begin{aligned}
|H_{1n}| &= \left| \sqrt{\frac{B_{n+1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{B_{n+1}^2 - 4C_{n+1}}} + \sqrt{\frac{B_n}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}} \right| \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} - \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}}} + \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} - \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}}} \right|
\end{aligned} \tag{1.92}$$

e vendo que $M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} - \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}} \geq 0$, $M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} - \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}} \geq 0$ que é garantido graças a (1.82) e (1.83) temos desta observação que

$$\begin{aligned}
|H_{1n}| &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} - \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}}} + \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} - \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}}}{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}}} \right\} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}}}{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}}} \right\}
\end{aligned} \tag{1.93}$$

e por (1.82) e (1.83) podemos usar a aproximação $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{x}{2}$, onde $x \in (0, 1)$ para obtermos

$$H_{1n} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}}}{2 \left(M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right)} \right\} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}\theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}}}{2 \left(M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} \right)} \right\} \tag{1.94}$$

temos que

$$\begin{aligned}
H_{1n} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \sqrt{M\theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} + \sqrt{M\theta_n^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}} \right\} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left((\theta_{n+1} + \theta_n)\sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)
\end{aligned} \tag{1.95}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
|H_{2n}| = H_{2n} &= \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2} \theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}} + \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2} \theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2}} \\
&\leq \theta_{n+1} \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}} + \frac{\kappa}{\rho_2} + \theta_n \sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2}} + \frac{\kappa}{\rho_2} \\
&= \sqrt{\frac{2\kappa}{\rho_2}} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)
\end{aligned} \tag{1.96}$$

e do fato que $\sqrt{2} \geq 1$ então de (1.96) temos

$$H_{2n} \leq \sqrt{\frac{2\kappa}{\rho_2}} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right) \tag{1.97}$$

de (1.95) e (1.97) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|H_{1n}| |H_{2n}|} &\geq \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right) \sqrt{\frac{2\kappa}{\rho_2}} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)} \\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2 \sqrt{\frac{2\kappa}{\rho_2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2}
\end{aligned} \tag{1.98}$$

e de (1.91) e (1.98) temos que

$$|\lambda_{n+1}^- - \lambda_n^-| \geq \frac{1/2}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} \left| (\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2) M \right| \left| H_{2n} - \frac{2\kappa}{\rho_2} \right| \tag{1.99}$$

e vendo que

$$\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2} \theta_{n+1}^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}} \geq \frac{\kappa}{\rho_2} \quad \text{e} \tag{1.100}$$

$$\sqrt{\frac{2\kappa M}{\rho_2} \theta_n^2 + \frac{\kappa^2}{\rho_2^2}} \geq \frac{\kappa}{\rho_2} \tag{1.101}$$

temos deste modo, somando (1.100) e (1.101) vemos que

$$H_{2n} - \frac{2\kappa}{\rho_2} \geq 0 \tag{1.102}$$

e assim

$$\begin{aligned}
|\lambda_{n+1}^- - \lambda_n^-| &\geq \frac{1/2}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} |(\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2)M| \left(H_{2n} - \frac{2\kappa}{\rho_2} \right) \\
&\geq \frac{1/2(\theta_{n+1}^2 - \theta_n^2)}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left((\theta_{n+1} + \theta_n) \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} \\
&\geq \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2}M}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + 2\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} := \gamma_2 > 0
\end{aligned} \tag{1.103}$$

mostrando assim a Proposição.

Lema 1.1 Para todo $T > \frac{2\pi}{\gamma_i}$, $i = 1, 2$ onde

$$\gamma_1 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2}M}{\frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)} > 0 \text{ e } \gamma_2 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2}M}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} > 0$$

existem constantes positivas $C_i = C(T, \gamma)$ e $N_i = N(T, \gamma)$ com $i = 1, 2$ tais que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2 \leq \int_0^T \psi^2(L, t) dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2 \quad e \tag{1.104}$$

$$N_1(T, \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \theta_n^2 \leq \int_0^T \varphi_x^2(L, t) dt \leq N_2(T, \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \theta_n^2. \tag{1.105}$$

Demonstração: Temos de (1.73) e (1.74) que

$$\psi(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{-i\lambda_n^+ t} + b_n e^{-i\lambda_n^- t} \right) c_n (-1)^n \quad e \tag{1.106}$$

$$\varphi_x(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{-i\lambda_n^+ t} + b_n e^{-i\lambda_n^- t} \right) \theta_n (-1)^n. \tag{1.107}$$

Temos que mostrar que $(a_n + b_n)c_n(-1)^n \in l^2(\mathbb{Z}^*)$.

De fato, basta tomar $a_n = \frac{1}{nc_n}$ e $b_n = \frac{1}{\alpha nc_n}$ onde $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

$$a_n c_n (-1)^n + b_n c_n (-1)^n = (a_n + b_n) c_n (-1)^n = \frac{\alpha + 1}{\alpha n} (-1)^n \tag{1.108}$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 (c_n (-1)^n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha^2 n^2} < \infty \tag{1.109}$$

portanto, pelo Teorema de Ingham segue (1.104).

