



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

**SOLUÇÃO NÃO-CLÁSSICA DE EQUAÇÕES
ELÍPTICAS TOTALMENTE NÃO LINEARES VIA
ÁLGEBRAS NÃO ASSOCIATIVAS.**

Mayara Silvia Brito da Silva

BELÉM

2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Mayara Silvia Brito da Silva

**SOLUÇÃO NÃO-CLÁSSICA DE EQUAÇÕES
ELÍPTICAS TOTALMENTE NÃO LINEARES VIA
ÁLGEBRAS NÃO ASSOCIATIVAS.**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e, defendida por Mayara Silvia Brito da Silva como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Joelma Morbach.

BELÉM

2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S586s Silva, Mayara Silvia Brito da
Solução não-clássica de equações elípticas totalmente não
lineares via álgebras não associativas / Mayara Silvia Brito da
Silva. — 2019.
x, 97 f. : il. color.

Orientador(a): Prof^a. Dra. Joelma Morbach
Coorientador(a): Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais,
Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Equações Elípticas. 2. Álgebras não associativas. 3.
Solução não-clássica. I. Título.

CDD 510

Mayara Silvia Brito da Silva

**SOLUÇÃO NÃO-CLÁSSICA DE EQUAÇÕES
ELÍPTICAS TOTALMENTE NÃO LINEARES VIA
ÁLGEBRAS NÃO ASSOCIATIVAS.**

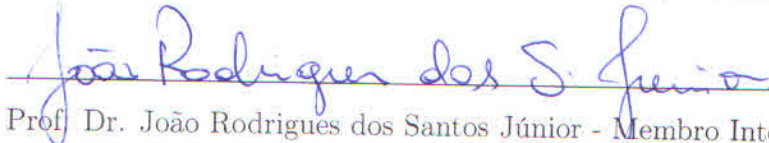
Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:



Prof^a. Dr^a. Joelma Morbach - Orientadora (PPGME/UFPA)



Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva - Co-orientador (PPGME/UFPA)



Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior - Membro Interno (PPGME/PDM/UFPA)



Prof^a. Dr^a. Suellen Cristina Queiroz Arruda - Membro Externo (UFPA/Campus Abaetetuba)

Belém, 27 de setembro de 2019

Resultado: Aprovada

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiro a Deus, pelo dom da vida.

Minha família, pai Adriano Rocha, mãe Maria José e a irmã Marcela Syanne por todo apoio, carinho e paciência. Por cada palavra de incentivo, por acreditarem no meu sonho e ajudar a torna-lo possível. Ao meu namorado Fábio Leite, por toda paciência, compreensão e todas as palavras e cuidado comigo para tornar essa trajetória menos pesada. A minha gata Bibi por todo amor transmitido nas horas de estudos.

Aos amigos que colaboraram com o trabalho: Gabriela Coelho, Jeffersson Macedo, Harlen, Júlio Flor. Meu muito obrigada pela disponibilidade em ajudar e esforço para entender o que nem eu sabia explicar.

Aos amigos da sala de estudo Romário, Igor, Stefania, Willson, por me alegrarem nos momentos de tristeza e por todos os cafés compartilhados para recarregar as energias para realizar este trabalho. Agradeço em especial a amizade da família Wanessa, André Renan e Artur (Tutu) por todo apoio e carinho que recebi.

As minhas amigas de infância Vanessa Santos, Tainá Tamires Barros, Ana paula Tavares, por sempre me incentivarem a acreditar no meu sonho e compreensão com toda essa jornada.

Agradeço a Professora Joelma Morbach pela confiança no meu trabalho e por acreditar em mim mesmo quando eu não acreditei que seria possível, meu muito obrigada. Ao professor Juaci Silva pela co-orientação em álgebra e pelos seminários realizados, minha gratidão pelo excelente conhecimento transmitido. Ao professor Ashish pela disponibilidade em ajudar a entender alguns conceitos de álgebra. Aos professores João Rodrigues e Suellen Cristina pelas considerações do trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Até mesmo a maior das caminhadas começa
com primeiro passo"*

Gandhi.

Resumo

Neste trabalho abordaremos o problema da existência de soluções não suaves para equações elípticas totalmente não-lineares, usando álgebra não associativa, mais especificamente, estudaremos o Processo de Cayley-Dickson motivado pelo Problema de Hurwitz, para mostrar que toda álgebra com composição tem dimensão 1, 2, 4 ou 8. Usando um resultado de Álgebra que diz que toda \mathbb{R} -Álgebra com composição de dimensão finita é uma \mathbb{R} -Álgebra de divisão, obtemos quatro Trialidades, que serão utilizadas para a construção das soluções não suaves. Em particular, estudaremos uma solução para uma Equação Diferencial Parcial Elíptica totalmente não linear em dimensão 12 que depende somente da hessiana.

Palavras-Chaves: Equações elípticas; Álgebras não associativas; Solução não clássica.

Abstract

In this paper we discuss the problem of the existence of non-smooth solutions for elliptic equations entirely non-linear, using non-associative algebra, more specifically study the Cayley-Dickson process driven by Hurwitz problem, to show that all Algebra composition has dimension 1, 2, 4 or 8. Using an Algebra result that says that all \mathbb{R} - Finite Dimension Algebra is a \mathbb{R} - Division Algebra, we get four Trialities, which will be used for the construction of non-soft solutions. In particular, we will study a solution for a fully nonlinear 12-dimensional elliptic partial differential equation that depends only on the hessian.

Key-words: Elliptic equation; Nonassociative Algebras; Non-classical solution.

NOTAÇÕES

- $Sym_n(\mathbb{R})$ – Conjuntos das matrizes simétricas de ordem n .
- $\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}$ – Derivada parcial de segunda ordem de u com relação a x_j e x_i .
- Ω – Domínio aberto de \mathbb{R}^n .
- Δu – Operador Laplaciano da função u .
- $D^2 u$ – Matriz Hessiana da função u .
- Du – Vetor gradiente da função u .
- ∇u – Vetor gradiente da função u .
- $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^n)$ – Espaço das formas quadráticas em \mathbb{R}^n .
- \mathbb{C} – Conjunto dos números complexos
- \mathbb{O} – Conjunto dos números quatérnios
- \mathbb{H} – Conjunto dos números octônios
- $B_r(a)$ – Bola aberta de centro a e raio $r > 0$
- $[u, v]$ – gerado por u e v .

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 ÁLGEBRAS DE DIVISÃO E TRIALIDADES	3
1.1 Álgebras de Divisão	3
1.2 O Problema de Hurwitz e o Processo de Cayley-Dickson	7
1.2.1 Processo de Cayley-Dickson	8
1.3 A Álgebra dos Quatérnios	19
1.4 A Álgebra dos Octônios	22
1.5 Trialidades em Espaços Vetoriais	25
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS TOTALMENTE NÃO LINEARES DE 2ª ORDEM	30
2.1 O Problema de Dirichlet	34
2.2 Solução de Viscosidade	35
2.3 Operadores Elípticos Lineares na Forma Não Divergente	38
2.4 Equações Não Lineares com Soluções Suaves	40
3 SOLUÇÕES NÃO CLÁSSICAS VIA TRIALIDADES	43
3.1 O Problema da Hessiana e O Critério de Elipticidade.	44

3.2	Polinômio Característico.	47
3.3	A construção não clássica mais simples	61
CONSIDERAÇÕES FINAIS		64
A MATRIZES SIMÉTRICAS E FORMAS QUADRÁTICAS		66
A.1	Isomorfismo entre $Q(\mathbb{R}^n)$ e $Sym_n\mathbb{R}$	66
A.2	Propriedades	68
B MATRIZ DA FORMA QUADRÁTICA $\tilde{Q}_d(X, Y, Z)$		78
C VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS		80
D ALGUNS CONCEITOS E RESULTADOS DE EQUAÇÕES DIFEREN-		
CIAIS		89
D.1	Classificação de Equações Diferenciais Parciais	89
D.2	Operador Lineares de 2ª Ordem	91
D.3	Solução Fraca	92
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		94

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo estudar uma área que contém algumas aplicações de álgebras não comutativas e não-associativas para construir soluções fracas incomuns (não-clássicas e singulares) para equações diferenciais parciais elípticas totalmente não-lineares de segunda ordem.

Usar álgebras para construir estruturas exóticas ou específicas, analíticas e geométricas não é algo novo. Pode-se mencionar aqui, por exemplo, as construções de esferas exóticas de Milnor [12], de soluções singulares para sistemas de superfícies mínimas por Lawson e Osserman [8], a ADHM construção de instantons (solução clássica para equações de movimento com uma ação finita, diferente de zero, tanto na mecânica quântica ou na teoria quântica de campos) por Atiyah, Drinfeld, Hitchin e Manin [17], a construção de variedades singulares co-associativas de Harvey e Lawson [27], todos os quatro usando quatérnios, bem como as recentes construções de soluções incomuns do sistema de Ginzburg-Landau por Farina e Ge-Xie [3], [11], usando polinômios isoparamétricos e, portanto, implicitamente álgebras de Jordan ou Clifford.

No livro *Nonlinear Elliptic Equations and Nonassociative Algebras* by Nikolai Nadirashvili, Vladimir Tkachev, Serge Vladut, [22], são estudadas aplicações de quatérnios, octônios e álgebras de Jordan para equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem que são relativamente novas (sugeriram em 2013). Elas permitem resolver um problema de longa data, a saber, existência de soluções de viscosidade verdadeiramente fracas, ou seja, que não são suaves (= clássicas), algo que até dez anos atrás não se sabia se existia. Além disso, em algum sentido, elas dão (embora junto com alguns outros argumentos) uma descrição quase completa de soluções homogêneas para equações elípticas totalmente

não-lineares a partir das dimensões dos espaços.

O capítulo 4 do livro [22] trata sobre as soluções à classe mais simples de equações uniformemente elípticas totalmente não-lineares do tipo $F(D^2u) = 0$ definidas em um domínio de \mathbb{R}^n onde D^2u é a matriz Hessiana da função u . Usando um resultado de álgebra que diz que toda álgebra de divisão tem dimensão 1, 2, 4 ou 8, os autores mostram a existência de uma solução não clássica para uma EDP em \mathbb{R}^n , com $n = 12$ e $n = 24$.

O objetivo deste trabalho é estudar o caso de solução não clássica para o problema citado acima no caso $n = 12$ e para isto foi usado como referência principal o artigo [21] dos autores do livro onde eles tratam especificamente do estudo de solução não clássica de equações elípticas totalmente não linear em dimensão 12.

Para isto o texto está dividido em três capítulos, em que o primeiro é destinado ao estudo das álgebras não associativas e é apresentado o processo de Cayley-Dickson para garantir que as álgebras de divisão são únicas a menos de isomorfismos e tem dimensão 1,2,4 ou 8. Além disso, fazemos uma breve abordagem sobre as álgebras dos quatérnios e dos octônios, que servirão para exibir a solução não clássica da EDP em questão. O capítulo 2 é um apanhado sobre as Equações Diferenciais Parciais Elípticas totalmente não lineares apontando os estudos feitos até agora e comentários sobre a importância da nossa pesquisa. No capítulo final é apresentado um breve resumo sobre as soluções citadas no capítulo 4 do livro [22] e o estudo sobre a solução não clássica da EDP elíptica totalmente não linear em dimensão 12.

ÁLGEBRAS DE DIVISÃO E TRIALIDADES

Este capítulo é destinado ao estudo de álgebras de divisão, dentre as quais estudamos as Álgebras com composição, a partir do processo de Cayley-Dickson, para classificar todas as \mathbb{R} -álgebras com composição. Os conceitos e propriedades destas álgebras serão usados no capítulo 3 na construção de soluções singulares de certas equações elípticas não-lineares. Apresentamos aqui também as trialidades que servirão para construir os polinômios cúbicos da solução apresentada.

1.1 Álgebras de Divisão

Consideremos A um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos reais \mathbb{R} .

Definição 1.1. *Uma função $f : A \times A \rightarrow A$ é uma forma bilinear se para todos $x, y, z \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ for verdade que:*

- i) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z);$
- ii) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z);$
- iii) $f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y).$

Definição 1.2. *(Álgebra) A é dito uma álgebra sobre \mathbb{R} se existe um produto bilinear*

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}, \text{ ou seja,}$$

- i) $(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y$, para todos $x_1, x_2, y \in A$,
- ii) $x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$, para todos $x, y_1, y_2 \in A$,
- iii) $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$, para todos $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Uma álgebra é dita comutativa se para todos x e y for verdade que $xy = yx$, e é nomeada uma álgebra associativa se quaisquer x, y e z satisfazem a igualdade $(xy)z = x(yz)$. Neste trabalho, as álgebras A consideradas não são necessariamente comutativas e/ou associativas.

Admitiremos que A é unitária, ou seja, existe um elemento $1_A \in A$ chamado unidade tal que $1_A a = a 1_A = a$, para todo $a \in A$. Sendo assim, podemos identificar \mathbb{R} com a sua imagem

$$1_A \cdot \mathbb{R} = \{a \in A; a = 1_A \cdot \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 1.3. Uma aplicação $\|\cdot\| : A \rightarrow [0, \infty)$ é dita norma se todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades

- i) $\|a\| = 0$ se e somente se $a = 0$;
- ii) $\|\lambda a\| = \lambda \|a\|$;
- iii) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Consideremos que a álgebra A é uma álgebra de divisão, isto é, todos os elementos não nulo de A possuem inverso multiplicativo. Assumiremos também que A é normalizada, ou seja, A é um espaço vetorial com uma norma multiplicativa $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ para todo $x, y \in A$. Logo, A é uma álgebra de divisão onde $\|1_A\| = 1$.

Dizemos que a álgebra A é uma alternativa se $x^2y = x(xy)$ e $xy^2 = (xy)y$. Em outras palavras, a álgebra A é alternativa se a subálgebra gerada por quaisquer dois elementos for associativa.

Definimos a aplicação multilinear $[\cdot, \cdot, \cdot] : A \times A \times A \rightarrow A$, chamada **associador** de $x, y, z \in A$, como

$$[x, y, z] = (xy)z - x(yz). \tag{1.1}$$

Note que se $[x, y, z] = 0$ a álgebra é associativa, e se $[x, y, y] = [x, x, y] = 0$ a álgebra é alternativa. Além disso, o associador da álgebra alternativa A é anti simétrico, pois:

$$\begin{aligned} 0 &= [x + y, x + y, z] \\ &= [x, x, z] + [x, y, z] + [y, x, z] + [y, y, z] \\ &= [x, y, z] + [y, x, z]. \end{aligned}$$

Portanto, $[x, y, z] = -[y, x, z]$. E usando essa propriedade do associador, mostremos que a lei reflexiva $x(yx) = (xy)x$ é válida. Com efeito,

$$x(yx) - (xy)x = [x, y, x] = -[y, x, x] = 0.$$

Tendo apresentado alguns conceitos básicos de álgebra, apresentaremos a seguir um estudo sobre álgebras com composição. Para isto iniciaremos definindo o que é uma forma quadrática em um espaço vetorial.

Definição 1.4. *Seja A um \mathbb{R} -espaço vetorial, dizemos que $\eta : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática se:*

- i) $\eta(\lambda x) = \lambda^2 \eta(x)$, para todo $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
- ii) $f_\eta : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_\eta(x, y) = \eta(x + y) - \eta(x) - \eta(y)$ é uma forma bilinear.

Definimos que η é estritamente não-degenerada se f_η é não-degenerada, isto é, se $f_\eta(x, a) = 0$ para todo $x \in A$ então $a = 0$. E dizemos que η é não-degenerada se $\eta(a) = 0$ e $f_\eta(x, a) = 0$ para todo $x \in A$ implicar em $a = 0$. Observe que caso η é estritamente não-degenerada logo será não-degenerada, porém a volta somente é válida se a característica do corpo é diferente de 2, pois, $0 = f_\eta(a, a) = \eta(2a) - \eta(a) - \eta(a) = 4\eta(a) - 2\eta(a) = 2\eta(a)$.

Dizemos que η admite composição se existe um produto bilinear xy em A tal que $\eta(xy) = \eta(x)\eta(y)$.

Vejamos um exemplo de forma quadrática e as condições sobre esta para ser degenerada.