Agora, vamos mostrar que $(a_n + b_n)\theta_n(-1)^n \in l^2(\mathbb{Z}^*)$. É fácil ver que

$$(a_n + b_n)\theta_n(-1)^n = \frac{(\alpha + 1)\theta_n}{\alpha n}(-1)^n \quad (1.110)$$

e de (1.63) tem-se $c_n^2 \geq \theta_n^2$ e isto nos dá

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 (\theta_n(-1)^n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)^2 \theta_n^2}{\alpha^2 n^2 c_n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha^2 n^2} < \infty \quad (1.111)$$

e pelo Teorema de Ingham segue (1.105).

Teorema 1.7 Para todo $T > \frac{2\pi}{\gamma_i}$, com $i = 1, 2$ onde

$$\gamma_1 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2}M}{\frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3\pi}{L}\sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)} > 0 \quad e \quad \gamma_2 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2}M}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left(\frac{3\pi}{L}\sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} > 0$$

existe uma constante positiva M_2 tal que

$$E(0) \leq M_2 \int_0^T \psi^2(L, t) dt.$$

Demonstração: Pelo Lema 1.1 existem uma constante positiva $C_1(T, \gamma)$ tal que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2 \leq \int_0^T \psi^2(L, t) dt. \quad (1.112)$$

Da energia dada por (1.47) fazendo $t = 0$ obtemos :

$$E(0) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2(x, 0) dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L \psi_t^2(x, 0) dx + \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2(x, 0) dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x(x, 0) + \psi(x, 0))^2 dx$$

Pelas soluções dadas em (1.73) e (1.74), derivando e calculando no tempo $t = 0$ temos

$$2E(0) = \int_0^L \rho_1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) \text{sen}(\theta_n x) \right|^2 dx + \int_0^L \rho_2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-) c_n \cos(\theta_n x) \right|^2 dx$$

$$+ \int_0^L b \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) c_n \theta_n \text{sen}(\theta_n x) \right|^2 dx + \int_0^L \kappa \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \theta_n \cos(\theta_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) c_n \cos(\theta_n x) \right|^2 dx$$

e pelas relações de ortogonalidade das funções seno e cosseno obtemos:

$$2E(0) = \frac{L\rho_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 + \frac{L\rho_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \lambda_n^+ + b_n \lambda_n^-)^2 c_n^2 +$$

$$\frac{bL}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \theta_n^2 c_n^2 + \frac{\kappa L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 (\theta_n + c_n)^2. \quad (1.113)$$

Agora, de (1.63)

$$\frac{\lambda^\pm}{c_n} = \frac{\sqrt{\frac{B_n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}}}{\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2} \quad (1.114)$$

$$= \frac{-\kappa \theta_n \sqrt{\frac{B_n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{B_n^2 - 4C_n}}}{\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2}. \quad (1.115)$$

Como

$$B_n = \theta_n^2 M + \frac{\kappa}{\rho_2} = \theta_n^2 \underbrace{\left[M + \frac{\kappa}{\theta_n^2 \rho_2} \right]}_{\beta_n}$$

temos

$$B_n = \theta_n^2 \beta_n \quad (1.116)$$

e

$$C_n = \theta_n^4 A, \quad (1.117)$$

onde $A = \frac{b\kappa}{\rho_1 \rho_2}$. Agora, substituindo (1.116) e (1.117) em (1.115) e fazendo as simplificações obtemos:

$$\frac{\lambda^\pm}{c_n} = -\frac{\kappa \sqrt{\frac{\beta_n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta_n^2 - 4A}}}{\frac{\rho_1 \lambda^2}{\theta_n^2} + \kappa}. \quad (1.118)$$

Assim, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[M + \frac{\kappa}{\theta_n^2 \rho_2} \right] = M \quad (1.119)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n^2 - 4A) = \left(\frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \right)^2 = 0 \quad (1.120)$$

pois $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$, temos assim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^\pm}{c_n} = -\sqrt{\frac{1}{2}M} \quad (1.121)$$

o que nos permite concluir que a sequência (1.121) é convergente, logo é limitada, assim existe uma constante $\mu_0 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\lambda^\pm}{c_n} \right| \leq \mu_0,$$

isto é, levando em conta (1.63) temos

$$-\mu_0 \leq \frac{\lambda^\pm}{c_n} \leq \mu_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_0 c_n \leq \lambda^\pm \leq -\mu_0 c_n, \quad (1.122)$$

uma vez que $-c_n > 0$.

Por outro lado, novamente por (1.63)

$$\frac{\theta_n}{c_n} = \frac{\theta_n}{(-\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2) / \kappa \theta_n} = -\frac{\kappa \theta_n^2}{\rho_1 \lambda^2 + \kappa \theta_n^2} = -\frac{\kappa}{\frac{\rho_1 \lambda^2}{\theta_n^2} + \kappa}$$

e assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{c_n} = -1 \quad (1.123)$$

e assim, pela mesma razão acima existe $\mu_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\theta_n}{c_n} \right| \leq \mu_1,$$

ou seja,

$$-\mu_1 \leq \frac{\theta_n}{c_n} \leq \mu_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 c_n \leq \theta_n \leq -\mu_1 c_n. \quad (1.124)$$

De forma semelhante existe $\mu_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\theta_n^2}{c_n^2} \right| \leq \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad -\mu_2 \leq \frac{\theta_n^2}{c_n^2} \leq \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad -\mu_2 c_n^2 \leq \theta_n^2 \leq \mu_2 c_n^2. \quad (1.125)$$

Usando (1.122), (1.124) e (1.125) em (1.113) obtemos

$$2E(0) \leq \frac{\rho_1 L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \mu_0^2 c_n^2 + \frac{\rho_2 L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \mu_0^2 c_n^4 + \frac{bL}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \mu_2 c_n^4 \\ + \frac{\kappa L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 (1 - \mu_1)^2 c_n^2.$$

logo

$$2E(0) \leq \frac{L}{2} (\rho_1 \mu_0^2 + \kappa (1 - \mu_1)^2) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2 + \frac{L}{2} (\rho_2 \mu_0 + b \mu_2) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^4. \quad (1.126)$$

De (1.64) temos que

$$c_n^2 = \frac{\kappa^2 \theta_n^2}{(\rho_2 \lambda^2 + b \theta_n^2 + \kappa)^2} \leq \frac{\kappa^2 \theta_n^2}{b^2 \theta_n^4} \leq \frac{\kappa^2 \theta_n^2}{b^2 \theta_n^2} = \frac{\kappa^2}{b^2}$$

isto é

$$c_n^2 \leq \frac{\kappa^2}{b^2}. \quad (1.127)$$

Multiplicando (1.127) por $c_n^2 > 0$ temos

$$c_n^4 \leq \frac{\kappa^2}{b^2} c_n^2. \quad (1.128)$$

Usando (1.128) em (1.126) obtemos

$$2E(0) \leq \frac{L}{2} \left(\rho_1 \mu_0^2 + \frac{\rho_2 \mu_0^2 \kappa^2}{b^2} + \frac{\mu_2 \kappa^2}{b} + \kappa(1 - \mu_1)^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2 \quad (1.129)$$

e então denotando por $J := \rho_1 \mu_0^2 + \frac{\rho_2 \mu_0^2 \kappa^2}{b^2} + \frac{\mu_2 \kappa^2}{b} + \kappa(1 - \mu_1)^2$, temos

$$E(0) \leq \frac{JL}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2,$$

e fazendo $\widetilde{C}_1 = \frac{JL}{4}$ obtemos:

$$E(0) \leq \widetilde{C}_1 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2. \quad (1.130)$$

Do Lema 1.1

$$E(0) \leq \widetilde{C}_1 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2 \leq \frac{\widetilde{C}}{C_1(T, \gamma)} \int_0^T \psi^2(L, t) dt,$$

isto é

$$E(0) \leq \frac{\widetilde{C}_1}{C_1(T, \gamma)} \int_0^T \psi^2(L, t) dt.$$

Agora basta fazer $M_2 = \frac{\widetilde{C}_1}{C_1(T, \gamma)} > 0$ para termos

$$E(0) \leq M_2 \int_0^T \psi^2(L, t) dt. \quad (1.131)$$

provando assim o Teorema.

Para mostrar a desigualdade direta precisamos de algumas desigualdades elementares.

Proposição 1.4 *Seja $\{\varphi(x, t), \psi(x, t)\}$ solução de (1.40) – (1.45), então existe $k_0 > 0$ tal que*

$$\int_Q \psi^2 dx dt \leq k_0 \left(\int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + \int_Q \varphi_x^2 dx dt \right) \quad (1.132)$$

Demonstração: De fato

$$\begin{aligned}\int_Q \psi^2 dxdt &= \int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dxdt - \int_Q (\varphi_x^2 + 2\varphi_x\psi) dxdt \\ &= \int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dxdt - \int_Q \varphi_x\psi dxdt - \int_Q (\varphi_x + \psi)\varphi_x dxdt\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Young aplicado nas duas ultimas integrais do lado direito da igualdade acima temos

$$\int_Q \psi^2 dxdt \leq \int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_Q \varphi_x^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_Q \varphi_x^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_Q \psi^2 dxdt$$

e deste modo temos

$$\frac{1}{2} \int_Q \psi^2 dxdt \leq \frac{3}{2} \int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dxdt + \int_Q \varphi_x^2 dxdt$$

portanto, tomando $k_0 = \max\{3, 1\}$ temos

$$\int_Q \psi^2 dxdt \leq k_0 \left(\int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dxdt + \int_Q \varphi_x^2 dxdt \right).$$

Proposição 1.5 *Seja $\{\varphi(x, t), \psi(x, t)\}$ solução de (1.40) – (1.45), então existe $k_1 > 0$ tal que*

$$\int_Q \varphi_x^2 dxdt \leq k_1 \left(\int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dxdt + \int_Q \psi^2 dxdt \right) \quad (1.133)$$

Demonstração: Segue o mesmo raciocínio da Proposição 1.4 e da desigualdade de Poincaré e em seguida toma-se $k_1 = \max\{3, c_p\}$, onde c_p é a constante de Poincaré.