Exemplo 1.1. *Admitindo $A = \mathbb{R}^2$, aqui fixaremos $k, t \in \mathbb{R}$ e tomaremos $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

definida como $\eta(x, y) = x^2 + kxy + ty^2$, provemos que η é uma forma quadrática. De fato,

$$\begin{aligned}\eta(\lambda(x, y)) &= (\lambda x)^2 + k\lambda x\lambda y + t(\lambda y)^2 \\ &= \lambda^2(x^2 + kxy + ty^2) \\ &= \lambda^2\eta(x, y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f_\eta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \eta((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) - \eta(x_1, y_1) - \eta(x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2)^2 + k(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + t(y_1 + y_2)^2 - (x_1^2 + kx_1y_1 + ty_1^2) \\ &\quad - (x_2^2 + kx_2y_2 + ty_2^2) \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + kx_1y_1 + kx_1y_2 + kx_2y_1 + kx_2y_2 + ty_1^2 + 2ty_1y_2 \\ &\quad + ty_2^2 - x_1^2 - kx_1y_1 - ty_1^2 - x_2^2 - kx_2y_2 - ty_2^2 \\ &= 2x_1x_2 + kx_1y_2 + kx_2y_1 + 2ty_1y_2.\end{aligned}$$

Queremos saber agora sobre quais condições a η é não-degenerada. Assim, fixado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se que $f_\eta((x, y), (a, b)) = 0$, isto é, $2xa + kxb + kya + 2tyb = 0$, tomando $(x, y) = (1, 0)$ resulta em $2a + kb = 0$ e $(x, y) = (0, 1)$ segue que $ka + 2tb = 0$. Assim, obtemos um sistema que gera a seguinte matriz $\begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2t \end{pmatrix}$ cujo determinante é dado por $4t - k^2$, logo η depende das constante k e t para ser classificada como degenerada ou não-degenerada. Contudo, se definirmos o produto em \mathbb{R}^2 dado por $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - ty_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2 + ky_1y_2)$, η admite composição, como podemos observar abaixo:

$$\begin{aligned}\eta((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= \eta(x_1x_2 - ty_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2 + ky_1y_2) \\ &= (x_1x_2 - ty_1y_2)^2 + k(x_1x_2 - ty_1y_2)(x_1y_2 + y_1x_2 + ky_1y_2) + \\ &\quad t(x_1y_2 + y_1x_2 + ky_1y_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 - 2tx_1x_2y_1y_2 + t^2y_1^2y_2^2 + k[x_1^2x_2y_2 + x_1x_2^2y_1 + kx_1x_2y_1y_2 - tx_1y_1y_2^2 \\ &\quad - ty_1^2y_2x_2 - tk y_1^2y_2^2] + t[x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + k^2y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + 2kx_1y_1y_2^2 \\ &\quad + 2ky_1^2y_2x_2] \\ &= x_1^2(x_2^2 + kx_2y_2 + ty_2^2) + kx_1y_1(x_2^2 + kx_2y_2 + ty_2^2) + ty_1^2(x_2^2 + kx_2y_2 + ty_2^2) \\ &= (x_1^2 + kx_1y_1 + ty_1^2)(x_2^2 + kx_2y_2 + ty_2^2) \\ &= \eta(x_1, y_1)\eta(x_2, y_2).\end{aligned}$$

A seguir definimos álgebra com composição e involução sobre uma álgebra. Estes dois conceitos serão utilizados na próxima seção referente ao processo da Cayley-Dickson.

Definição 1.5. *Seja A uma álgebra sobre \mathbb{R} e η uma forma quadrática, dizemos que A é uma álgebra com composição se:*

- i) η admite composição;
- ii) η é estritamente não degenerada;
- iii) Existe um elemento identidade em A .

Podemos dizer que uma álgebra com composição é um par (A, η) .

Definição 1.6. *Seja A uma \mathbb{R} -álgebra, dizemos que $\rho : A \rightarrow A$ é uma involução da álgebra A se ρ é linear, $\rho(\rho(a)) = a$ e $\rho(ab) = \rho(b)\rho(a)$.*

Exemplo 1.2. *Seja $A = \mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre \mathbb{R} e com o produto usual. Definimos $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\rho(z) = \bar{z}$, desse modo ρ é uma involução da álgebra \mathbb{C} . De fato, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{C}$ temos que*

$$\begin{aligned}\rho(\lambda x + y) &= \overline{\lambda x + y} = \overline{\lambda x} + \overline{y} = \lambda \bar{x} + \bar{y} = \lambda \rho(x) + \rho(y), \\ \rho(\rho(x)) &= \rho(\bar{x}) = \overline{\bar{x}} = x, \\ \rho(xy) &= \overline{xy} = (\bar{x})(\bar{y}) = (\bar{y})(\bar{x}) = \rho(y)\rho(x).\end{aligned}$$

1.2 O Problema de Hurwitz e o Processo de Cayley-Dickson

O problema de Hurwitz, em homenagem a Adolf Hurwitz, é o problema de encontrar relações multiplicativas entre formas quadráticas que generalizam somas de quadrados em certos números de variáveis. Sejam $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$ números complexos, uma das mais importante propriedade dos números complexos é dado por $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, onde utilizando a definição da norma podemos reescrever essa igualdade como sendo

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2.$$

Isto mostra que o produto de duas somas de dois quadrados é novamente uma soma de dois quadrados. Uma pergunta natural que surge é: Podemos generalizar para soma de n quadrados? O problema de Hurwitz para um corpo \mathbb{F} é encontrar relações gerais da forma $(a_1^2 + \dots + a_r^2)(b_1^2 + \dots + b_s^2) = A_1^2 + \dots + A_n^2$ em que cada A_k é uma forma bilinear em a_i e b_j , isto é, A_k é uma combinação linear dos termos da forma $a_i b_j$, com $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$. Exemplos de identidades para a soma de quatro quadrados já eram conhecidos por Euler e Lagrange. Em 1818, Degen construiu um exemplo para $n = 8$, porém não foi publicado.

Em 1843, Hamilton construiu um exemplo para $n = 4$ (quatérnios). Este deu a fundamentação definitiva dos números complexos como pares ordenados de números reais, implicando no desenvolvimento de uma álgebra que permitia trabalhar com os vetores do plano. Isto o fez pensar na seguinte questão: como desenvolver uma álgebra de ternas que daria a linguagem para trabalhar com vetores do espaço? Trabalhou neste problema durante 10 anos, até que entendeu a dificuldade da questão. Um dia quando estava a caminho da reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda, Hamilton finalmente descobriu o que precisava ser acrescentado e tomou a liberdade de gravar com um canivete numa pedra da ponte Brougham, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k que contém a solução do problema. Com a multiplicação definida, o conjunto dos quatérnios constitui o primeiro exemplo de anel não comutativo com divisão. Hamilton reconheceu imediatamente a importância de sua descoberta, especialmente pelas suas implicações para o desenvolvimento da física. Ele observou que a existência de uma identidade para a soma de n quadrados é equivalente à existência de uma álgebra de divisão de uma forma definida com dimensão n sobre o corpo dos números reais.

Graves e Cayley construíram um exemplo para $n = 8$ (octônios), baseado no trabalho de Hamilton. Os matemáticos Arthur Cayley e Leonard Eugene Dickson publicaram um trabalho em que apresentaram um algoritmo para as álgebras de dimensão 2^n , e provando que as únicas álgebras com composição (a menos de isomorfismos) são os \mathbb{R} (reais), \mathbb{C} (complexos), \mathbb{H} (quatérnios) e \mathbb{O} octônios. Tal processo será descrito na subseção a seguir.

1.2.1 Processo de Cayley-Dickson

Sejam A uma álgebra unital, $\rho(a) = \bar{a}$ uma involução em A tal que $a + \bar{a}, a\bar{a} \in \mathbb{R}$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq 0$ fixo e considere o conjunto $(A, \alpha) = \{(a_1, a_2); a_1, a_2 \in A\}$. Para todos

$a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos:

a) $(a_1, a_2) + (a_3, a_4) = (a_1 + a_3, a_2 + a_4),$

b) $(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2, \bar{a}_1a_4 + a_3a_2);$

c) $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2).$

(A, α) com (a), (b) e (c) é uma álgebra com unidade $(1_A, 0)$.

Considere o conjunto $A' = \{(a, 0); a \in A\}$ e vejamos que A' é uma subálgebra de (A, α) . Com efeito, dados $(a, 0), (b, 0) \in A'$ temos

$$(a, 0)(b, 0) = (a + b + \alpha 0, 0 + 0) = (ab, 0) \in A'.$$

Temos que $A \cong A'$ pela função

$$\begin{aligned} \phi: A &\longrightarrow A' \\ a &\longmapsto (a, 0) \end{aligned}.$$

De fato, ϕ é linear, pois para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ obtemos

$$\phi(\lambda a + b) = (\lambda a + b, 0) = \lambda(a, 0) + (b, 0) = \lambda\phi(a) + \phi(b).$$

Agora cada $(a, 0) \in A'$ é imagem do elemento $a \in A$ pela ϕ , logo ϕ é sobrejetora. Vejamos que ϕ é injetora, sejam $a, b \in A$ tal que $a \neq b$ então $(a, 0) \neq (b, 0)$ implica $\phi(a) \neq \phi(b)$. Portanto, ϕ é bijetora. E segue também que a ϕ preserva o produto, pois $\phi(ab) = (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) = \phi(a)\phi(b)$. Desse modo, a função ϕ leva a álgebra A na subálgebra A' de (A, α) . Agora, considere $v = (0, 1)$, note que $v^2 = \alpha(1, 0)$ e $v(a, 0) = (0, a)$. Logo, $vA' = \{(0, a); a \in A\}$ é subespaço mas não é subálgebra, visto que se $(0, a_1), (0, a_2) \in vA'$ resulta em $(0, a_1)(0, a_2) = (\alpha a_2\bar{a}_1, 0) \in A$. Além disso,

$$(A, \alpha) = A' \oplus vA' \equiv \{a_1 + va_2; a_1, a_2 \in A\}.$$

Portanto,

$$(a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) + v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2).$$

Dado um elemento $(a_1, a_2) \in (A, \alpha)$ temos que $(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1 + va_2$. Sejam $x = a_1 + va_2$ e $\bar{x} = \bar{a}_1 - va_2$ ambos em (A, α) , isso define uma função $x \mapsto \bar{x}$ que é uma involução.

Sejam \mathbb{R} um corpo e A uma álgebra com composição. Então existe $\eta : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática estritamente não-degenerada em A . Tomando $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear associada, temos que $a \mapsto \bar{a} = f(1, a) - a$ é uma involução com $a + \bar{a}, a\bar{a} \in \mathbb{R}$, e a forma quadrática $\eta(a) = a\bar{a}$. Aplicando o processo de Cayley Dickson, obtemos a álgebra (A, α) , a involução $x \mapsto \bar{x}$ e a forma quadrática $\eta(x) = x\bar{x}$, queremos saber se η admite composição, a resposta encontra-se no lema abaixo.

Lema 1.1. *A forma quadrática η admite composição, ou seja, $\eta(xy) = \eta(x)\eta(y)$, se e somente se o produto em A é associativo.*

Demonstração. De fato, sejam $x, y \in (A, \alpha)$ com $x = a_1 + va_2$ e $y = a_3 + va_4$, note que $\eta(x) = a_1\bar{a}_1 - \alpha a_2\bar{a}_2 = \eta(a_1) - \alpha\eta(a_2)$ e analogamente $\eta(y) = \eta(a_3) - \alpha\eta(a_4)$. Assim,

$$\begin{aligned} \eta(xy) - \eta(x)\eta(y) &= \eta((a_1 + va_2)(a_3 + va_4)) - [\eta(a_1) - \alpha\eta(a_2)][\eta(a_3) - \alpha\eta(a_4)] \\ &= \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2 + v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2)) \\ &\quad - (\eta(a_1)\eta(a_3) - \alpha\eta(a_1)\eta(a_4) - \alpha\eta(a_2)\eta(a_3) + \alpha^2\eta(a_2)\eta(a_4)) \\ &= \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) - \alpha\eta(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2) - (\eta(a_1)\eta(a_3) \\ &\quad - \alpha\eta(a_1)\eta(a_4) - \alpha\eta(a_2)\eta(a_3) + \alpha^2\eta(a_2)\eta(a_4)). \end{aligned}$$

Observe que $\eta(\bar{a}) = \bar{a}\bar{\bar{a}} = \bar{a\bar{a}} = a\bar{a} = \eta(a)$ desse modo $f(x, y) = \eta(x + y) - \eta(x) - \eta(y)$, assim

$$f(a_1a_3, \alpha a_4\bar{a}_2) = \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) - \eta(a_1a_3) - \eta(\alpha a_4\bar{a}_2)$$

rearrumando os termos da igualdade obtemos

$$\begin{aligned} \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) &= -\eta(a_1a_3) + \alpha^2\eta(a_4\bar{a}_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) \\ &= \eta(a_1)\eta(a_3) + \alpha^2\eta(a_4)\eta(\bar{a}_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) \\ &= \eta(a_1)\eta(a_3) + \alpha^2\eta(a_4)\eta(a_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \eta(xy) - \eta(x)\eta(y) &= \eta(a_1)\eta(a_3) + \alpha^2\eta(a_4)\eta(a_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) - \alpha f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2) - \alpha\eta(a_1)\eta(a_4) \\ &\quad - \alpha\eta(a_3)\eta(a_2) - \eta(a_1)\eta(a_3) + \alpha\eta(a_1)\eta(a_4) + \alpha\eta(a_2)\eta(a_4) - \alpha^2\eta(a_2)\eta(a_4) \\ &= \alpha[f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) - f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2)] \end{aligned} \tag{1.2}$$

lembrando que $f(xy, zw) = -f(xw, zy) + f(x, z)f(y, w)$, logo

$$\begin{aligned}
f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) &= f(a_1a_3 \cdot 1, a_4\bar{a}_2) \\
&= -f(a_1a_3\bar{a}_2, a_4) + f(a_1a_3, a_4)f(1, \bar{a}_2) \\
&= -f(a_1a_3\bar{a}_2, a_4) + f(f(1, \bar{a}_2)a_1a_3, a_4) \\
&= f(f(1, \bar{a}_2)a_1a_3 - a_1a_3\bar{a}_2, a_4) \\
&= f(a_1a_3(f(1, \bar{a}_2) - \bar{a}_2), a_4) \\
&= f(a_1a_3a_2, a_4)
\end{aligned}$$

assim, de (3.24) temos

$$\begin{aligned}
0 = \eta(xy) - \eta(x)\eta(y) &= \alpha[f(a_1a_3 \cdot a_2, a_4) - f(a_1 \cdot a_3a_2, a_4)] \\
&= \alpha f(a_1a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3a_2, a_4)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\eta(xy) - \eta(x)\eta(y) = 0 &\Leftrightarrow \alpha f(a_1a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3a_2, a_4) = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3a_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (a_1a_3) \cdot a_2 = a_1 \cdot (a_3a_2).
\end{aligned}$$

Logo, A é associativo. □

Daremos a seguir quatro exemplos de álgebra com composição.

A. Sabemos que \mathbb{R} é uma álgebra sobre \mathbb{R} , sejam $\alpha \mapsto \alpha$ a involução em \mathbb{R} , $\eta(\alpha) = \alpha^2$ a forma quadrática (η é estritamente não degenerada) e $f(\alpha, \beta) = \eta(\alpha + \beta) - \eta(\alpha) - \eta(\beta) = (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha\beta$. Veja que se $f(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$, ou seja, $2\alpha\beta = 0$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$, o que implica $\alpha = 0$, e $\eta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = \eta(\alpha)\eta(\beta)$. Portanto, \mathbb{R} é uma álgebra com composição.

B. Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $4\mu + 1 \neq 0$ e $K(\mu) = \{(\alpha_1, \alpha_2); \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ com as operações

- $(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$;
- $\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$;

- $(\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1\beta_1 + \mu\alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)$;

$K(\mu)$ é uma álgebra comutativa, associativa e unital, onde $(1, 0)$ é o elemento unidade da álgebra. Mostremos que $A' = \{(\alpha, 0); \alpha \in \mathbb{R}\}$ é subálgebra de $K(\mu)$. Dados, $(\alpha, 0), (\beta, 0) \in A'$ então $(\alpha, 0)(\beta, 0) = (\alpha\beta, 0) \in A'$. Considere $v_1 = (0, 1)$ note que $v_1^2 = (\mu, 1)$ e $v_1(\alpha, 0) = (0, 1)(\alpha, 0) = (0, \alpha)$, portanto $v_1A' = \{(0, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$, e assim $K(\mu) = A' \oplus A'v_1$. Fazendo $A' \equiv \mathbb{R}$ dado por $(\alpha, 0) \equiv \alpha$, temos que $K(\mu) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v_1$, logo $v_1^2 = (\mu, 1)$ implica em $v_1^2 = \mu + v_1$. Dados $a, b \in K(\mu)$ onde $a = \alpha_1 + \alpha_2v_1$ e $b = \beta_1 + \beta_2v_1$ segue que

$$ab = (\alpha_1\beta_1 + \mu\alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)v_1$$

A aplicação $\overline{\alpha_1 + \alpha_2v_1} = (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2v_1$ é uma involução. Tomando a forma quadrática $\eta(\alpha_1 + \alpha_2v_1) = (\alpha_1 + \alpha_2v_1)(\overline{\alpha_1 + \alpha_2v_1})$, segue que

$$\begin{aligned} \eta(\alpha_1 + \alpha_2v_1) &= (\alpha_1 + \alpha_2v_1)((\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2v_1) \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - \mu\alpha_2^2) + (-\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2^2 - \alpha_2^2)v_1 \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - \mu\alpha_2^2. \end{aligned}$$

Fazendo $t = -\mu$ e $k = 1$ no exemplo (1.1), temos a nossa $\eta(\alpha_1 + \alpha_2v_1)$, logo implica que $\eta((\alpha_1 + \alpha_2v_1)(\beta_1 + \beta_2v_1)) = \eta(\alpha_1 + \alpha_2v_1)\eta(\beta_1 + \beta_2v_1)$. Considerando o polinômio $g(x) = x^2 - x - \mu \in \mathbb{R}[x]$ como $v_1^2 = \mu + v_1$, então $g(v_1) = v_1^2 - v_1 - \mu = 0$. Calculando as raízes de g obtemos $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\mu}}{2}$, como $1 + 4\mu \neq 0$, o polinômio tem duas raízes reais distintas ou não tem raiz real, vamos analisar os dois casos.