Da Proposição 1.4 e da Proposição 1.5 temos que

$$\int_Q \psi^2 dxdt \leq k_2 \left(\int_Q (\varphi_x + \psi)^2 dxdt + \int_Q \psi^2 dxdt \right) \quad (1.134)$$

onde $k_2 = \max\{k_0 + k_0k_1, k_0k_1\}$

Teorema 1.8 *Para toda solução $\{\varphi(x, t), \psi(x, t)\}$ de (1.40) – (1.45) temos*

$$\int_0^T \psi^2(L, t) dt \leq M_1 E(0) \quad (1.135)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (1.40) por $x\psi$ e integrando em $Q = (0, L) \times (0, T)$ temos

$$-\rho_1 \int_Q \varphi_{tt} x \psi dxdt + \kappa \int_Q (\varphi_x + \psi)_x dxdt = 0$$

e fazendo a integração por partes obtemos

$$-\rho_1 \int_0^L \varphi_t x \psi \Big|_0^T dx + \kappa \int_0^T (\varphi_x + \psi) x \psi \Big|_0^L dt = - \int_Q \varphi_t x \psi_t dx dt + \kappa \int_Q (\varphi_x + \psi) \psi dx dt + \kappa \int_Q (\varphi_x + \psi) x \psi_x dx dt \quad (1.136)$$

Assim, pela desigualdade de Young aplicada no lado direito de (1.136), da desigualdade de Poincaré e da energia dada por (1.47) temos

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^L \varphi_t x \psi \Big|_0^T dx + \kappa \int_0^T (\varphi_x + \psi) x \psi \Big|_0^L dt &\leq \frac{L}{2} \int_Q \varphi_t dx dt + \frac{L}{2} \int_Q \psi_t dx dt \\ &+ \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2} \right) \int_Q (\varphi_x + \psi) dx dt + \left(\frac{1}{2} + \frac{c_p}{2} \right) \int_Q \psi_x dx dt \\ &\leq k_4 E(0) \end{aligned} \quad (1.137)$$

onde $k_4 = \max\{\frac{L}{\rho_1}, \frac{L}{\rho_2}, \frac{L+1}{\kappa}, \frac{1+c_p}{b}\}$ e c_p é a constante de Poincaré.

Por outro lado

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t x \psi \Big|_0^T dx = \rho_1 \int_0^L \varphi_t(x, T) x \psi(x, T) dx - \rho_1 \int_0^L \varphi_t(x, 0) x \psi(x, 0) dx \quad (1.138)$$

e novamente aplicando Young na primeira integral do lado direito de (1.138) obtemos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t(x, T) x \psi(x, T) dx \leq \frac{L\rho_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{L\rho_1}{2} \int_0^L \psi^2 dx, \quad (1.139)$$

usando (1.134) em (1.139) temos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t(x, T) x \psi(x, T) dx \leq k_5 E(0)$$

onde $k_5 = \max\{L, \frac{k_2 L \rho_1}{\kappa}, \frac{k_2 L \rho_1}{b}\}$. De maneira análoga temos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t(x, 0) x \psi(x, 0) dx \leq k_6 E(0)$$

e portanto

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t x \psi \Big|_0^T dx \leq k_7 E(0) \quad (1.140)$$

sendo $k_7 = k_5 + k_6$.

Assim

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^T (\varphi_x + \psi)x\psi \Big|_0^L dt &\leq \rho_1 \int_0^L \varphi_t x \psi \Big|_0^T dx + k_1 E(0) \\ &\leq k_7 E(0) + k_1 E(0) = k_8 E(0) \end{aligned} \quad (1.141)$$

onde pomos $k_8 = k_1 + k_7$, logo

$$\kappa L \int_0^T \psi^2(L, t) dt \leq k_8 E(0) - \kappa L \int_0^T \varphi_x(L, t) \psi(L, t) dt$$

e pela desigualdade de Young aplicada na integral do lado direito da desigualdade acima tem-se

$$\kappa L \int_0^T \psi^2(L, t) dt \leq k_8 E(0) + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \psi^2(L, t) dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \varphi_x^2(L, t) dt$$

ou seja

$$\frac{\kappa L}{2} \int_0^T \psi^2(L, t) dt \leq k_8 E(0) + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \varphi_x^2(L, t) dt. \quad (1.142)$$

Usando o Lema 1.1, neste caso (1.105) e em seguida (1.104), e vendo que $c_n^2 \geq \theta_n^2$

$$\frac{\kappa L}{2} \int_0^T \varphi_x^2(L, t) dt \leq \frac{\kappa L}{2} N_2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \theta_n^2 \leq \frac{\kappa L N_2}{2C_1} C_1 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 c_n^2 \leq \frac{\kappa L N_2}{2C_1} \int_0^T \psi^2(L, t) dt$$

e deste modo

$$\frac{\kappa L}{2} \int_0^T \varphi_x^2(L, t) dt \leq \frac{\kappa L N_2}{2C_1} \int_0^T \psi^2(L, t) dt. \quad (1.143)$$

Usando (1.143) em (1.142) temos

$$\left(\frac{\kappa L C_1 - \kappa L N_2}{2C_1} \right) \int_0^T \varphi_x^2(L, t) dt \leq k_5 E(0),$$

fazendo $M_1 = \frac{2C_1 k_8}{\kappa L (C_1 - N_2)}$, onde $C_1 > N_2$ conclui a prova do Teorema.

Capítulo 2

Controle Exato na Fronteira do Sistema de Timoshenko

Neste capítulo vamos considerar o sistema de Timoshenko 1 – d com somente um controle na fronteira, isto é, no caso $\psi_x(L, t) = f(t)$ usando o Método de Unicidade Hilbertiana.

2.1 Desigualdade Direta e Inversa

Seja $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \in X$, onde $X := (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L))$ é o espaço de Hilbert e $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}$ são os dados iniciais de (1.40) – (1.41). Definimos em X a seguinte norma:

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 = \int_0^L (|\varphi_1|^2 + |\psi_1|^2 + |\varphi_{0x}|^2 + |\psi_{0x}|^2) dx. \quad (2.1)$$

A energia dada em (1.47) calculada em $t = 0$ é

$$E(0) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_1|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_1|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_{0x}|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_{0x} + \psi_0|^2 dx. \quad (2.2)$$

Teorema 2.1 *Existem constantes positivas \bar{c}_1 e \bar{c}_2 tais que*

$$\bar{c}_1 E(0) \leq \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 \leq \bar{c}_2 E(0) \quad (2.3)$$

Demonstração: De fato, vemos pela desigualdade triangular que

$$|\varphi_{0x}|^2 = |\varphi_{0x} + \psi_0 - \psi_0|^2 \leq (|\varphi_{0x} + \psi_0| + |\psi_0|)^2 = |\varphi_{0x} + \psi_0|^2 + |\psi_0|^2 + 2|\varphi_{0x} + \psi_0||\psi_0|$$

e pela desigualdade de Young temos

$$|\varphi_{0x}|^2 \leq 2|\varphi_{0x} + \psi_0|^2 + 2|\psi_0|^2. \quad (2.4)$$

Pela desigualdade de Poincaré

$$\int_0^L |\psi_0|^2 dx \leq c_p \int_0^L |\psi_{0x}|^2 dx, \quad (2.5)$$

onde c_p é a constante de Poincaré. Integrando (2.4) em $(0, L)$ e usando (2.5) obtemos

$$\int_0^L |\varphi_{0x}|^2 dx \leq 2 \int_0^L |\varphi_{0x} + \psi_0|^2 dx + 2c_p \int_0^L |\psi_{0x}|^2 dx. \quad (2.6)$$

Assim, de (2.1) e (2.6) tem-se

$$\begin{aligned} \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 &\leq \int_0^L (|\varphi_1|^2 + |\psi_1|^2 + (2c_p + 1)|\psi_{0x}|^2 + 2|\varphi_{0x} + \psi_0|^2) dx \\ &= \frac{2}{2} \int_0^L \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} |\varphi_1|^2 + \frac{\rho_2}{\rho_2} |\psi_1|^2 + \frac{b}{b} (2c_p + 1) |\psi_{0x}|^2 + 2 \frac{\kappa}{\kappa} |\varphi_{0x} + \psi_0|^2 \right) dx \end{aligned}$$

e assim, tomando $c := \max \left\{ \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{2c_p + 1}{b}, \frac{2}{\kappa} \right\}$ tem-se

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 \leq 2cE(0).$$

Agora basta tomar $2c = \overline{c}_2$ para termos

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 \leq \overline{c}_2 E(0). \quad (2.7)$$

Novamente, pela desigualdade triangular e de Young

$$\begin{aligned} |\varphi_{0x} + \psi_0|^2 &\leq |\varphi_{x0}|^2 + |\psi_0|^2 + 2|\varphi_{0x}||\psi_0| \\ &\leq 2|\varphi_{x0}|^2 + 2|\psi_0|^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poincaré existe c'_p tal que

$$\int_0^L |\psi_0|^2 dx \leq c'_p \int_0^L |\psi_{0x}|^2 dx, \quad (2.8)$$

e assim

$$\int_0^L |\varphi_{0x} + \psi_0|^2 dx \leq 2 \int_0^L |\varphi_{x0}|^2 dx + 2c'_p \int_0^L |\psi_{0x}|^2 dx \quad (2.9)$$

De (2.2) e de (2.9) temos

$$E(0) \leq \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\rho_1}{2} |\varphi_1|^2 dx + \int_0^L \frac{\rho_2}{2} |\psi_1|^2 dx + \int_0^L \frac{b}{2} |\psi_{0x}|^2 dx + 2\kappa \int_0^L |\varphi_{x0}|^2 dx + 2\kappa c'_p \int_0^L |\psi_{0x}|^2 dx$$

ou seja,

$$E(0) \leq \frac{c_1}{2} \int_0^L (|\varphi_1|^2 + |\psi_1|^2 + |\varphi_{0x}|^2 + |\psi_{0x}|^2) dx, \quad (2.10)$$

onde $c_1 = \max\{\rho_1, \rho_2, (2c'_p\kappa + b), 2\kappa\}$. Logo ao tomarmos $\frac{2}{c_1} = \bar{c}_1$ temos

$$\bar{c}_1 E(0) \leq \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 \quad (2.11)$$

provando assim o resultado.

Para o controle necessitamos principalmente da desigualdade indireta, assim temos

Teorema 2.2 (Desigualdade Direta e Inversa) *Se $\{\varphi, \psi\}$ é solução de (1.40) – (1.45) existem constantes positivas K_1 e K_2 tais que*

$$K_1 \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 \leq \int_0^T \psi^2(L, t) dt \leq K_2 \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2. \quad (2.12)$$

Demonstração: Do Teorema 1.7 e do Teorema 2.1 temos

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 \leq \bar{c}_1 E(0) \leq \bar{c}_1 M_2 \int_0^T \psi^2(L, t) dt \quad (2.13)$$

e basta fazer $\frac{1}{\bar{c}_1 M_1} = K_1$ para obtermos a desigualdade indireta. Para a desigualdade direta segue da mesma maneira usando o Teorema 1.8.