1. g não tem raiz real.

$g(x) = x^2 - x - \mu$ é irredutível sobre \mathbb{R} , tome $a = \alpha_1 + \alpha_2v_1 \in K(\mu)$ com $a \neq 0$, dividindo $g(x)$ por a obtemos $x^2 - x - \mu = (\alpha_2x + \alpha_1)(\beta_2x + \beta_1) + r$, onde $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} v_1^2v_1 - \mu &= 0 \\ (\alpha_2v_1\alpha_1)(\beta_2v_1 + \beta_1) + r &= 0 \\ (\alpha_2v_1\alpha_1)(\beta_2v_1 + \beta_1) &= -r \\ (\alpha_2v_1\alpha_1) \left(-\frac{\beta_2}{r}v_1 - \frac{\beta_1}{r} \right) &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $K(\mu)$ é corpo, pois todo elemento tem inverso.

2. g tem duas raízes distintas x_1 e x_2 .

Do fato de x_1 e x_2 serem raízes segue que $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1x_2 = -\mu$. Considere $b = \frac{1}{x_1 - x_2}(-x_1 + v_1) = \frac{v_1 - x_1}{x_2 - x_1}$, note que $b^2 = b$. Portanto, b é um elemento idempotente, e assim $\{1, b\}$ é base de $K(\mu)$, com $b^2 = b$. Dados $(\alpha_1 + \alpha_2b), (\beta_1 + \beta_2b) \in K(\mu)$ o produto entre eles é dado por

$$(\alpha_1 + \alpha_2b)(\beta_1 + \beta_2b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2b + \alpha_2\beta_1b + \alpha_2\beta_2b = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)b.$$

Desse modo, com relação a nova base temos $K(\mu) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}b$. Dado $v = -\frac{1}{2} + v_1 \in K(\mu)$, temos

$$v^2 = \left(-\frac{1}{2} + v_1\right)^2 = \frac{1}{4} - v_1 + v_1^2 = \frac{1}{4} - v_1 + \mu + v_1 = \frac{1}{4}(1 + 4\mu) \neq 0.$$

Chamando $v^2 = \alpha$ segue que $\alpha \neq 0$. Considerando $(\mathbb{R}, \alpha) = \{\alpha_1 + \alpha_2v; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ então

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2v)(\beta_1 + \beta_2v) &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2v + \alpha_2\beta_1v + \alpha_2\beta_2v^2 \\ &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\alpha) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)v. \end{aligned}$$

Portanto, $K(\mu) = (\mathbb{R}, \alpha)$.

Reciprocamente, dados o corpo \mathbb{R} com $\text{car}(\mathbb{R}) \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$, então $(\mathbb{R}, \alpha) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v$ onde $v^2 = \alpha$ o que implica $v = (0, 1)$. Tome $v_1 = \frac{1}{2} + v$ logo $\{1, v_1\}$ é base de (\mathbb{R}, α) , e assim $(\mathbb{R}, \alpha) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v_1 = \{\alpha_1 + \alpha_2v_1; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ daí

$$v_1^2 = \left(\frac{1}{2} + v\right)^2 = \frac{1}{4} + \alpha + v = \frac{1}{4} + \alpha + v_1 - \frac{1}{2} = \alpha - \frac{1}{4} + v_1 = \mu + v_1$$

além disso, $4\mu + 1 = 4\left(\alpha - \frac{1}{4}\right) + 1 = 4\alpha \neq 0$. Agora, $(\alpha_1 + \alpha_2v_1)(\alpha_3 + \alpha_4v_1) \in K(\mu)$, dessa forma, $(\mathbb{R}, \alpha) = K(\mu)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_1 + \alpha_2v_1} &= \overline{\alpha_1 + \alpha_2\left(\frac{1}{2} + v\right)} \\ &= \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \alpha_2v \\ &= \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \alpha_2\left(-\frac{1}{2} + v_1\right) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2v_1 \end{aligned}$$

logo, coincide com a involução em $K(\mu)$.

C. Seja $\beta \in \mathbb{R}$ onde $\beta \neq 0$, construímos $Q(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta)$ tal que $Q(\mu, \beta) = K(\mu) + \omega K(\mu)$ em que $\omega^2 = \beta$, logo

$$Q(\mu, \beta) = \{(\alpha_1, \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v); \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)][(\beta_1 + \beta_2 v) + \omega(\beta_3 + \beta_4 v)] \\ &= [(\alpha_1 + \alpha_2 v)(\beta_1 + \beta_2 v) + \beta(\beta_3 + \beta_4 v)(\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v})] + \\ & \quad \omega[(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})(\beta_3 + \beta_4 v) + (\beta_1 + \beta_2 v)(\alpha_3 + \alpha_4 v)] \end{aligned}$$

$Q(\mu, \beta)$ não é comutativa. De fato, sejam

$$\begin{aligned} v &= [(0 + 1v) + \omega(0 + 0v)] \\ \omega &= [(0 + 0v) + \omega(1 + 0v)] \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} vw &= [(0 + 1v) + \omega(0 + 0v)][(0 + 0v) + \omega(1 + 0v)] \\ &= [(0 + 1v)(0 + 0v) + \beta(1 + 0v)(\overline{0 + 0v})] + \omega[(\overline{0 + 1v})(1 + 0v) + (0 + 0v)(0 + 0v)] \\ &= 0 + \omega[(0 - 1v)(1 + 0v) + 0] \\ &= \omega[0 + 0 + v[\overline{-1}0 + 1(-1)]] \\ &= w(-v) = -wv \end{aligned}$$

Mas $Q(\mu, \beta)$ é associativa. Com efeito, dados $(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)$, $(\beta_1 + \beta_2 v) + \omega(\beta_3 + \beta_4 v)$ e $(\gamma_1 + \gamma_2 v) + \omega(\gamma_3 + \gamma_4 v)$ em $Q(\mu, \beta)$ temos

$$\begin{aligned} & \{[(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)][(\beta_1 + \beta_2 v) + \omega(\beta_3 + \beta_4 v)]\}[(\gamma_1 + \gamma_2 v) + \omega(\gamma_3 + \gamma_4 v)] \\ &= \{(\alpha_1 + \alpha_2 v)(\beta_1 + \beta_2 v) + \beta(\beta_3 + \beta_4 v)(\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v}) + \omega[(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})(\beta_3 + \beta_4 v) + \\ & \quad (\beta_1 + \beta_2 v)(\alpha_3 + \alpha_4 v)]\}[(\gamma_1 + \gamma_2 v) + \omega(\gamma_3 + \gamma_4 v)] \\ &= [(\alpha_1 + \alpha_2 v)(\beta_1 + \beta_2 v) + \beta(\beta_3 + \beta_4 v)(\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v})](\gamma_1 + \gamma_2 v) \\ & \quad + \beta(\gamma_3 + \gamma_4 v)[(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})(\beta_3 + \beta_4 v) + (\beta_1 + \beta_2 v)(\alpha_3 + \alpha_4 v)] \\ & \quad \omega\{[(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})(\beta_1 + \beta_2 v) + \beta(\beta_3 + \beta_4 v)(\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v})](\gamma_3 + \gamma_4 v) \\ & \quad + (\gamma_1 + \gamma_2 v)[(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})(\beta_3 + \beta_4 v) + (\beta_1 + \beta_2 v)(\alpha_3 + \alpha_4 v)]\} \\ &= [(\alpha_1 + \alpha_2 v)(\beta_1 + \beta_2 v)](\gamma_1 + \gamma_2 v) + \beta[(\beta_3 + \beta_4 v)(\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v})](\gamma_1 + \gamma_2) \\ & \quad + \omega\{[(\overline{\beta_1 + \beta_2 v})(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})](\gamma_3 + \gamma_4 v) + \beta[(\alpha_3 + \alpha_4 v)(\overline{\beta_3 + \beta_4 v})](\gamma_3 + \gamma_4 v) \\ & \quad + (\gamma_1 + \gamma_2 v)[(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})(\beta_3 + \beta_4 v)] + (\gamma_1 + \gamma_2 v)[(\beta_1 + \beta_2 v)(\alpha_3 + \alpha_4 v)]\} \quad (1.3) \end{aligned}$$

como para todo $i, j = \{1, 2\}$ tem-se que $(\alpha_i + \alpha_j v)$, $(\beta_i + \beta_j v)$ e $(\gamma_i + \gamma_j v)$ pertencem a $K(\mu)$, usando o fato de que esta é uma álgebra associativa e comutativa, podemos rearrumar a igualdade (1.5) do seguinte modo

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 + \alpha_2 v)[(\beta_1 + \beta_2 v)(\gamma_1 + \gamma_2 v)] + \beta(\alpha_1 + \alpha_2 v)[(\gamma_3 + \gamma_4 v)(\overline{\beta_3 + \beta_4 v})] \\
& \beta[(\overline{\beta_1 + \beta_2 v})(\gamma_3 + \gamma_4 v)](\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v}) + \beta[(\gamma_1 + \gamma_2 v)(\beta_3 + \beta_4 v)](\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v}) + \\
& \omega\{(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})[(\beta_1 + \beta_2 v)(\gamma_3 + \gamma_4 v)] + (\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})[(\gamma_1 + \gamma_2 v)(\beta_3 + \beta_4 v)] + \\
& \quad [(\beta_1 + \beta_2 v)(\gamma_1 + \gamma_2 v)](\alpha_3 + \alpha_4 v) + \beta[(\gamma_3 + \gamma_4 v)(\overline{\beta_3 + \beta_4 v})](\alpha_3 + \alpha_4 v)\} \\
= & (\alpha_1 + \alpha_2 v)[(\beta_1 + \beta_2 v)(\gamma_1 + \gamma_2 v) + \beta(\gamma_3 + \gamma_4 v)(\overline{\beta_3 + \beta_4 v})] + \\
& \beta[(\overline{\beta_1 + \beta_2 v})(\gamma_3 + \gamma_4 v) + (\gamma_1 + \gamma_2 v)(\beta_3 + \beta_4 v)](\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v}) + \\
& \omega\{(\overline{\alpha_1 + \alpha_2 v})[(\beta_1 + \beta_2 v)(\gamma_3 + \gamma_4 v) + (\gamma_1 + \gamma_2 v)(\beta_3 + \beta_4 v)] + \\
& \quad (\beta_1 + \beta_2 v)(\gamma_1 + \gamma_2 v) + \beta(\gamma_3 + \gamma_4 v)(\overline{\beta_3 + \beta_4 v})\}(\alpha_3 + \alpha_4 v) \\
= & [(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)]\{(\beta_1 + \beta_2 v)(\gamma_1 + \gamma_2 v) + \beta(\gamma_3 + \gamma_4 v)(\overline{\beta_3 + \beta_4 v}) + \\
& \quad \omega[(\overline{\beta_1 + \beta_2 v})(\gamma_3 + \gamma_4 v) + (\gamma_1 + \gamma_2 v)(\beta_3 + \beta_4 v)]\} \\
= & [(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)]\{[(\beta_1 + \beta_2 v) + \omega(\beta_3 + \beta_4 v)][(\gamma_1 + \gamma_2 v) + \omega(\gamma_3 + \gamma_4 v)]\}.
\end{aligned}$$

D. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$ com $\gamma \neq 0$, aplicando o processo de Cayley-Dickson na álgebra $Q(\mu, \beta)$ obtemos $C(\mu, \beta, \gamma) = (Q(\mu, \beta), \gamma)$. Tomando $z^2 = \gamma$, temos

$$\begin{aligned}
C(\mu, \beta, \gamma) &= Q(\mu, \beta) + zQ(\mu, \beta) \\
&= \{[(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)] + z[(\beta_1 + \beta_2 v) + \omega(\beta_3 + \beta_4 v)]; \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Do fato de que $Q(\mu, \beta)$ não é comutativa segue que $C(\mu, \beta, \gamma)$ também não é comutativa, porém vejamos que esta não é associativa. Consideremos $v, \omega, z \in C(\mu, \beta, \gamma)$, logo podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
v &= [(0 + 1v) + \omega(0 + 0v)] + z[(0 + 0v) + \omega(0 + 0v)] \\
\omega &= [(0 + 0v) + \omega(1 + 0v)] + z[(0 + 0v) + \omega(0 + 0v)] \\
z &= [(0 + 0v) + \omega(0 + 0v)] + z[(1 + 0v) + \omega(0 + 0v)]
\end{aligned}$$

sendo assim calculamos

$$\begin{aligned}
(v\omega)z &= \{[(0+1v) + \omega(0+0v)][(0+0v) + \omega(1+0v)]\} \\
&\quad \{[(0+0v) + \omega(0+0v)] + z[(1+0v) + \omega(0+0v)]\} \\
&= \{(0+0v) + \omega(0-v) + z(0)\} \{[(0+0v) + \omega(0+0v)] + z[(1+0v) + \omega(0+0v)]\} \\
&= z[\overline{((0+0v) + \omega(0-v))}((1+0v) + \omega(0+0v))] \\
&= z(\omega v)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
v(\omega z) &= \{[(0+1v) + \omega(0+0v)] + z[(0+0v) + \omega(0+0v)]\} \\
&\quad \{[(0) + \omega(0)] + z[(0+0v) + \omega(1+0v)]\} \\
&= z\{[(0+1v) + \omega(0+0v)][(0+0v) + \omega(1+0v)]\} \\
&= z\{\omega[(0-v)(1+0v)]\} \\
&= z\{\omega(-v)\} \\
&= -z(\omega v).
\end{aligned}$$

Sejam A uma álgebra com composição, $\eta(x)$ a forma quadrática de A , $f(x, y) = \eta(x + y) - \eta(x) - \eta(y)$ a forma bilinear associada, $a \mapsto \bar{a} = f(1, a) - a$ é uma involução tal que $a + \bar{a}, a\bar{a} \in \mathbb{R}$, $\eta(x) = x\bar{x}$ e $f(x, y) = x\bar{y} + y\bar{x}$. Consideremos B subespaço de A , definimos

$$\begin{aligned}
B^\perp &= \{a \in A; f(a, b) = 0, \forall b \in B\} \\
&= \{a \in A; f(a, B) = 0\}
\end{aligned}$$

portanto, B^\perp é subespaço de A .

O lema a seguir nos auxiliará na demonstração do teorema que garante o resultado principal da seção das álgebras com composição.

Lema 1.2. *Sejam A uma álgebra com composição e B uma subálgebra de A que contém o elemento identidade de A (ou seja $1_A \in B$). Então $BB^\perp + B^\perp B \subset B^\perp$ e para quaisquer $a, b \in B$ e $v \in B^\perp$, são válidas as afirmações a baixo:*

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= -v & av &= v\bar{a} & a(vb) &= v(\bar{a}b) \\
(vb)a &= v(ab) & (va)(vb) &= -\eta(v)b\bar{a}
\end{aligned}$$

Demonstração. Ver [13], pág. 31. □

Agora apresentamos o teorema principal desta seção, garantindo que se uma álgebra com composição é tem dimensão 1,2,4 ou 8.