2.2 Controlabilidade Exata

Teorema 2.3 *sejam*

$$\gamma_1 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2} M}{\frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)} > 0 \quad e \quad \gamma_2 = \frac{\frac{3\pi^2}{2L^2} M}{\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \left(\frac{3\pi}{L} \sqrt{M} + \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}} \right)^2} > 0$$

e suponha que seja válida a igualdade $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$. Se $T > \frac{2\pi}{\gamma_i}, i = 1, 2$ então para todo conjunto de dados iniciais $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \in X$, então existe um controle $f(t) \in L^2(0, T)$ tal que a solução $\{\varphi, \psi\}$ do sistema (1.40) – (1.45) satisfaz

$$\varphi(x, T) = \varphi_t(x, T) = 0 \quad em \quad (0, L) \quad (2.14)$$

$$\psi(x, T) = \psi_t(x, T) = 0 \quad em \quad (0, L) \quad (2.15)$$

Demonstração: Para os dados iniciais $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \in X$, o sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } Q \quad (2.16)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em } Q \quad (2.17)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \text{ em } (0, T) \quad (2.18)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0, \varphi_t(x, 0) = \varphi_1, \psi(x, 0) = \psi_0, \psi_t(x, 0) = \psi_1 \text{ m } (0, L) \quad (2.19)$$

possui única solução $\{\varphi, \psi\}$ com regularidade $\psi(L, t) \in L^2(0, T)$. Com a solução $\{\varphi, \psi\}$ do sistema (2.16) – (2.19) resolvemos o sistema adjunto

$$\rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + v)_x = 0, \text{ em } Q \quad (2.20)$$

$$\rho_2 v_{tt} - bv_{xx} + \kappa(u_x + v) = 0, \text{ em } Q \quad (2.21)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = v_x(0, t) = 0, v_x(L, t) = -c\psi(L, t), \text{ em } (0, T) \quad (2.22)$$

$$u(x, T) = u_t(x, T) = v(x, T) = v_t(x, T) = 0 \text{ em } (0, L) \quad (2.23)$$

O operador A: Devido a unicidade de soluções do sistema acima podemos estabelecer a seguinte aplicação, para qualquer $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \in \mathcal{D}(0, L)^4$, por (2.16) – (2.19) obtemos uma única solução $\{u, v\}$ de (2.20) – (2.23) e então consideramos

$$u(x, 0) = u(0), u_t(x, 0) = u'(0) \text{ em } (0, L) \quad (2.24)$$

$$v(x, 0) = u(0), v_t(x, 0) = v'(0) \text{ em } (0, L). \quad (2.25)$$

Assim podemos definir a aplicação

$$A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} = \{u'(0), -u(0), v'(0), -v(0)\}. \quad (2.26)$$

Devido a natureza dos sistemas (2.16) – (2.19) e (2.20) – (2.23) é possível mostrar que A é linear. Iremos buscar uma outra relação entre $A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}$ e $\{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \in \mathcal{D}(0, L)^4$. Para isso seja $\{\zeta, \xi\}$ solução de (2.16) – (2.19) com os dados iniciais $\{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \in \mathcal{D}(0, L)^4$, isto é

$$\rho_1 \zeta_{tt} - \kappa(\zeta_x + \xi)_x = 0, \text{ em } Q \quad (2.27)$$

$$\rho_2 \xi_{tt} - b\xi_{xx} + \kappa(\zeta_x + \xi) = 0, \text{ em } Q \quad (2.28)$$

$$\zeta(0, t) = \zeta(L, t) = \xi_x(0, t) = \xi_x(L, t) = 0, \text{ em } (0, T) \quad (2.29)$$

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0, \zeta_t(x, 0) = \zeta_1, \xi(x, 0) = \xi_0, \xi_t(x, 0) = \xi_1 \text{ m } (0, L). \quad (2.30)$$

Multiplicando (2.27) por u e (2.28) por v e integrando em $Q = (0, L) \times (0, T)$ temos

$$\underbrace{\rho_1 \int_0^T \int_0^L \zeta_{tt} u dx dt}_I - \underbrace{\kappa \int_0^T \int_0^L (\zeta_x + \xi)_x u dx dt}_{II} = 0 \quad (2.31)$$

$$\underbrace{\rho_2 \int_0^T \int_0^L \xi_{tt} v dx dt}_{III} - \underbrace{b \int_0^T \int_0^L \xi_{xx} v dx dt}_{IV} + \underbrace{\kappa \int_0^T \int_0^L (\zeta_x + \xi) v dx dt}_{V} = 0 \quad (2.32)$$

e integrando por partes separadamente cada integral temos

$$I = \rho_1 \int_0^T \int_0^L \zeta_{tt} u dx dt = \rho_1 \int_0^L \zeta_t u dx \Big|_0^T - \rho_1 \int_0^L \zeta u_t dx \Big|_0^T + \rho_1 \int_0^T \int_0^L \zeta u_{tt} dx dt$$

e pelas condições (2.23), (2.29) e (2.30) temos

$$I = \rho_1 \int_0^L \zeta_0 u_1 dx - \rho_1 \int_0^L \zeta_1 u_0 dx + \rho_1 \int_0^T \int_0^L \zeta u_{tt} dx dt. \quad (2.33)$$

E de

$$\begin{aligned} II &= \kappa \int_0^T \int_0^L (\zeta_x + \xi)_x u dx dt = \kappa \int_0^T (\zeta_x + \xi) u dx \Big|_0^L - \kappa \int_0^T \int_0^L (\zeta_x + \xi) u_x dx dt \\ &= \kappa \int_0^T (\zeta_x + \xi) u dt \Big|_0^L - \kappa \int_0^T \int_0^L \zeta_x u_x dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L \xi u_x dx dt \\ &= \kappa \int_0^T (\zeta_x + \xi) u dt \Big|_0^L - \kappa \int_0^T \zeta u_x dt \Big|_0^L + \kappa \int_0^T \int_0^L \zeta u_{xx} dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L \xi u_x dx dt \end{aligned}$$

e pelas condições (2.23), (2.29) e (2.30) obtemos

$$II = \kappa \int_0^T \int_0^L \zeta u_{xx} dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L \xi u_x dx dt. \quad (2.34)$$

De maneira similar feita em I temos

$$III = \rho_1 \int_0^L \xi_0 v_1 dx - \rho_1 \int_0^L \xi_1 v_0 dx + \rho_1 \int_0^T \int_0^L \xi v_{tt} dx dt. \quad (2.35)$$

Para

$$\begin{aligned} IV &= b \int_0^T \int_0^L \xi_{xx} v dx dt = b \int_0^T \xi_x v dt \Big|_0^L - b \int_0^T \int_0^L \xi_x v_x dx dt \\ &= b \int_0^T \xi_x v dt \Big|_0^L - b \int_0^T \xi v_x dt \Big|_0^L + b \int_0^T \int_0^L \xi v_{xx} dx dt \end{aligned}$$

e pelas condições (2.22) e (2.29) resulta

$$IV = cb \int_0^T \xi(L, t) \psi(L, t) dt + b \int_0^T \int_0^L \xi v_{xx} dx dt \quad (2.36)$$

e finalmente

$$\begin{aligned} V &= \kappa \int_0^T \int_0^L (\zeta_x + \xi) v dx dt = \kappa \int_0^T \int_0^L \zeta_x v dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L \xi v dx dt \\ &= \kappa \int_0^T \zeta v dt \Big|_0^L - \kappa \int_0^T \int_0^L \zeta v_x dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L \xi v dx dt \end{aligned}$$

e sendo

$$\zeta v \Big|_0^L = \zeta(L, t) v(L, t) - \zeta(0, t) v(0, t)$$

e pelas condições (2.29) temos

$$V = -\kappa \int_0^T \int_0^L \zeta v_x dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L \xi v dx dt \quad (2.37)$$

Agora, levando (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) e 2.37 em (2.31) e (2.32) e somando estas igualdades, nós obtemos

$$-\rho_1 \int_0^L \zeta_1 u_0 dx + \rho_1 \int_0^L \zeta_0 u_1 dx - \rho_1 \int_0^L \xi_1 v_0 dx + \rho_2 \int_0^L \xi_1 v_0 dx = cb \int_0^T \xi(L, t) \psi(L, t) dt \quad (2.38)$$

ou seja

$$\rho_1(u'(0), \zeta_0) - \rho_1(u(0), \zeta_1) + \rho_2(v'(0), \xi_0) - \rho_1(v(0), \zeta_1) = cb \int_0^T \xi(L, t) \psi(L, t) dt. \quad (2.39)$$

Definindo em $\mathcal{D}(0, L)^4$ a forma bilinear

$$\begin{aligned} \langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle &= \rho_1(u'(0), \zeta_0) - \rho_1(u(0), \zeta_1) + \rho_2(v'(0), \xi_0) - \rho_1(v(0), \zeta_1) \\ &= cb \int_0^T \xi(L, t) \psi(L, t) dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle = cb \int_0^T \xi(L, t) \psi(L, t) dt \quad (2.40)$$

em particular tem-se

$$\langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \rangle = cb \int_0^T \psi^2(L, t) dt \quad (2.41)$$

e pela linearidade da integral é possível mostrar que

$$\langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\cdot\} \rangle \quad (2.42)$$

é um funcional linear em $\mathcal{D}(0, L)^4$. Representaremos por \mathcal{F} o espaço $\mathcal{D}(0, L)^4$ e nele definiremos a seguinte forma bilinear

$$\langle \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle_{\mathcal{F}} = \langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle. \quad (2.43)$$

Isto pode ser feito, pois A é linear. Não podemos afirmar a princípio que $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{F}}$ é um produto interno, pois não sabemos que se $(u, u)_{\mathcal{F}} = 0$ tenha-se $u = 0$.

Consideremos a semi-norma

$$\begin{aligned} \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_{\mathcal{F}}^2 &= \langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \rangle \\ &= cb \int_0^T \psi^2(L, t) dt. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como $\mathcal{D}(0, L)^4 \subset (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L))$, então a norma $\|\cdot\|_X$ também será uma norma para $\mathcal{D}(0, L)^4$, da desigualdade inversa (Teorema 2.2) tem-se

$$\begin{aligned} \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 &\leq \frac{1}{K_1} \int_0^T \psi^2(L, t) dt \\ &\leq \frac{cb}{K_1 cb} \int_0^T \psi^2(L, t) dt \end{aligned} \quad (2.45)$$

isto significa que se

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_{\mathcal{F}}^2 = cb \int_0^T \psi^2(L, t) dt \quad (2.46)$$