Teorema 1.1. *Se A é uma álgebra com composição, então A é isomorfa a \mathbb{R} , $K(\mu)$, $Q(\mu, \beta)$ ou $C(\mu, \beta, \gamma)$.*

Demonstração. Sejam A uma álgebra com composição, B uma subálgebra de A tal que $1 \in B$ e B tem dimensão finita, $A = B \oplus A^\perp$. Supondo $B \neq A$ então existe $v \in B^\perp$ com $v \neq 0$, logo $\eta(v) \neq 0$. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ fazendo $\alpha = -\eta(v)$, ou melhor, $\eta(v) = -\alpha$, assim $f(va, vb) = \eta(v)f(a, b) = -\alpha f(a, b)$. Consideremos o conjunto $vB = \{vb; b \in B\}$ e seja

$$\begin{aligned} T: B &\longrightarrow vB \\ b &\longmapsto vb \end{aligned}$$

T é linear e sobrejetora, pois dado $b_0 \in Ker(T)$ então $T(b_0) = 0 \implies vb_0 = 0$, seja $x \in B$, $f(vb_0, vx) = 0 \implies -\alpha f(b_0, x) = 0$, ou seja $f(b_0, x) = 0$ para todo $x \in B$, o que implica $b_0 = 0$. Logo, T é injetora. Por consequência $dim(B) = dim(vB)$. Assim obtemos $B_1 = B \oplus vB$. Note que f é degenerada em B_1 , pois $dim(B_1) < +\infty$. Sejam $b_1 + vb_2, b_3 + vb_4 \in B_1$

$$\begin{aligned} (b_1 + vb_2)(b_3 + vb_4) &= b_1b_3 + b_1(vb_4) + (vb_2)b_3 + (vb_2)(vb_4) \\ &= b_1b_3 + \alpha b_4\bar{b}_2 + v(\bar{b}_1b_4 + b_3b_2) \end{aligned}$$

portanto, $B_1 = (B, \alpha)$. Podemos repetir o processo até obter a álgebra A . □

Iremos agora estabelecer a relação entre álgebras normadas e álgebras de divisão. Para isso, vejamos a seguinte proposição:

Proposição 1.1. *Seja $A = (V, *)$ uma \mathbb{R} -álgebra de dimensão finita, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) A é uma álgebra de divisão

b) Para cada $u \in V$, com $u \neq 0_v$, as aplicações $L_u: v \longrightarrow V$ e $R_u: V \longrightarrow V$ definidas por $L_u(x) = u * x$ e $R_u(x) = x * u$, são isomorfismos.

c) Para cada $u, v \in V$, com $u \neq 0_v$, as equações $u * x = v$ e $x * u = v$ tem solução em A .

Demonstração. **a)** \Rightarrow **b)** Dados $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, utilizando o fato de que $*$ é um produto bilinear, temos que

$$L_u(\alpha x + y) = u * (\alpha x + y) = \alpha u * x + u * y = L_u(x) + L_u(y) \quad (1.4)$$

$$R_u(\alpha x + y) = (\alpha x + y) * u = \alpha x * u + y * u = R_u(x) + R_u(y) \quad (1.5)$$

Logo, L_u e R_u são lineares. Agora, sejam $v_1, v_2 \in V$ com $L_u(v_1) = L_u(v_2)$, isto é, $u * v_1 = u * v_2$, logo $u * (v_1 - v_2) = 0$, como A é uma álgebra de divisão, segue que $v_1 = v_2$, então L_u é injetiva. De forma análoga, mostramos que R_u é injetiva. Como L_u e R_u são transformações lineares injetoras de um espaço vetorial V de dimensão finita no próprio V , segue que L_u e R_u são isomorfismos.

b) \Rightarrow **a)** Como L_u e R_u são sobrejetoras segue que para cada $v \in V$ existem $x \in V$ tal que $L_u(x) = v$ e $R_u(x) = v$, e do fato de L_u e R_u serem injetivas segue a unicidade de x , portanto $x = 1_V$. Agora, para 1_V existe $x \in V$ tal que $R_u(x) = 1_V$ e $L_u(x) = 1_V$, pela sobrejetividade. Concluimos da injetividade que x é único e portanto A é uma álgebra de divisão.

b) \Rightarrow **c)** Como L_u e R_u são isomorfismos, então são sobrejetoras, o que implica que as equações $u * x = v$ e $x * u = v$ tem solução.

c) \Rightarrow **b)** Segue de (1.4) e (1.5) que L_u e R_u são lineares, como por hipótese $u * x = v$ e $x * u = v$ tem solução, então as funções L_u e R_u são sobrejetivas. Desde que L_u e R_u são transformações lineares sobrejetoras de um espaço vetorial A de dimensão finita nele mesmo segue que tais funções são injetoras, logo L_u e R_u são isomorfismos

□

Proposição 1.2. Se A é uma \mathbb{R} -álgebra com composição de dimensão finita então A é uma \mathbb{R} -álgebra de divisão.

Demonstração. Seja $u \in V$ com $u \neq 0_v$. Consideremos as funções L_u e R_u definidas na proposição anterior. Vamos mostrar que tais funções são injetoras, assim, sejam $v_1 \in \ker L_u$ e $v_2 \in \ker R_u$, isto é, $L_u(v_1) = u * v_1 = 0_v$ e $R_u(v_2) = v_2 * u = 0_v$, logo, $\|u * v_1\| = 0$ e $\|v_2 * u\| = 0$, como A é uma álgebra com composição segue que $\|u\| \cdot \|v_1\| = 0$ e $\|v_2\| \cdot \|u\| = 0$,

por hipótese $\|u\| \neq 0$, pois $u \neq 0_v$, o que implica $\|v_1\| = \|v_2\| = 0$, ou seja, $v_1 = v_2 = 0_v$. Desse modo, L_u e R_u são injetoras, lineares e como estão definidas em espaço de dimensão finita, segue que são sobrejetoras. Portanto, da proposição anterior, temos que A é uma álgebra de divisão. \square

Portanto, segue do teorema (1.1) e da proposição (1.2) o seguinte teorema:

Corolário 1.1. *Toda álgebra de divisão tem dimensão 1, 2, 4 ou 8.*

Corolário 1.2. *Os corpos \mathbb{R} (dimensão 1) e \mathbb{C} (dimensão 2), a álgebra dos quatérnios \mathbb{H} (dimensão 4) e a álgebra dos octônios \mathbb{O} (dimensão 8) são as únicas álgebras de divisão normadas, a menos de isomorfismos.*

1.3 A Álgebra dos Quatérnios

Esta seção é destinada a explicar e exibir os quatérnios, definindo sua forma algébrica. Um quatérnio possui uma parte real e uma imaginária que apresenta três componentes que chamaremos de i, j, k .

Definição 1.7. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, um quatérnio é um número da forma $q = a + bi + cj + dk$, cujo produto vetorial entre as componentes i, j, k é dado por*

$$\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & -1 & k & -j \\ j & -k & -1 & i \\ k & j & -i & -1 \end{array}.$$

Denotamos por \mathbb{H} , onde o conjunto dos números quatérnios.

Assim, $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

Observação 1.1. *O \mathbb{H} é em homenagem ao matemático William Rowan **Hamilton** que idealizou e formalizou tais números.*

Dizemos que dois quatérnios $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ são iguais se e somente se os seus respectivos componentes são exatamente iguais, ou seja, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ e $d_1 = d_2$.

Exemplo 1.3. Os quatérnios $q = 1 - 2i + 5j + 100k$ e $q_2 = -2i + 5j + 100k + 1$ são iguais, pois as respectivas componentes são iguais. Por outro lado, os quatérnios $q_3 = i + 7j + 10k$ e $q_4 = 1 + i + 7j + 10k$, não são iguais, já que não possuem a mesma parte real.

Um quatérnio é dito puro se a sua parte real é igual a zero, ou seja, se o quatérnio é da forma $q = bi + cj + dk$. Desse modo, o quatérnio $q_3 = i + 7j + 10k$ é um quatérnio puro.

Definição 1.8. Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ dados por $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$, definimos a soma entre quatérnios como sendo a soma dos escalares das respectivas componentes, assim:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

Exemplo 1.4. Sejam $q_1 = -10 + 2i + 6j - 9k$ e $q_2 = 19i + 7k$, a soma $q_1 + q_2$ é um novo quatérnio q_3 dado por $q_3 = (-10 + 0) + (2 + 19)i + (6 + 0)j + (-9 + 7)k = -10 + 21i + 6j - 1k$.

Definição 1.9. Sejam $q_1 \in \mathbb{H}$ dado por $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. A multiplicação de um quatérnio q_1 por um escalar é dada pela multiplicação do escalar com cada uma das componentes. Logo, temos que

$$\alpha q = \alpha + \alpha b_1i + \alpha c_1j + \alpha d_1k.$$

Exemplo 1.5. Considerando o quatérnio $q = 9 - 12i - 8j + 2k$, ao realizar o produto de q pelo escalar $\alpha = 2$ obtemos um novo quatérnio $\alpha q = 2(9 - 12i - 8j + 2k) = 18 - 24i - 16j + 4k$.

Definimos o quatérnio nulo como sendo aquele onde os escalares a, b, c, d são nulos, ou seja, o quatérnio nulo é dado por $0 + 0i + 0j + 0k$ que será identificado com o próprio 0 , observe que para todo $q \in \mathbb{H}$ temos que $q + 0 = 0 + q = q$.

Primeiramente vamos provar as propriedades para a soma considerando três quatérnios genéricos $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ dados por $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$, $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ e $q_3 = a_3 + b_3i + c_3j + d_3k$.

A soma dos quatérnios é comutativa. De fato, usando a definição de soma de quatérnios e o fato de que os reais são comutativos, temos

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \\ &= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i + (c_2 + c_1)j + (d_2 + d_1)k \\ &= q_2 + q_1. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, a soma dos quatérnios é associativa. Com efeito, usando o fato de que os reais são associativos, segue que

$$\begin{aligned}
(q_1 + q_2) + q_3 &= [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k] + (a_3 + b_3i + c_3j + d_3k) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i + (c_1 + c_2 + c_3)j + (d_1 + d_2 + d_3)k \\
&= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i + (c_2 + c_3)j + (d_2 + d_3)k] \\
&= q_1 + (q_2 + q_3).
\end{aligned}$$

Observe que cada quatérnio não nulo possui um inverso aditivo, para obter o quatérnio oposto do quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ basta multiplicar q por -1 , resultando assim em $-q = -a - bi - cj - dk$. Assim, $q + (-q) = 0 + 0i + 0j + 0k$, logo, para cada $q \in \mathbb{H}$ não nulo, existe um elemento em \mathbb{H} denotado por $-q$ tal que a soma de q com $-q$ dá o elemento nulo.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não nulos, vejamos que os quatérnios satisfazem as propriedades de espaço vetorial com relação a multiplicação por escalar.

Usando a definição de multiplicação escalar para os quatérnios, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha(q_1 + q_2) &= \alpha[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k] \\
&= (\alpha a_1 + \alpha b_1i + \alpha c_1j + \alpha d_1k) + (\alpha a_2 + \alpha b_2i + \alpha c_2j + \alpha d_2k) \\
&= \alpha q_1 + \alpha q_2.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)q_1 &= (\alpha\beta)(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) \\
&= (\alpha\beta)a_1 + (\alpha\beta)b_1i + (\alpha\beta)c_1j + (\alpha\beta)d_1k \\
&= \alpha(\beta a_1) + \alpha(\beta b_1i) + \alpha(\beta c_1j) + \alpha(\beta d_1k) \\
&= \alpha(\beta q_1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)q_1 &= (\alpha + \beta)(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) \\
&= (\alpha + \beta)a_1 + (\alpha + \beta)b_1i + (\alpha + \beta)c_1j + (\alpha + \beta)d_1k \\
&= (\alpha a_1 + \alpha b_1i + \alpha c_1j + \alpha d_1k) + (\beta a_1 + \beta b_1i + \beta c_1j + \beta d_1k) \\
&= \alpha q_1 + \beta q_1.
\end{aligned}$$

Desse modo, os quatérnios com a soma e produto por escalar definidos a cima formam um espaço vetorial. Vejamos agora que com um determinado produto definido entre quatérnios é possível gerar uma álgebra.

Definição 1.10. *Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ dados por $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$. Utilizando o produto vetorial entre os elementos i, j, k e a propriedade distributiva, definimos a multiplicação entre os quatérnios q_1 e q_2 como sendo*

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + \\ &\quad (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k. \end{aligned}$$

Exemplo 1.6. *O produto entre os quatérnios $q_1 = 1 + 3i + 9j - 2k$ e $q_2 = -8 + 10i + 2j + 3k$ resultará num novo quatérnio q_3 que será dado por*

$$\begin{aligned} q_3 &= (1 * (-8) - 3 * 10 - 9 * 2 - (-2) * 3) + (1 * 10 + 3 * (-8) + 9 * 3 - (-2) * 2)i + \\ &\quad (1 * 2 + 9 * (-8) + (-2) * 10 - 3 * 3)j + (1 * 3 + (-2) * (-8) + 3 * 2 - 9 * 10)k \\ &= -50 + 17i - 99j - 62k. \end{aligned}$$

O conjugado complexo de um quatérnio é definido por $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. e o inverso multiplicativo de um quatérnio q é representado por q^{-1} , definido como o quatérnio tal que $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. A magnitude ou módulo de um quatérnio é definido como o produto entre o número e o seu inverso, $|q|^2 = qq^{-1}$. No caso de um quatérnio unitário temos $\bar{q} = q^{-1}$.

1.4 A Álgebra dos Octônios

Nesta seção iremos apresentar a álgebra dos Octônios, que é uma extensão não-associativa dos quatérnios. É a última álgebra de divisão obtida através do processo de Cayley-Dickson. Iniciemos definindo o que é um octônio e o conjunto dos octônios.

Definição 1.11. *Sejam $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R}$, um octônio é um número da forma $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$. Denotaremos por \mathbb{O} o conjunto dos números octônios.*

Assim,

$$\mathbb{O} = \{o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \in \mathbb{O} \mid x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R}\}.$$

Dizemos que dois octônios $o_1 = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$ e $o_2 = y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7$ são iguais se e somente se os seus respectivos componentes são exatamente iguais, ou seja, $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, 3, \dots, 7$.

Exemplo 1.7. *Os octônios $o_1 = 1 - 2e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 9e_4 - 2e_5 - 6e_6 + e_7$ e $o_2 = 1 - 2e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 9e_4 - 2e_5 + 6e_6 + e_7$ não são iguais, pois os coeficientes de e_6 são diferentes.*

Um octônio é dito puro se a sua parte real é igual a zero, ou seja, se o quatérnio é da forma $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$. Desse modo, o quatérnio $o = e_1 + 5e_2 + e_3 - 6e_6 + 27e_7$ é um octônio puro.

Definição 1.12. *Sejam $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ dados por $o_1 = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$ e $o_2 = y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7$, definimos a soma entre octônios como sendo a soma dos coeficientes das respectivas componentes, assim:*

$$\begin{aligned} o_1 + o_2 &= (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + (x_3 + y_3)e_3 + \\ &= (x_4 + y_4)e_4 + (x_5 + y_5)e_5 + (x_6 + y_6)e_6 + (x_7 + y_7)e_7. \end{aligned}$$

Exemplo 1.8. *Sejam $o_1 = -10 + 2e_2 + 6e_4 - 9e_5 - e_7$ e $o_2 = 1 + 9e_1 - 4e_2 + 7e_3 + 5e_4 + 3e_5 - 2e_6$, a soma $o_1 + o_2$ é um novo octônio o_3 dado por*

$$\begin{aligned} o_3 &= (-10 + 1) + (0 + 9)e_1 + (2 - 4)e_2 + (0 + 7)e_3 + \\ &\quad (6 + 5)e_4 + (-9 + 3)e_5 + (0 - 2)e_6 + (-1 + 0)e_7 \\ &= -9 + 9e_1 - 2e_2 + 7e_3 + 11e_4 - 6e_5 - 2e_6 - 1e_7. \end{aligned}$$

Definição 1.13. *Sejam $o_1 \in \mathbb{O}$ dado por $o_1 = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar. A multiplicação de um octônio por um escalar é dada pela multiplicação do escalar com cada um dos coeficientes das componentes. Logo, temos que*

$$\alpha o = \alpha x_0 + \alpha x_1e_1 + \alpha x_2e_2 + \alpha x_3e_3 + \alpha x_4e_4 + \alpha x_5e_5 + \alpha x_6e_6 + \alpha x_7e_7.$$

Exemplo 1.9. Considerando o octônio $o = 9 - 12e_1 - 8e_2 + 2e_3 + e_4 + 3e_5 + 9e_6 - 11e_7$, ao realizar o produto de o pelo escalar $\alpha = 3$ obtemos um novo quatérnio

$$\alpha o = 3(9 - 12e_1 - 8e_2 + 2e_3 + e_4 + 3e_5 + 9e_6 - 11e_7) = 27 - 36e_1 - 24e_2 + 6e_3 + 3e_4 + 9e_5 + 27e_6 - 33e_7.$$

Assim como feito para os quatérnios é possível mostrar que com essa soma e produto por escalar definidos o conjunto dos octônios forma um espaço vetorial sobre os reais. Assim, definimos um produto neste espaço para gerar a álgebra dos octônios, que é uma álgebra de composição, não associativa, não comutativa e tem dimensão 8.

Considere o conjunto $(e_0 = 1, e_1, \dots, e_7)$ e a seguinte tábua de multiplicação:

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

(1.6)

utilizaremos tal conjunto como sendo a base canônica dos octônios.