temos

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_X^2 \leq \frac{1}{K_1 bc} \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_{\mathcal{F}}^2, \quad bc \neq 0 \quad (2.47)$$

fazendo

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_{\mathcal{F}}^2 = 0,$$

e sendo $\|\cdot\|_X$ uma norma, tem-se

$$\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} = \{0, 0, 0, 0\}.$$

Desta forma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ é de fato uma norma para $\mathcal{D}(0, L)^4$ e assim $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{F}}$ é um produto interno em $\mathcal{D}(0, L)^4$ e pela desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned} |\langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle| &= |(\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\})_{\mathcal{F}}| \\ &\leq \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_{\mathcal{F}} \|\{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\}\|_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle| \leq \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_{\mathcal{F}} \|\{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\}\|_{\mathcal{F}} \quad (2.48)$$

De (2.42) e (2.48) tem-se que $A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}$ é um elemento de \mathcal{F}' e

$$\|A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_{\mathcal{F}'} \leq \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_{\mathcal{F}}. \quad (2.49)$$

Portanto, A é contínuo e desta forma é possível estender (continuamente) $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$, $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{F}}$ e A ao espaço de Hilbert F o qual denotará o complemento de \mathcal{F} , isto é,

$$\overline{\mathcal{F}}^{\|\cdot\|} = F. \quad (2.50)$$

Com $A : F \rightarrow F'$ e de (2.48) tem-se

$$|\langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle| \leq \|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_F \|\{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\}\|_F \quad (2.51)$$

e de (2.44) temos

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}\|_F^2 = cb \int_0^T \psi^2(L, t) dt \quad (2.52)$$

isto significa que o funcional bilinear

$$\langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle$$

definido no espaço de Hilbert F é coercivo e portanto segue-se pelo Teorema de Lax-Milgran, que para todo $\{u_0, u_1, v_0, v_1\} \in F'$ existe $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \in F$ tal que

$$\langle A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle = \langle \{u_0, u_1, v_0, v_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \rangle_{F' \times F} \quad (2.53)$$

para todo $\{\zeta_0, \zeta_1, \xi_0, \xi_1\} \in F$. Isto significa que para todo $\{u_0, u_1, v_0, v_1\}$ o sistema

$$A\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} = \{u_0, u_1, v_0, v_1\} \quad (2.54)$$

tem uma única solução.

Resulta assim da desigualdade Direta e Inversa a equivalência das normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ e assim

$$\mathcal{F} = (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L)) \quad (2.55)$$

implicando em

$$\mathcal{F}' = (H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L) \times (H_*^1(0, L))' \times L^2(0, L)). \quad (2.56)$$

Observe que naturalmente $((H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L)) \subset F$ em vista de (2.51).

Então, para todo $\{u_0, u_1, v_0, v_1\} \in \mathcal{F}'$, fazendo $u'(0) = u_0$, $u(0) = u_1$, $v'(0) = v_0$ e $v(0) = v_1$, pelo isomorfismo A , existe $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\} \in (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L))$ que por (2.16) – (2.19) dá origem a $\{\varphi, \psi\}$ e ao controle $\psi(L, t)$, e esta última implica na existência de um único par $\{u, v\}$ satisfazendo (1.40) – (1.45) com

$$u(x, T) = u_t(x, T) = v(x, T) = v_t(x, T) = 0. \quad (2.57)$$

Capítulo 3

Conclusões

Iniciamos este trabalho fazendo uma descrição dos resultados matemáticos consolidados na literatura, fizemos a análise espectral do sistema de Timoshenko, neste sentido com as condições do tipo Dirichlet-Newmann onde analisamos as condições de gap. Obtivemos as desigualdades direta e indireta através do Teorema de Ingham e de posse delas fazemos o controle exato na fronteira usando o Método de Unicidade Hilbertiana.

Referências Bibliográficas

- [1] A.E. INGHAM., **Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series.** Mathematische Zeitschrift, 41:367-379, 1936.
- [2] MUÑOS RIVERA, J.E.e RACKE R. **Timoshenko system with indefinite damping.** Journal of Mathematical Analysis and Applications, 341, 1068-1083.
- [3] J.L. LIONS. **Controlabilité exacte des systèmes distribués.** C. R. Acad. Sci. Paris, 302: 471475, 1986.
- [4] J.L. LIONS. **Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems.** SIAM Review, 30:168, 1988.
- [5] J.L. LIONS. **Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués.** Vol. 1 and 2. Masson, Paris, 1988.
- [6] J. E. LAGNESE and J. L. LIONS. **Modelling Analysis and Control of Thin Plates.** Masson. 1988.
- [7] ARARUNA, F. D. and ZUAZUA E., **Controllability of the Kirchhoff System as Limit of the Mindlin-Timoshenko One,** to appear.
- [8] V.KORMORNIK, **Exact controllability and stabilization. The multiplier method.** John Wiley & Sons, Masson(1994)
- [9] HAIM BREZIS, **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Springer
- [10] YOUSSEF, W., **Contrôle et Stabilisation de Systèmes Elastiques Couplés . 192 f.** Tese(Doutorado em Matemática Aplicada) - Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz, Université Paul Verlaine, Metz, 2009.

- [11] BARBOSA R. C., **Desigualdade de Ingham Aplicada à Observabilidade para Sistemas de Timoshenko. 34f.** Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.