Definição 1.14. Sejam $o_1, o_2 \in \mathbb{O}$ dados por $o_1 = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$ e $o_2 = y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7$. Utilizando o produto vetorial entre os elementos $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ e a propriedade distributiva, definimos a

multiplicação entre os octônios o_1 e o_2 como sendo

$$\begin{aligned}
o_1 o_2 &= (x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7)(y_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 + \\
&\quad y_5 e_5 + y_6 e_6 + y_7 e_7) \\
&= (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7) + \\
&\quad (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_4 + x_3 y_7 - x_4 y_2 + x_5 y_6 - x_6 y_5 - x_7 y_3) e_1 \\
&\quad (x_0 y_2 - x_1 y_4 + x_2 y_0 + x_3 y_5 + x_4 y_1 - x_5 y_3 + x_6 y_7 + x_7 y_1) e_2 \\
&\quad (x_0 y_3 + x_1 y_7 - x_2 y_5 + x_3 y_0 + x_4 y_6 + x_5 y_2 - x_6 y_4 + x_7 y_1) e_3 \\
&\quad (x_0 y_4 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_3 y_6 + x_4 y_0 + x_5 y_7 + x_6 y_3 - x_7 y_5) e_4 \\
&\quad (x_0 y_5 - x_1 y_6 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_4 y_7 + x_5 y_0 + x_6 y_1 + x_7 y_4) e_5 \\
&\quad (x_0 y_6 + x_1 y_5 - x_2 y_7 + x_3 y_4 - x_4 y_3 - x_5 y_1 + x_6 y_0 + x_7 y_2) e_6 \\
&\quad (x_0 y_7 + x_1 y_3 + x_2 y_6 - x_3 y_1 + x_4 y_5 - x_5 y_4 - x_6 y_2 + x_7 y_0) e_7
\end{aligned}$$

Considerando a tabela de multiplicação da base canônica dos octônios (1.6), fazendo $i = e_1$, $j = e_2$, $k = e_4$, o subespaço gerado por e_0, i, j, k é isomorfo ao quatérnios \mathbb{H} . Note que com esta notação teremos $e_5 = j e_3$, $e_6 = i e_5 = -k e_3$, $e_7 = i e_3$, e assim e_3, e_5, e_6, e_7 geram o complemento ortogonal \mathbb{H}^\perp .

Necessitamos das definições de multiplicação entre complexos, quatérnios e octônios para exibir as soluções das EDP's em estudo no capítulo 3.

1.5 Trialidades em Espaços Vetoriais

Apresentamos a seguir o estudo de trialidades com o objetivo de trabalhar com as álgebras de divisão não-associativas. Apresentaremos alguns exemplos que servirão para exibir a lei de formação da solução não clássica da Equação Diferencial Parcial Elíptica totalmente não linear que será exibida no capítulo 3. Antes de definir o que é uma trialidade, necessita-se entender o que é uma dualidade, para isso veja a definição a seguir.

Definição 1.15. *Dados dois espaços vetoriais V_1 e V_2 uma dualidade é uma aplicação bilinear não degenerada $f : V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Desse modo, uma trialidade é uma extensão da definição de dualidade no sentido de que

é uma aplicação trilinear com relação a três espaços vetoriais quaisquer. De maneira formal temos a definição a seguir.

Definição 1.16. *Dados três espaços vetoriais V_1 , V_2 e V_3 , uma trialidade é uma aplicação trilinear*

$$t : V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

que é não-degenerado no sentido de que, para quaisquer vetores não nulos $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ existe $v_3 \in V_3$ tal que $t(v_1, v_2, v_3) \neq 0$, analogamente para $v_1, v_3 \neq 0$ e $v_2, v_3 \neq 0$.

Denotaremos o espaço dual de cada espaço vetorial V_1 por V_1^* . Suponhamos que exista uma trialidade

$$t : V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ao dualizar, podemos transformar isso em uma aplicação bilinear,

$$m : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_3^*$$

ou seja, para cada par $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ obtemos um funcional linear $f_3 : V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $f_3(x) = t(v_1, v_2, x)$ para todo $x \in V_3$. A aplicação m é chamada multiplicação. Multiplicar a esquerda por um elemento não nulo de V_1 nos dá um isomorfismo de V_2 em V_3^* , pois é linear do fato da trialidade ser linear, a injetividade e sobrejetividade decorrem da não-degenerescência da nossa trialidade. Analogamente, multiplicação a direita por um elemento não nulo de V_2 induz um isomorfismo entre V_1 e V_3^* . Sendo assim, podemos escolher vetores não nulos $e_1 \in V_1$ e $e_2 \in V_2$ vamos identificar os espaços V_1 , V_2 e V_3^* como sendo um espaço vetorial V (isto é possível devido aos isomorfismos). Note que desse modo iremos identificar os três vetores $e_1 \in V_1$, $e_2 \in V_2$ e $e_1 e_2 \in V_3^*$ com o mesmo vetor $e \in V$. Então obtemos um produto $m : V \times V \longrightarrow V$. Desde que a multiplicação a direita ou a esquerda por um elemento não nulo é um isomorfismo, então o que obtemos na verdade é uma álgebra de divisão. Analogamente, toda álgebra de divisão nos dá uma trialidade, ver [10], pág. 35. Segue do item (i) do teorema (1.1) que toda álgebra de divisão tem dimensão 1, 2, 4 ou 8, conseqüentemente, o domínio das trialidades serão formados por tais álgebras também.

Vejamos exemplos de trialidades nestas dimensões:

$$\begin{aligned}
t_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & t_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3, \\
t_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}, & t_2(w_1, w_2, w_3) &= \operatorname{Re}(w_1w_2w_3), \\
t_4 : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R}, & t_4(q_1, q_2, q_3) &= \operatorname{Re}(q_1q_2q_3), \\
t_8 : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \times \mathbb{O} &\longrightarrow \mathbb{R}, & t_8(o_1, o_2, o_3) &= \operatorname{Re}(o_1(o_2o_3)) = \operatorname{Re}((o_1o_2)o_3).
\end{aligned}$$

De fato,

1. t_1 é uma trialidade.

Dados λ um escalar não nulo e $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ então

$$t_1(\lambda x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1)x_2x_3 = \lambda t_1(x_1, x_2, x_3)$$

analogamente, $t_1(x_1, \lambda x_2, x_3) = t_1(x_1, x_2, \lambda x_3) = \lambda t_1(x_1, x_2, x_3)$, e

$$t_1(x_1, x_2, x_3 + x_4) = x_1x_2(x_3 + x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 = t_1(x_1, x_2, x_3) + t_1(x_1, x_2, x_4),$$

do mesmo modo temos $t_1(x_1 + x_4, x_2, x_3) = t_1(x_1, x_2, x_3) + t_1(x_4, x_2, x_3)$ e $t_1(x_1, x_2 + x_4, x_3) = t_1(x_1, x_2, x_3) + t_1(x_1, x_4, x_3)$. Agora fixados x_1 e x_2 não nulos, temos que $x_1x_2x_3 \neq 0$ para qualquer $x_3 \in \mathbb{R}$ não nulo, de modo análogo se fixados x_1, x_3 ou x_2, x_3 teremos que existirá um terceiro elemento de \mathbb{R} não nulo no qual t_1 será não nulo, logo t_1 é não-degenerada.

2. t_2 é uma trialidade.

Dados λ um escalar não nulo e $w_1 = x_0 + x_1i$, $w_2 = y_0 + y_1i$ e $w_3 = z_0 + z_1i$ em \mathbb{C} , logo

$$t_2(\lambda w_1, w_2, w_3) = \operatorname{Re}((\lambda w_1)w_2w_3) = \lambda x_0(y_0z_0 - y_1z_1) - \lambda x_1(y_0z_1 + y_1z_0) = \lambda t_2(w_1, w_2, w_3),$$

de modo equivalente temos $t_2(w_1, \lambda w_2, w_3) = t_2(w_1, w_2, \lambda w_3) = \lambda t_2(w_1, w_2, w_3)$. Seja $w_4 = p_0 + p_1i$ não nulo então

$$\begin{aligned}
t_2(w_1, w_2, w_3 + w_4) &= x_0(y_0(z_0 + p_0) - y_1(z_1 + p_1)) - x_1(y_0(z_1 + p_1) + y_1(z_0 + p_0)) \\
&= x_0(y_0z_0 - y_1z_1) - x_1(y_0z_1 + y_1z_0) + x_0(y_0p_0 - y_1p_1) - x_1(y_0p_1 + y_1p_0) \\
&= t_2(w_1, w_2, w_3) + t_2(w_1, w_2, w_4)
\end{aligned}$$

semelhantemente, $t_2(w_1, w_2 + w_4, w_3) = t_2(w_1, w_2, w_3) + t_2(w_1, w_4, w_3)$ e $t_2(w_1 + w_4, w_2, w_3) = t_2(w_1, w_2, w_3) + t_2(w_4, w_2, w_3)$. Fixando w_1 e w_2 não nulos, então $x_0, y_0 \neq 0$, tome

$w_3 \neq 0$ então $z_0 \neq 0$ o que implica $x_0 y_0 z_0 \neq 0$, ou seja, $t_2(w_1, w_2, w_3) \neq 0$. Portanto, t_2 é não-degenerada.

3. t_4 é uma trialidade.

Sejam λ um escalar não nulo e $q_1 = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$, $q_2 = y_0 + y_1i + y_2j + y_3k$, $q_3 = z_0 + z_1i + z_2j + z_3k$ e $q_4 = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ quatérnios. Logo

$$\begin{aligned}
t_4(\lambda q_1, q_2, q_3) &= Re(\lambda(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k)[(y_0 + y_1i + y_2j + y_3k)(z_0 + z_1i + z_2j + z_3k)]) \\
&= (y_0z_0 - y_1z_1 - y_2z_2 - y_3z_3)\lambda x_0 + (y_3z_2 - y_0z_1 - y_1z_0 - y_2z_3)\lambda x_1 \\
&\quad + (y_1z_3 - y_0z_2 - y_2z_0 - y_3z_1)\lambda x_2 + (y_2z_1 - y_0z_3 - y_1z_2 - y_3z_0)\lambda x_3 \\
&= \lambda \left(\begin{array}{l} (y_0z_0 - y_1z_1 - y_2z_2 - y_3z_3)x_0 + (y_3z_2 - y_0z_1 - y_1z_0 - y_2z_3)x_1 \\ + (y_1z_3 - y_0z_2 - y_2z_0 - y_3z_1)x_2 + (y_2z_1 - y_0z_3 - y_1z_2 - y_3z_0)x_3 \end{array} \right) \\
&= \lambda t_4(q_1, q_2, q_3),
\end{aligned}$$

analogamente é possível mostrar que $t_4(q_1, \lambda q_2, q_3) = t_4(q_1, q_2, \lambda q_3) = \lambda t_4(q_1, q_2, q_3)$.

$$\begin{aligned}
t_4(q_1, q_2, q_3 + q_4) &= (y_0(z_0 + p_0) - y_1(z_1 + p_1) - y_2(z_2 + p_2) - y_3(z_3 + p_3))x_0 \\
&\quad + (y_3(z_2 + p_2) - y_0(z_1 + p_1) - y_1(z_0 + p_0) - y_2(z_3 + p_3))x_1 \\
&\quad + (y_1(z_3 + p_3) - y_0(z_2 + p_2) - y_2(z_0 + p_0) - y_3(z_1 + p_1))x_2 \\
&\quad + (y_2(z_1 + p_1) - y_0(z_3 + p_3) - y_1(z_2 + p_2) - y_3(z_0 + p_0))x_3 \\
&= (y_0z_0 - y_1z_1 - y_2z_2 - y_3z_3)x_0 + (y_3z_2 - y_0z_1 - y_1z_0 - y_2z_3)x_1 \\
&\quad + (y_1z_3 - y_0z_2 - y_2z_0 - y_3z_1)x_2 + (y_2z_1 - y_0z_3 - y_1z_2 - y_3z_0)x_3 \\
&\quad + (y_0p_0 - y_1p_1 - y_2p_2 - y_3p_3)x_0 + (y_3p_2 - y_0p_1 - y_1p_0 - y_2p_3)x_1 \\
&\quad + (y_1p_3 - y_0p_2 - y_2p_0 - y_3p_1)x_2 + (y_2p_1 - y_0p_3 - y_1p_2 - y_3p_0)x_3 \\
&= t_4(q_1, q_2, q_3) + t_4(q_1, q_2, q_4)
\end{aligned}$$

do mesmo modo mostra-se que $t_4(q_1, q_2 + q_4, q_3) = t_4(q_1, q_2, q_3) + t_4(q_1, q_2, q_4)$ e $t_4(q_1 + q_4, q_2, q_3) = t_4(q_1, q_2, q_3) + t_4(q_4, q_2, q_3)$.

Utilizando a definição do produto de números reais, complexos e quatérnios podemos reescrever t_2 , t_4 e t_8 para obter as seguintes formas harmônicas cúbicas em 6, 12 e 24

variáveis, respectivamente, listadas a baixo

$$\begin{aligned}
P_6 &= x_0(y_0z_0 - y_1z_1) - x_1(y_0z_1 + y_1z_0) \\
P_{12} &= (y_0z_0 - y_1z_1 - y_2z_2 - y_3z_3)x_0 + (y_3z_2 - y_0z_1 - y_1z_0 - y_2z_3)x_1 \\
&\quad + (y_1z_3 - y_0z_2 - y_2z_0 - y_3z_1)x_2 + (y_2z_1 - y_0z_3 - y_1z_2 - y_3z_0)x_3 \\
P_{24} &= (z_0y_0 - z_1y_1 - z_2y_2 - z_3y_3 - z_4y_4 - z_5y_5 - z_6y_6 - z_7y_7)x_0 \\
&\quad + (-z_1y_0 - z_0y_1 - z_4y_2 - z_7y_3 + z_2y_4 - z_6y_5 + z_5y_6 + z_3y_7)x_1 \\
&\quad + (-z_2y_0 + z_4y_1 - z_0y_2 - z_5y_3 - z_1y_4 + z_3y_5 - z_7y_6 + z_6y_7)x_2 \\
&\quad + (-z_3y_0 + z_7y_1 + z_5y_2 - z_0y_3 - z_6y_4 - z_2y_5 + z_4y_6 - z_1y_7)x_3 \\
&\quad + (-z_4y_0 - z_2y_1 + z_1y_2 + z_6y_3 - z_0y_4 - z_7y_5 - z_3y_6 + z_5y_7)x_4 \\
&\quad + (-z_5y_0 + z_6y_1 - z_3y_2 + z_2y_3 + z_7y_4 - z_0y_5 - z_1y_6 - z_4y_7)x_5 \\
&\quad + (-z_6y_0 - z_5y_1 + z_7y_2 - z_4y_3 + z_3y_4 + z_1y_5 - z_0y_6 - z_2y_7)x_6 \\
&\quad + (-z_7y_0 - z_3y_1 - z_6y_2 + z_1y_3 - z_5y_4 + z_4y_5 + z_2y_6 - z_0y_7)x_7.
\end{aligned}$$

Esses polinômios cúbicos servirão para construir soluções não clássicas para equações elípticas. Neste trabalho vamos mostrar a construção feita com o polinômio P_{12} .

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS TOTALMENTE NÃO LINEARES DE 2^a ORDEM

Uma *Equação diferencial* é uma equação cujas incógnitas são uma função e suas derivadas. Tais Equações diferenciais são de início classificadas em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Equações Diferenciais Parciais (EDP), esta última, mais especificamente uma classe delas, constitui o objeto de estudo deste trabalho. A maioria das equações diferenciais parciais surgem de modelos físicos e de problemas em geometria diferencial, logo esses já nos garantem bons motivos para estudá-las. Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos e exemplos de EDP'S essenciais para as aplicações abordadas adiante. Para um estudo a introdução de Equações Diferenciais Parciais, sugerimos ver [28].

Uma EDP é uma equação cuja incógnita é uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $n \geq 2$, Ω um aberto limitado e suas derivadas parciais. Denotando por $D^k u(x)$ a k -ésima derivada da função u no ponto x , podemos definir de modo mais formal uma EDP como segue.

Definição 2.1. *Uma EDP é uma expressão da forma*

$$F(D^k u(x), \dots, D^2 u(x), Du(x), u(x), x) = 0 \quad (2.1)$$

onde, $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dada e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é a incógnita. Neste caso dizemos que a EDP é de ordem k (a ordem da maior derivada de u em F).

Logo, uma EDP é dita de segunda ordem quando a maior derivada da função u que consta na expressão é igual a 2.

As Equações Diferenciais Parciais também podem ser classificadas com relação a linearidade (Lineares, Semi Lineares, Quasi Lineares e Totalmente Não Lineares) e com relação ao tipo (elíptica, parabólica ou hiperbólica). Neste trabalho abordaremos as EDP's Elípticas Totalmente Não Lineares de segunda ordem, cuja definição será apresentada mais adiante e segundo a definição de Bernstein [29], as demais definições e classificações podem ser consultadas no apêndice (D). Para um estudo mais aprofundado sobre EDP's Elípticas sugerimos o livro [16].

Segundo a literatura [29], o matemático Bernstein foi o primeiro a introduzir métodos gerais de resolução de equações elípticas não-lineares no ano de 1910, apresentando o método de continuidade e o método de estimativas a priori. Ele mostrou que considerando equações com duas variáveis independentes para comprovar a solubilidade de tais equações é necessário apenas estabelecer estimativas a priori para valores absolutos das duas primeiras derivadas das soluções. Bernstein considera equações do tipo $F(D^2u, Du, u, x) = 0$ para $x \in \Omega$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e considera que esta é elíptica se a matriz $[F_{u_{ij}}]$ é definida positiva, assim, quando o operador é linear com relação as derivadas de segunda ordem esta definição se dá de forma natural, porém o mesmo não acontece quando a EDP é não linear.

Antes de 1981 o trabalho de provar a existência de soluções de equações do tipo $F(D^2u, Du, u, x) = 0$ pelos métodos conhecidos até então não era tarefa fácil. Era baseado em encontrar estimativas a priori para soluções e suas derivadas até a terceira ordem, a maior parte do trabalho é feita diferenciando a equação três vezes e em certas manipulações que foram investigadas e organizadas por Calabi em [6].

A abordagem de equações totalmente não-lineares mudou drasticamente após o ano de 1981, após Safonov publicar os trabalhos [24] e [19] e Evans [15], tomando como base apenas as estimativas de Aleksandrov [2]. A partir disso, a teoria geral de equações elípticas totalmente não-lineares foi iniciada.

A partir de agora nossa foco serão as EDP's Elípticas totalmente não lineares de 2ª ordem.

Definição 2.2. *Seja $\Gamma = Sym_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$, onde $Sym_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto das*

matrizes com entradas reais e simétricas de ordem n . Um operador diferencial parcial de segunda ordem F sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$F[u] = F(D^2u, Du, u, \cdot) \quad (2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} F : \quad \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, p, z, x) &\longmapsto F(r, p, z, x) \end{aligned}$$

e $Du = (u_i)$ e $D^2u = [u_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, denotam o gradiente e a hessiana da função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Desde que não haja confusão, usaremos a mesma letra F para operador e função.

O exemplo mais antigo e mais famoso de Equação Diferencial Parcial de segunda ordem é a equação de Monge-Ampère em duas variáveis, que apresentamos a seguir.

Exemplo 2.1. (Equação de Monge-Ampère) Consideremos $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e a equação de Monge-Ampère em duas variáveis dada por

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = \phi,$$

onde ϕ é uma função dada, definida em \mathbb{R}^2 . Podemos reescrever a equação sob a forma $\det(D^2u) = \phi$. Logo, o operador associado será dado por $F[u] = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2$. Seja $A \in \text{Sym}_2(\mathbb{R})$, assim $a_{12} = a_{21}$, logo $F[A] = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$, e $\frac{\partial F}{\partial a_{11}} = a_{22}$, $\frac{\partial F}{\partial a_{12}} = -2a_{12}$, $\frac{\partial F}{\partial a_{22}} = a_{11}$. Portanto,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} \right] = \begin{pmatrix} a_{22} & -2a_{12} \\ -2a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

onde denotaremos por $\left[\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} \right]$ a matriz da derivada parcial do operador F com relação a u .

Definição 2.3. (EDP Totalmente Não Linear de 2ª Ordem) Dizemos que uma EDP de segunda ordem $F[u] = F(D^2u, Du, u, \cdot)$ é Totalmente Não Linear quando é não linear na entrada da derivada de ordem 2, ou seja, na primeira entrada de F . Neste caso o operador definido em (2.2) também é dito Totalmente Não Linear de 2ª Ordem.

Definição 2.4. Dizemos que F definida em (2.6) é uniformemente elíptica se existir uma constante $\theta \geq 1$ (chamada constante de elipticidade) tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\theta^{-1}\|\xi\|^2 \leq \sum F_{u_{ij}}\xi_i\xi_j \leq \theta\|\xi\|^2. \quad (2.3)$$

Voltemos ao exemplo da equação de Monge-Ampère.

Exemplo 2.2. Considerando a equação de *Monge-Ampère n-dimensional* da forma

$$\det D^2 u = \phi$$

onde ϕ é uma função dada em \mathbb{R}^n , o operador é dado por $F[u] := \det D^2 u$, logo temos $F_r(D^2 u) = [U^{ij}]$ a matriz cofator de $D^2 u = [u_{ij}]$, de modo que F é elíptico (elíptico degenerado) em relação a u se e somente se $D^2 u > 0$, (≥ 0), em Ω , isto é u é localmente uniformemente convexo, (localmente convexo). Conseqüentemente, se a equação de Monge-Ampère $\det D^2 u = \phi$ é elíptica, (elíptico degenerado), o termo não homogêneo deve ser positivo, (não negativo).

Exemplo 2.3. A equação geral de Monge-Ampère é dada por

$$\det D^2 u = \phi(\cdot, u, Du)$$

onde ϕ é uma função dada em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. O exemplo mais importante desta equação, onde ϕ depende de Du , se dá na geometria e é a equação de curvatura de Gauss prescrita como

$$\det D^2 u = K(\cdot, u)(1 + |Du|^2)^{(n+2)/2}.$$

Vejamos mais um exemplo importante neste contexto.

Exemplo 2.4. Equações do tipo

$$F[u] := f(\lambda(D^2 u)) = \phi(\cdot, u, Du)$$

onde f é uma dada função simétrica de n variáveis e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ denota os autovalores da matriz Hessiana $D^2 u$, são chamadas **Equações Hessianas**, a equação de Monge-Ampère é um caso particular desta. Exemplos clássicos de funções f são as funções simétricas elementares,

$$S_k(\lambda) = \sum_{\lambda_1 < \dots < \lambda_k} \lambda_1 \cdots \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

e seus quocientes

$$S_{k,l}(\lambda) = \frac{S_k(\lambda)}{S_l(\lambda)} \quad 1 \leq l < k \leq n$$

restrito ao conjunto de positividade do denominador, S_l . O caso $k = 1$ é a conhecida equação de Poisson que tem aplicações físicas em eletrostática, eletromagnetismo e termodinâmica.

2.1 O Problema de Dirichlet

No início do capítulo vimos alguns problemas envolvendo equações elípticas não-lineares. Existem muitos problemas envolvendo tais equações, para mais exemplos ver [23]. Neste trabalho estudaremos o problema de Dirichlet a seguir.

$$\begin{cases} F(D^2u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio aberto com borda $\partial\Omega$ suave e ϕ é uma função contínua em $\partial\Omega$.

Definição 2.5. *Uma função u é dita solução clássica do problema (2.4) se é de classe $C^2(\Omega)$ e satisfaz (2.4).*

A primeira questão a ser investigada é sobre a existência de solução clássica para o problema de Dirichlet (2.4). No fator histórico temos que o primeiro a apresentar um estudo sistematizado sobre, foi o matemático Bernstein no século 20, porém foi no ano de 1953 que Nirenberg publicou um artigo de título *On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity*, mostrando o primeiro resultado completo provando a existência de uma solução clássica para o problema em dimensão 2. O problema continuou em aberto para dimensão a partir de 3.

Vários autores tem mostrado resultados para casos particulares. Por exemplo, D. Gilbarg e N. Trudinger provaram em [5] (ver teorema 17.17, pág. 464) que, sob certas hipóteses, o problema (2.4) não tem mais do que uma solução clássica.

Também veremos mais adiante que assumindo $\partial F/\partial u \leq 0$ o problema (2.4) não tem mais do que uma solução clássica e, assim, como no resultado de D. Gilbarg e N. Trudinger, percebe-se que as soluções clássicas verificam a condição fundamental de unicidade.

Diante da dificuldade de encontrar soluções clássicas, buscou-se definir uma classe de soluções generalizadas (fracas) para o problema (2.4) quando $\frac{\partial F}{\partial u} \geq 0$ de tal maneira que a unicidade e a existência de soluções possam ser verificadas nesta classe, muitos trabalhos foram realizados neste sentido, por exemplo, o trabalho de H. Ishii e P. L. Lions em [9].

Em alguns casos não é possível encontrar facilmente a solução fraca, então busca-se soluções que aproximem a solução fraca, chamadas solução de viscosidade.

Isso é possível para equações elípticas não-lineares, que constitui um grande avanço na teoria de equações diferenciais parciais, resultando na teoria das soluções de viscosidade descrita na seção (2.2). Segue da definição que essas soluções são apenas funções contínuas, e isso leva ao problema da regularidade, ou seja, o que pode ser dito sobre as propriedades de diferenciabilidade e continuidade dessas soluções generalizadas? Esta última pergunta está muito longe de ter uma resposta satisfatória, exceto para algumas classes específicas de equações elípticas não-lineares. No entanto, utilizando alguns métodos fundamentais como o método de continuidade, limites a priori e princípios do máximo é possível mostrar que existem certas classes de Equações elípticas não-lineares com propriedades de regularidade avançadas, às vezes fornecendo soluções clássicas.

No artigo [21] os matemáticos Nikolai Nadirashvili and Serge Vladut mostram que tomando $\Omega \subset \mathbb{R}^{12}$ uma bola de raio unitário e ϕ como sendo a função que eles montam através das trialidades e propriedades do quatérnios, existe uma F suave uniformemente elíptica tal que o problema de Dirichlet (2.4) tem solução não clássica.

Nas próximas seções apresentaremos da forma sucinta alguns conceitos e resultados com relação ao problema de uma equação diferencial parcial de segunda ordem uniformemente elíptica da forma $F(D^2u) = 0$ com F suave.

2.2 Solução de Viscosidade

Os matemáticos Crandall e Lions no artigo [18] de título "User's Guide to Viscosity Solutions of Second Oder Partial Differential Equations", e Evans no livro [16], estenderam a noção da solução clássica da equação (2.6) com o objetivo de obter solução clássica para o problema de Dirichlet. Para tanto desenvolveram o conceito de solução de viscosidade (fraca) de equações elípticas totalmente não-lineares que trataremos a seguir.

A teoria das soluções de viscosidade permite que funções meramente contínuas (não diferenciável) sejam soluções de equações totalmente não-lineares de segunda ordem, ela também fornece teoremas de existência e unicidade muito gerais e que produz formulações precisas de condições gerais de contorno.

A seguir apresentamos uma definição de operador elíptico degenerado.

Definição 2.6. Dizemos que F é elíptica degenerada se a seguinte condição é satisfeita:

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, r, p, Y) \text{ sempre que } X \geq Y$$

onde $X \geq Y$ significa que $X - Y$ é uma matriz não-negativa definida. F é chamada própria se é elíptica degenerada e satisfaz a condição de monotonicidade na variável r , isto é, $F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y)$, em que $r \leq s$ e $X \geq Y$.

Assumindo que as equações na proposição a seguir sejam próprias, a menos que especificadas de outra forma. A seguinte proposição que é uma variante do princípio máximo clássico, serve para motivar a definição de soluções de viscosidade.

Proposição 2.1. *Seja u uma solução clássica da equação (2.6) e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Se $u - \phi$ tem um máximo local no ponto $x_0 \in \Omega$ então*

$$F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0.$$

Analogamente, se $u - \phi$ tem mínimo local no ponto $y_0 \in \Omega$ então

$$F(y_0, u(y_0), D\phi(y_0), D^2\phi(y_0)) \geq 0.$$

Demonstração. Se $u - \phi$ tem um máximo local em x_0 , então $Du(x_0) = D\phi(x_0)$ e $D^2u(x_0) - D^2\phi(x_0) \leq 0$, ou seja $D^2u(x_0) \leq D^2\phi(x_0)$. Desde que F é elíptica degenerada segue que $F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0))$, como u é solução de F então $F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) = 0$, logo, $F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0$. Analogamente verifica-se para y_0 ponto de mínimo. \square

Definição 2.7. (*Função semicontínua superior*) *Seja (X, d) um espaço métrico, $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ e $x_0 \in X$. Então f é semicontínua superior em x_0 se e somente se $f(x_0) = \infty$ ou para todo $c \in \mathbb{R}$ com $c < f(x_0)$ existe uma vizinhança U de x_0 tal que para todo $y \in U$ tem-se $c < f(y)$.*

Definição 2.8. (*Função semicontínua inferior*) *Seja (X, d) um espaço métrico, $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ e $x_0 \in X$. Então f é semicontínua inferior em x_0 se e somente se $f(x_0) = -\infty$ ou para todo $c \in \mathbb{R}$ com $c > f(x_0)$ existe uma vizinhança U de x_0 tal que para todo $y \in U$ tem-se $c > f(y)$.*

Definição 2.9. Uma função semicontínua superior $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma subsolução de viscosidade se $F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0$ sempre que x_0 é máximo local de $u - \phi$ para uma função suave $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Respectivamente, uma função semicontínua inferior $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma super-solução de viscosidade se $F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0$ sempre que x_0 é mínimo local de $u - \phi$ para uma função suave $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Uma função contínua u que é tanto sub e super-solução de viscosidade é chamada uma solução de viscosidade.

Princípio do máximo para soluções clássicas de equações totalmente não lineares: Sejam F um operador elíptico, $u \in C^2(\Omega)$ uma subsolução no domínio Ω e $v \in C^2(\Omega)$ uma supersolução em Ω . Então, $u - v$ atinge supremo na borda de Ω .

A ideia principal das soluções de viscosidade é estender as noções de sub e supersoluções para um grande conjunto de funções não-suaves, preservando o princípio máximo.

É importante citar que o conceito de solução de viscosidade é local. Porém, se u é subsolução de viscosidade em Ω então é subsolução também em Ω' onde $\Omega' \subset \Omega$. Na definição de solução de viscosidade podemos trocar o máximo local pelo máximo global ou também pelo máximo estrito local ou global. E as funções C^2 podem ser substituídas por funções suaves. Assim como podemos assumir que o máximo local é zero. Estas observações também se aplicam para as super-soluções.

A função ϕ usada na definição de soluções de viscosidade é chamada de função teste.

O resultado a seguir será enunciado para uma subsolução, porém um resultado análogo é válido para supersolução.

Proposição 2.2. Seja $F(D^2u) = f(x)$, onde u e f são funções definidas em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes.

i) u é uma subsolução de viscosidade de $F(D^2u) = f(x)$ em Ω .

ii) Se $x_0 \in \Omega$, B uma vizinhança aberta de x_0 , $\phi \in C^2(B)$,

$$u \leq \phi \text{ em } B \quad e \quad u(x_0) = \phi(x_0), \quad (2.5)$$

então $F(D^2\phi(x_0)) \geq f(x_0)$.

Demonstração. Ver [14], pág. 13. □

2.3 Operadores Elípticos Lineares na Forma Não Divergente

Nesta seção o objetivo é estabelecer uma relação entre o operador elíptico não linear apresentado no início do capítulo e o operador linear.

Seja

$$F(D^2u) = 0 \tag{2.6}$$

uma equação elíptica totalmente não linear num domínio $G \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$, uma solução de (2.6) e v uma derivada parcial de u , logo $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Então v é uma solução de uma equação linear elíptica na forma não-divergente:

$$Lu = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{2.7}$$

Em geral não temos nenhuma informação a priori sobre os coeficientes $a_{ij}(x)$, exceto a sua elipticidade pontual para um operador estritamente elíptico F , isto é,

$$0 < \sum a_{ij}(x) \xi_i \xi_j < C \|\xi\|^2,$$

ou no caso onde F é um operador uniformemente elíptico, ou seja, os coeficientes a_{ij} satisfazem a desigualdade (2.3) da definição (2.4).

Além do princípio máximo (fraco) para a equação (2.7), existem duas estimativas muito importantes para as equações uniformemente elípticas da forma

$$Lu = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = f. \tag{2.8}$$

O primeiro resultado é o princípio do máximo de Alexandrov-Bakelman-Pucci (ABP) que será enunciado no teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Seja v uma solução da equação uniformemente elíptica da forma (2.8) definida em uma bola unitária $B \subset \mathbb{R}^n$. Assumindo que $f \in L_n(B)$. Então*

$$\sup_B \|v\| \leq C_0 \|v\|_{L_n(B)} + \sup_{\partial B} \|v\|,$$

onde C_0 depende somente da constante de elipticidade.

Pode-se considerar o princípio máximo como uma estimativa C^0 a priori para soluções de (2.7). Para equações uniformemente elípticas, o resultado a seguir é devido a Krylov e Safonov, onde foi possível melhorar esta estimativa até C^ϵ -norma para $\epsilon \in]0, 1[$, em subdomínios de Ω .

Teorema 2.2. *Seja v uma solução da equação uniformemente elíptica da forma (2.8) definida em uma bola unitária $B \subset \mathbb{R}^n$. Assumindo que $f \in L_n(B)$. Então*

$$\|v\|_{C^\epsilon(B_{1/2})} \leq C_0 \|v\|_{L_n(B)} + \sup_{\partial B} \|v\|,$$

onde as constantes positivas $\epsilon \in]0, 1[$ e C_0 dependem somente da constante de elipticidade C .

Mais tarde foi mostrado por Safonov que em geral não se pode esperar uma regularidade melhor que C^ϵ .

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e L o operador linear uniformemente elíptico (2.7) definido em Ω com constante de elipticidade C . Considere o problema de Dirichlet em Ω :

$$\begin{cases} Lv = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

Uma solução de viscosidade para este problema de Dirichlet é dado pela definição a seguir.

Definição 2.10. *Uma função v é uma solução de viscosidade para o problema (2.9) se $v = \lim v_k$, onde*

$$Lv_k = \sum a_{ij}^k(x) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

a_{ij}^k são contínuas e $a_{ij}^k \rightarrow a_{ij}$ em $L_1(\Omega)$.

Além da regularidade a priori de Hölder para soluções da equação homogênea (2.7) a desigualdade de Harnack se mantém.

Teorema 2.3. *Seja v uma solução positiva da equação uniformemente elíptica (2.7) definida em uma bola unitária $B \subset \mathbb{R}^n$. Então*

$$\sup_{B_{1/2}} v < C_0 \inf_{B_{1/2}} v,$$

onde a constante positiva C_0 depende somente da constante de elipticidade.

Embora a definição (2.10) implique a existência da solução de viscosidade para o problema de Dirichlet (2.9), a questão principal sobre a unicidade da solução de viscosidade permanece em aberto. Para um operador geral uniformemente elíptico (2.7), foi mostrado em [20] que as soluções de viscosidade para o problema de Dirichlet (2.9) não são únicas. No entanto, alguns resultados de unicidades são obtidos fazendo certas restrições sobre os coeficientes do operador L .

Existe uma conexão importante entre soluções de viscosidade para as equações totalmente não lineares elípticas $F(D^2u) = 0$ e as soluções de viscosidade definidas para o operador linear L . Tal ligação é dada no teorema a baixo, cujas demonstrações podem ser encontradas em [22], pág. 15.

Teorema 2.4. *Sejam u_1 e u_2 soluções de viscosidades de uma equação totalmente não linear uniformemente elíptica $F(D^2u) = 0$ definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então $v = u_1 - u_2$ é uma solução de viscosidade para uma equação uniformemente elíptica (2.7) com coeficiente mensuráveis $a_{ij}(x)$ satisfazendo a desigualdade (2.3).*

Corolário 2.1. *Seja u uma solução de viscosidade da equação totalmente não-linear*

$$F(D^2u) = 0.$$

Então qualquer derivada parcial $v = u_{x_k}$ é uma solução de uma equação uniformemente elíptica (2.7), com os coeficientes a_{ij} definidos por

$$a_{ij} = F_{u_{ij}} := \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}. \quad (2.10)$$

Corolário 2.2. *Seja u uma solução de viscosidade da equação totalmente não linear da forma $F(D^2u) = 0$. Então a função u tem em quase todo ponto uma aproximação da diferencial de terceira ordem, isto é, para quase todo ponto $y \in \Omega$ existe um polinômio de terceira ordem $p_y(x)$ tal que $u(x) - p_y(x) = o(|x - y|^3)$.*

2.4 Equações Não Lineares com Soluções Suaves

Para dimensões maiores ou iguais a 3 a suavidade das soluções de viscosidade é conhecida apenas para os alguns casos, onde as equações são definidas como uma função convexa (ou côncava) F definida no espaço de matrizes simétricas ou para F muito perto dessa condição,

estes resultados são devido aos estudos de Evans e Krylov, e para o caso convexo a Caffarelli-Cabre. Algumas generalizações são graças aos matemáticos Caffarelli-Yuan.

Teorema 2.5. *Seja $F(D^2u, Du, u, x)$ um operador uniformemente elíptico tal que $F_u < 0$ (negativa definida, ver definição (A.5)), F é uma função convexa nas variáveis de D^2u e F é Hölder na variável x . Considere o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} F(D^2u, Du, u, x) = 0 & \text{em } \Omega; \\ u = \phi & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio aberto com borda $\partial\Omega$ suave e ϕ é uma função contínua em $\partial\Omega$. Então o problema de Dirichlet tem uma única solução clássica.

Demonstração. Ver [22], pág. 16. □

Teorema 2.6. *Seja $F(A, x) = F = \max\{\min\{L_1, L_2\}, L_3\}$ onde L_1, L_2, L_3 são operadores lineares uniformemente elípticos. Então o problema de Dirichlet (2.11) sempre tem solução clássica.*

Corolário 2.3. *Seja $F(A, x) = F = \min\{F_1, F_2\}$ uniformemente elíptica, o funcional F_1 é convexo e F_2 é côncavo. Então o problema de Dirichlet (2.11) sempre tem solução clássica.*

Em dimensão 2, Nirenberg provou um resultado muito importante dado no teorema a seguir.

Teorema 2.7. *O problema de Dirichlet (2.11) tal que F é uniformemente elíptica e $F_u \leq 0$ em um domínio bidimensional sempre tem solução clássica.*

Em um domínio bidimensional convexo limitado, não é possível afirmar que o problema de Dirichlet sempre tem uma solução clássica para uma equação estritamente elíptica da forma $F(D^2u, Du, u, x) = 0$.

O teorema de Nirenberg tem um tipo de extensão para problemas Dirichlet axialmente simétricos para equações Hessianas totalmente não-lineares em \mathbb{R}^3 . conforme veremos a seguir.

Teorema 2.8. *Seja $n = 3$ e $F = F(X) \in C^1$ um operador uniformemente elíptico que depende somente dos autovalores da Hessiana de u . Seja $\phi \in C^{1,\epsilon}(\partial\Omega)$ uma função axialmente simétrica, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, onde ϵ_0 depende somente da constante de elipticidade da f . Então o problema de Dirichlet (2.11) tem apenas uma solução clássica $u \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\epsilon}(\bar{\Omega})$.*

Denotando por D_r o subconjunto de \mathbb{R}^2 que representa um disco de raio r .

Lema 2.1. *Seja $u \in C^2(D_1)$ uma solução para a equação elíptica totalmente não linear $F(D^2u) = 0$, em D_1 e $F(0) = 0$. Seja q um polinômio quadrático em D_1 tal que $|q - u| < M$. Então para qualquer $\epsilon > 0$ existem $\alpha, \rho > 0$ dependendo somente de ϵ e da constante de elipticidade de F de modo que*

$$\|u - q\|_{C^{2,\alpha}(D_\rho)} < \epsilon M. \quad (2.12)$$

Pode-se esperar que, em $n = 3$ dimensões, as soluções de viscosidade de equações uniformemente elípticas sejam sempre clássicas, mas isso não está claro. Porém, segundo os autores Nikolai Nadirashvili and Serge Vladut em [22] existe a seguinte conjectura: Seja $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ uma solução de viscosidade de uma equação hessiana uniformemente elíptica $F(D^2u, Du, u, x)$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ então $u \in C^2(\Omega)$.

SOLUÇÕES NÃO CLÁSSICAS VIA TRIALIDADES

Este capítulo é destinado ao estudo da existência de solução não clássica (solução de viscosidade) de uma Equação Diferencial Parcial Elíptica totalmente não linear de segunda ordem em dimensão 12, apresentado por N. Nadirashvili e S. Vladut no artigo [21].

Sejam P_j com $j = 3, 6, 12, 24$, os polinômios cúbicos definidos na seção 1.5 do capítulo 1, e tomemos as seguintes funções

$$\omega_{j,\delta}(x) = \frac{P_j(x)}{\|x\|^\delta} \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^j$ e $\delta \in [1, 2[$. N. Nadirashvili e S. Vladut nas seções 4.2 e 4.3 em [22] provam que $\omega_{12,1}$ e $\omega_{24,1}$ são soluções de uma equação uniformemente elíptica totalmente não-linear. Os autores afirmam que para $j = 3$ a função $\omega_{3,\delta}$ não é uma solução de uma equação elíptica e que no caso $j = 6$ pode-se mostrar que $\omega_{6,1}$ é uma solução de uma equação elíptica estrita, mas não uniforme, e acrescentam que tal resultado não é muito interessante, neste trabalho não iremos fazer mais comentários sobre a função $\omega_{6,1}$.

O nosso objetivo é mostrar que a função

$$\omega_{12} = \frac{Re(q_1 \cdot q_2 \cdot q_3)}{\|x\|} \quad (3.2)$$

onde $q_i \in \mathbb{H}$, $i = 1, 2, 3$, e $x = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}^3 = \mathbb{R}^{12}$, é uma solução em \mathbb{R}^{12} para uma equação uniformemente elíptica

$$F(D^2\omega) = 0, \quad (3.3)$$

com F suave.

Os autores citam ω_{12} como um (primeiro) exemplo de uma solução de viscosidade não clássica.

Nas seções a seguir apresentaremos a expressão explícita para ω_{12} nas coordenadas de \mathbb{R}^{12} , assumindo a construção feita por N. Nadirashvili e S. Vladut do operador elíptico F tomando sua constante de elipticidade $\theta < 10^8$ (para mais detalhes sobre a construção do operador e da constante de elipticidade, ver [21]).

3.1 O Problema da Hessiana e O Critério de Elipticidade.

Apresentaremos o problema da Hessiana que nos dará os critérios que a função deve satisfazer para ser solução de viscosidade de uma EDP uniformemente elíptica, e também deixaremos enunciado o critério de elipticidade que será usado para o estudo.

Definição 3.1. *Definimos a $(n - 1)$ -esfera no \mathbb{R}^n de centro c e raio $r > 0$ como sendo o conjunto $S_r^{n-1}(c) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, c) = r\}$. Denotaremos por S^{n-1} a esfera de raio 1.*

Seja ω uma função homogênea de ordem 2, definida em \mathbb{R}^n e suave em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então a hessiana de ω é homogênea de ordem 0 e define uma função

$$\begin{aligned} H : S^{n-1} &\longrightarrow Q(\mathbb{R}^n) \\ a &\longmapsto H(a) := D^2\omega(a) \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $Q(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço das formas quadráticas em \mathbb{R}^n , como $Q(\mathbb{R}^n) \cong \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ (ver teorema A.1 do apêndice A), iremos identificar $Q(\mathbb{R}^n)$ com o espaço $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ e o produto interno entre $a, b \in Q(\mathbb{R}^n)$ será dado por $a.b = \text{tr}(ab)$.

Problema da Hessiana (H)

Dizemos que ω satisfaz o Problema da Hessiana ou simplesmente satisfaz o problema (H), se satisfaz as seguintes condições:

A) A função H definida em (3.4) é uma imersão suave.

B) Existe uma constante $M \geq 1$ tal que dados dois pontos $a, b \in H(S^{n-1})$ com $a \neq b$, e tomando a sequência em ordem $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ dos autovalores da forma quadrática $a - b$, então

$$\frac{1}{M} < -\frac{\mu_1}{\mu_n} < M.$$

Apresentaremos mais a seguir o lema que nos garante o critério de elipticidade que será usado no trabalho. Antes, faremos algumas construções e definições.

Definição 3.2. *Seja a uma forma quadrática, o conjunto dos autovalores de a é chamado de espectro que denotamos por $\text{Spec}(a)$.*

Para $\lambda \geq 1$ tome o cone K_λ como sendo o conjunto

$$K_\lambda = \{a \in Q(\mathbb{R}^n) : \text{existe } c > 0 \text{ tal que } \text{Spec}(a) \in [c/\lambda, \lambda c]\}. \quad (3.5)$$

Veamos que o cone K_λ é convexo. Dados $a, b \in K_\lambda$, logo existem $c_1, c_2 \geq 0$ tal que os autovalores α_i de a e os autovalores β_j de b pertencem a $[c_1/\lambda, \lambda c_1]$ e $[c_2/\lambda, \lambda c_2]$, respectivamente. Seja $t \in [0, 1]$ então

$$\begin{aligned} (1-t)\frac{c_1}{\lambda} &\leq (1-t)\alpha &\leq (1-t)\lambda c_1 \\ t\frac{c_2}{\lambda} &\leq t\beta &\leq t\lambda c_2, \end{aligned}$$

somando obtemos, $(1-t)\frac{c_1}{\lambda} + t\frac{c_2}{\lambda} \leq (1-t)\alpha + t\beta \leq (1-t)\lambda c_1 + t\lambda c_2$. Portanto, $(1-t)\alpha + t\beta$ pertence a um intervalo limitado, o que implica a existência de uma constante positiva $c \geq 0$ tal que $(1-t)a + tb \in K_\lambda$.

Seja K_λ^* o cone adjunto de K_λ , ou seja,

$$K_\lambda^* = \{b \in Q(\mathbb{R}^n) : \langle b, c \rangle \geq 0, \text{ para todo } c \in K_\lambda\}. \quad (3.6)$$

Note que $K_\lambda \subset K_\lambda^*$. O cone adjunto é convexo também, pois dados $b_1, b_2 \in K_\lambda^*$ e $t \in [0, 1]$, temos que dado $c \in K_\lambda$ então $\langle (1-t)b_1 + tb_2, c \rangle = (1-t)\langle b_1, c \rangle + t\langle b_2, c \rangle \geq 0$ e portanto, $(1-t)b_1 + tb_2 \in K_\lambda^*$.

Agora, consideremos o conjunto $L_\lambda = Q(\mathbb{R}^n) \setminus (K_\lambda^* \cup -K_\lambda^*)$ e seja $G \subset Q(\mathbb{R}^n)$, dizemos que G satisfaz a condição λ -cone se para quais quer $a, b \in G$ a matriz $a - b \in L_\lambda$.

O lema a seguir nos dá uma estimativa para o valor da constante de elipticidade.

Lema 3.1. *Seja $\Sigma \in Q(\mathbb{R}^n)$ uma variedade compacta suave $(n - 1)$ -dimensional, tal que Σ satisfaz a condição λ -cone. Então existe uma função suave $F \in Q(\mathbb{R}^n)$ onde $F(\Sigma) = 0$ e que satisfaz a inequação (2.3) com a constante de elipticidade $\theta < 4\lambda^2\sqrt{n}$.*

Demonstração. Ver [22], pág. 87. □

O lema a seguir será o critério de elipticidade usado no estudo.

Lema 3.2. *Se a função ω satisfizer as hipóteses de (H), então ω é uma solução de viscosidade em \mathbb{R}^n de uma equação uniformemente elíptica do tipo $F(D^2u) = 0$.*

Demonstração. No espaço $Q(\mathbb{R}^n)$ escolha um sistema de coordenadas z_1, z_2, \dots, z_k, s , onde $k = \frac{(n-1)n}{2} - 1$, tal que $\sqrt{n}s$ seja o traço da matriz de combinação linear do sistema de coordenadas. Seja $\pi : Q(\mathbb{R}^n) \rightarrow Z$ a projeção ortogonal de $Q(\mathbb{R}^n)$ no z_i -espaço, $i : 1, 2, \dots, k$. Considerando o cone K_λ dado em (3.5), da definição de uniformemente elíptica (2.3) segue que os autovalores de ∇F pertence ao intervalo $[\theta^{-1}, \theta]$. Em particular $\nabla F \in K_\lambda$. Logo $\nabla F \subset K_\lambda$.

Seja $L_\lambda = Q(\mathbb{R}^n) \setminus (K_\lambda^* - K_\lambda^*)$, observe que para todo $a \in L_\lambda$ temos que $a \cdot b = 0$ para cada $b \in K_\lambda$. Como as formas quadráticas de K_λ são positivas definidas, segue-se que o vetor $I \in K_\lambda^*$. Seja $K \subset Q(\mathbb{R}^n)$ um cone com uma base estritamente convexa suave de tal forma que $K_{2\lambda} \subset K \subset K_\lambda$. Tome e_1, \dots, e_k, I uma base ortonormal de $Q(\mathbb{R}^n)$ correspondente as coordenadas z_1, \dots, z_k, s . Logo, qualquer matriz $b \in Q(\mathbb{R}^n)$ pode ser escrita como

$$b = sI + \sum_{j=1}^k z_j e_j.$$

Agora definimos $x(z) := \{c : (a + cI) \in K^*\}$ para $a = \sum_{j=1}^k z_j e_j$, temos que o gráfico da função $s = x(z)$ representa a borda do cone K . Temos que $x(\cdot)$ é Lipshitz, convexa, homogênea, suave fora da origem e $x(0) = 0$. além disso $\|\nabla x\| < \sqrt{n}$.

Seja $\lambda = (n - 1)M$, onde M é a constante da condição (B) do problema da Hessiana, e tomando ξ e η como sendo os correspondentes subespaços negativos e não negativos da forma quadrática $a - b \in \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $c \in Q(\mathbb{R}^n)$ a forma quadrática dada por $c = l\|\xi\|^2 + m\|\eta\|^2$, onde $l, m > 0$, com $(a - b) \cdot c = 0$. Segue do item (B) do problema da Hessiana que $\frac{1}{(n-1)M} < \frac{l}{m} < (n - 1)M$, portanto $H(S^{n-1})$ satisfaz a condição λ -cone. Como ω satisfaz o problema da Hessiana então a função H é uma imersão suave, segue do

lema (3.1) que para $\Sigma = H(S^{n-1})$ definimos a função F dada pelo lema, então ω satisfaz a equação $F(D^2w) = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Vamos mostrar agora que ω é uma solução de viscosidade. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $p(x)$ uma forma quadrática de modo que $p \leq \omega$ em \mathbb{R}^n . Tome qualquer forma quadrática $p'(x)$ tal que $p \leq p' \leq \omega$ e exista um ponto x_0 em que $p'(x_0) = \omega(x_0)$. Dessa forma, segue que $F(p) \leq F(p') \leq F(D^2\omega)$, como ω satisfaz a equação $F(D^2u) = 0$, então temos, $F(p) \leq F(p') \leq 0$. Conseqüentemente, para qualquer forma quadrática $p(x)$, a desigualdade $p \leq \omega$ implica que $F(p) \leq 0$, segue da proposição (2.2) que ω é supersolução de viscosidade. Do mesmo modo, mostra-se que ω é subsolução de viscosidade. Provando que ω é uma solução de viscosidade para $F(D^2u) = 0$ em \mathbb{R}^n . \square

3.2 Polinômio Característico.

O objetivo desta seção é calcular o polinômio característico da hessiana de P_{12} . Tomemos o espaço vetorial \mathbb{R}^{12} e reescrevemos este como sendo o espaço vetorial V cujo os elementos são da forma (x, y, z) onde $x, y, z \in \mathbb{R}^4$. Como \mathbb{R}^4 é isomorfo ao espaço dos quatérnios, então para todo $t = (t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^4$ vamos associar ao quatérnio $q = t_0 + t_1i + t_2j + t_3k$. Usando o produto definido entre quatérnios o polinômio $P_{12}(x, y, z)$ é dado por

$$\begin{aligned} P_{12}(x, y, z) &= Re(x, y, z) \\ &= y_0z_0x_0 - y_1z_1x_0 - y_2z_2x_0 - y_3z_3x_0 + y_3z_2x_1 - y_0z_1x_1 - y_1z_0x_1 - y_2z_3x_1 \\ &\quad + y_1z_3x_2 - y_0z_2x_2 - y_2z_0x_2 - y_3z_1x_2 + y_2z_1x_3 - y_0z_3x_3 - y_1z_2x_3 - y_3z_0x_3. \end{aligned}$$

Tomemos $d = (a, b, c) \in \mathbb{R}^{12}$ com norma $\sqrt{3}$, isto é, $\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 = 3$. Vamos derivar P_{12} na direção d , para isto primeiro calculamos o gradiente de P_{12} ,

$$\nabla P_{12}(x, y, z) = \left(\frac{\partial P_{12}}{\partial x_0}, \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1}, \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2}, \frac{\partial P_{12}}{\partial x_3}, \frac{\partial P_{12}}{\partial y_0}, \frac{\partial P_{12}}{\partial y_1}, \frac{\partial P_{12}}{\partial y_2}, \frac{\partial P_{12}}{\partial y_3}, \frac{\partial P_{12}}{\partial z_0}, \frac{\partial P_{12}}{\partial z_1}, \frac{\partial P_{12}}{\partial z_2}, \frac{\partial P_{12}}{\partial z_3} \right).$$

Desse modo, a derivada direcional será dada pelo produto interno entre o gradiente ∇P_{12} e

o vetor direcional d ,

$$\begin{aligned}\nabla P_{12} \cdot d &= a_0 \frac{\partial P_{12}}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial P_{12}}{\partial x_3} + b_0 \frac{\partial P_{12}}{\partial y_0} + b_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial y_1} + b_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial y_2} + b_3 \frac{\partial P_{12}}{\partial y_3} \\ &\quad + c_0 \frac{\partial P_{12}}{\partial z_0} + c_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial z_1} + c_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial z_2} + c_3 \frac{\partial P_{12}}{\partial z_3} \\ &= \sum_{i=0}^3 \left(a_i \frac{\partial P_{12}}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial P_{12}}{\partial y_i} + c_i \frac{\partial P_{12}}{\partial z_i} \right).\end{aligned}$$

Sendo assim, definimos a forma quadrática

$$Q_d(x, y, z) = \sum_{i=0}^3 \left(a_i \frac{\partial P_{12}}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial P_{12}}{\partial y_i} + c_i \frac{\partial P_{12}}{\partial z_i} \right). \quad (3.7)$$

Realizando alguns cálculos na forma quadrática Q_d

$$\begin{aligned}Q_d(x, y, z) &= a_0[y_0z_0 - y_1z_1 - y_2z_2 - y_3z_3] + b_0[x_0z_0 - x_1z_1 - x_2z_2 - x_3z_3] + \\ &\quad c_0[x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3] + a_1[-y_0z_1 - y_1z_0 - y_2z_3 + y_3z_2] + \\ &\quad b_1[-x_0z_1 - x_1z_0 + x_2z_3 - x_3z_2] + c_1[-x_0y_1 - x_1y_0 - x_2y_3 + x_3y_2] + \\ &\quad a_2[-y_0z_2 + y_1z_3 - y_2z_0 - y_3z_1] + b_2[-x_0z_2 - x_1z_3 - x_2z_0 + x_3z_1] + \\ &\quad c_2[-x_0y_2 + x_1y_3 - x_2y_0 - x_3y_1] + a_3[-y_0z_3 - y_1z_2 + y_2z_1 - y_3z_0] + \\ &\quad b_3[-x_0z_3 + x_1z_2 - x_2z_1 - x_3z_0] + c_3[-x_0y_3 - x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_0] \\ &= x_0[c_0y_0 - c_1y_1 - c_2y_2 - c_3y_3] + x_1[-c_0y_1 - c_1y_0 + c_2y_3 - c_3y_2] + \\ &\quad x_2[-c_0y_2 - c_1y_3 - c_2y_0 + c_3y_1] + x_3[-c_0y_3 + c_1y_2 - c_2y_1 - c_3y_0] + \\ &\quad x_0[b_0z_0 - b_1z_1 - b_2z_2 - b_3z_3] + x_1[-b_0z_1 - b_1z_0 - b_2z_3 + b_3z_2] + \\ &\quad x_2[-b_0z_2 + b_1z_3 - b_2z_0 - b_3z_1] + x_3[-b_0z_3 - b_1z_2 + b_2z_1 - b_3z_0] + \\ &\quad y_0[a_0z_0 - a_1z_1a_2z_2 - a_3z_3] + y_1[-a_0z_1 - a_1z_0 + a_2z_3 - a_3z_2] + \\ &\quad y_2[-a_0z_2 - a_1z_3 - a_2z_0 + a_3z_1] + z_3[-a_0z_3 + a_1z_2 - a_2z_1 - a_3z_0] \\ &= x^t M_c y + x^t M_b^t z + y^t M_a z,\end{aligned}$$

onde de modo geral para um $s \in \mathbb{R}^4$ definimos a matriz M_s como sendo

$$M_s = \begin{pmatrix} s_0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_0 & -s_3 & s_2 \\ -s_2 & s_3 & -s_0 & -s_1 \\ -s_3 & -s_2 & s_1 & -s_0 \end{pmatrix}.$$

A seguir apresentamos algumas propriedades da matriz M_s :

$$1. M_s \cdot M_s^t = M_s^t \cdot M_s = \|s\|^2 I_4.$$

Utilizando a multiplicação usual de matrizes obtemos

$$\begin{aligned} M_s \cdot M_s^t &= \begin{pmatrix} s_0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_0 & -s_3 & s_2 \\ -s_2 & s_3 & -s_0 & -s_1 \\ -s_3 & -s_2 & s_1 & -s_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_0 & s_3 & -s_2 \\ -s_2 & -s_3 & -s_0 & s_1 \\ -s_3 & s_2 & -s_1 & -s_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|s\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \|s\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \|s\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \|s\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \|s\|^2 I_4. \end{aligned}$$

Com um cálculo análogo chegamos a conclusão que $M_s^t \cdot M_s = \|s\|^2 I_4$. Desse modo, M_s é proporcional a uma matriz ortogonal. Além disso, se $\|s\| = 1$, segue que M_s é ortogonal a si mesma. Em geral, $M_s = \|s\| O_s$ onde $O_s \in \mathbb{O}(4)$, onde $\mathbb{O}(4)$ é o espaço das matrizes ortogonais de ordem 4.

$$2. \det(M_s) = -\|s\|^4 \text{ e } \det(O_s) = -1.$$

Primeiro vamos mostrar que $\det(M_s) = -\|s\|^4$, para isto, observe que $\|s\|^2 = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, desse modo

$$\|s\|^4 = s_0^4 + 2s_0^2 s_1^2 + s_1^4 + 2s_0^2 s_2^2 + 2s_0^2 s_3^2 + 2s_1^2 s_2^2 + 2s_1^2 s_3^2 + s_2^4 + 2s_2^2 s_3^2 + s_3^4,$$

agora vamos calcular o determinante da matriz M_s .

$$\begin{aligned}
\det(M_s) &= \begin{vmatrix} s_0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_0 & -s_3 & s_2 \\ -s_2 & s_3 & -s_0 & -s_1 \\ -s_3 & -s_2 & s_1 & -s_0 \end{vmatrix} \\
&= s_0 \begin{vmatrix} -s_0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & -s_0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & -s_0 \end{vmatrix} + s_1 \begin{vmatrix} -s_1 & -s_3 & s_2 \\ -s_2 & -s_0 & -s_1 \\ -s_3 & s_1 & -s_0 \end{vmatrix} - s_2 \begin{vmatrix} -s_1 & -s_0 & s_2 \\ -s_2 & s_3 & -s_1 \\ -s_3 & -s_2 & -s_0 \end{vmatrix} \\
&\quad + s_3 \begin{vmatrix} -s_1 & -s_0 & -s_3 \\ -s_2 & s_3 & -s_0 \\ -s_3 & -s_2 & s_1 \end{vmatrix} \\
&= s_0[-s_0^3 - s_1s_2s_3 + s_1s_2s_3 - s_2^2s_0 - s_0s_1^2 - s_3^2s_0] \\
&\quad + s_1[-s_0^2s_1 - s_1s_3^2 - s_1s_2^2 - s_0s_2s_3 - s_1^3 + s_0s_2s_3] \\
&\quad - s_2[s_0s_1s_3 - s_0s_1s_3 + s_2^3 + s_2s_3^2 + s_0^2s_2 + s_1^2s_2] \\
&\quad + s_3[-s_1^2s_3 - s_2^2s_3 - s_0^2s_3 - s_3^3 - s_0s_1s_2 + s_0s_1s_2] \\
&= -[s_0^4 + 2s_0^2s_1^2 + s_1^4 + 2s_0^2s_2^2 + 2s_0^2s_3^2 + 2s_1^2s_2^2 + 2s_1^2s_3^2 + s_2^4 + 2s_2^2s_3^2 + s_3^4] \\
&= -\|s\|^4.
\end{aligned}$$

Como $M_s = \|s\|O_s$ então $\det(M_s) = \det(\|s\|O_s)$, usando a propriedade de determinante, segue que

$$\begin{aligned}
\det(M_s) &= \det(\|s\|O_s) \\
-\|s\|^4 &= \|s\|^4 \det(O_s) \\
-1 &= \det(O_s),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

3. O polinômio característico PM_s de M_s é

$$PM_s(\lambda) = (\lambda^2 - \|s\|^2)(\lambda^2 + 2s_0\lambda + \|s\|^2) \quad (3.8)$$

e o polinômio característico PO_s de O_s é

$$PO_s(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2s_0^*\lambda + 1), \quad (3.9)$$

onde $s_0^* = \frac{s_0}{\|q_s\|}$.

Utilizando o Teorema de Laplace para os cálculos de determinantes de matrizes quadradas, obtemos

$$\begin{aligned}
\det(M_s - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} s_0 - \lambda & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & s_0 - \lambda & -s_3 & s_2 \\ -s_2 & s_3 & s_0 - \lambda & -s_1 \\ -s_3 & -s_2 & s_1 & s_0 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (s_0\lambda)[-(s_0+\lambda)^3 - s_2^2(s_0+\lambda) - s_3^2(s_0+\lambda) - s_1^2(s_0+\lambda)] + s_1[-s_1(s_0+\lambda)^2 - s_1s_3^2 - s_1s_2^2 - s_1^3] \\
&\quad - s_2[s_2^3 + s_2s_3^2 + s_2(s_0+\lambda)^2 + s_1^2s_2] + s_3[-s_1^2s_3 - s_2^2s_3 - s_3(s_0+\lambda)^2 - s_3^3] \\
&= [\lambda^4 + 2s_0\lambda^3 - 2s_0^3 - s_0^4] - (s_0 - \lambda)(s_0 + \lambda)(s_0 + \lambda)(s_0^2 + s_3^2 + s_1^2) - (s_0 + \lambda)^2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\
&\quad - (s_1^4 + s_2^4 + s_3^4) - [s_1^2s_3^2 + s_1^2s_2^2 + s_2^2s_3^2 + s_1^2s_2^2 + s_1^2s_3^2 + s_2^2s_3^2] \\
&= \lambda^4 + 2s_0\lambda^3 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)[(s_0 - \lambda)(s_0 + \lambda) + (s_0 + \lambda)^2] - (s_0^4 + s_1^4 + s_2^4 + s_3^4) - 2s_0^3 - 2[s_1^2s_2^2 + s_1^2s_3^2 + s_2s_3^2] \\
&= \lambda^4 + 2s_0\lambda^3 - 2[s_0^2s_1^2 + s_0^2s_2^2 + s_0^2s_3^2 + s_1^2s_2^2 + s_1^2s_3^2 + s_2^2s_3^2] - 2s_0\lambda(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - (s_0^4 + s_1^4 + s_2^4 + s_3^4) \\
&= \lambda^4 + 2s_0\lambda^3 - 2s_0\lambda\|s\|^2 - [s_0^4 + s_1^4 + s_2^4 + s_3^4 + 2(s_0^2s_1^2 + s_0^2s_2^2 + s_0^2s_3^2 + s_1^2s_2^2 + s_1^2s_3^2 + s_2^2s_3^2)] \\
&= \lambda^4 + 2s_0\lambda^3 - 2s_0\lambda\|s\|^2 - \|s\|^4 \\
&= (\lambda^2 - \|s\|^2)(\lambda^2 + 2s_0\lambda + \|s\|^2).
\end{aligned}$$

De modo análogo é possível calcular o polinômio característico PO_s e chegaremos ao seguinte resultado

$$PO_s = (\lambda^2 - \|S\|^2)(\lambda^2 + 2S_0\lambda + \|S\|^2),$$

onde $S = \frac{1}{\|s\|}(s_0, s_1, s_2, s_3)$, logo $\|S\| = 1$, assim,

$$PO_s = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2s_0^*\lambda + 1).$$

4. Seja a matriz simétrica $N_s = O_s + O_s^t$, como $M_s = \|s\|O_s$ segue que $O_s = \frac{1}{\|s\|}M_s$, logo

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{1}{\|s\|} \left[\begin{pmatrix} s_0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_0 & -s_3 & s_2 \\ -s_2 & s_3 & -s_0 & -s_1 \\ -s_3 & -s_2 & s_1 & -s_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_0 & s_3 & -s_2 \\ -s_2 & -s_3 & -s_0 & s_1 \\ -s_3 & s_2 & -s_1 & -s_0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{2}{\|s\|} \begin{pmatrix} s_0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_0 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & -s_0 & 0 \\ -s_3 & 0 & 0 & -s_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular o polinômio característico de N_s , vamos fazer os elementos da matriz como sendo $n_i = -\frac{2}{\|s\|}s_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \det(N_s - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} n_0 - \lambda & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ -n_1 & -n_0 - \lambda & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & -n_0 - \lambda & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & -n_0 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(n_0 - \lambda)(n_0 + \lambda)^3 - n_1^2(n_0 + \lambda)^2 - n_2^2(n_0 + \lambda)^2 - n_3^2(n_0 + \lambda)^2 \\ &= -[(n_0 + \lambda)[(n_0 + \lambda)(n_0 - \lambda) + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2]] \\ &= -[(n_0 + \lambda)[n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - \lambda^2]]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= \left(\frac{2s_0}{\|s\|}\right)^2 + \left(\frac{2s_1}{\|s\|}\right)^2 + \left(\frac{2s_2}{\|s\|}\right)^2 + \left(\frac{2s_3}{\|s\|}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{\|s\|}\right)^2 (s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ &= 4, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \det(N_s - \lambda I_4) &= -[(n_0 + \lambda)[4 - \lambda^2]] \\ &= (\lambda^2 - 4)(\lambda + 2s_0^*). \end{aligned}$$

O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $N_s - \lambda I = 0$ formam o conjunto espectro de N_s denotado por $Spec(N_s)$, então, $Spec(N_s) = \{2, -2, -2s_0^*, -2s_0^*\}$.

5. M_s é a matriz (com respeito a base padrão) do endomorfismo $t : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ dado por $t(q) = \bar{q} \cdot \bar{q}_s$.

Primeiro vejamos que t é um endomorfismo. De fato, dado o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $t(\alpha q) = \overline{\alpha q} \cdot \bar{q}_s = \alpha \bar{q} \cdot \bar{q}_s = \alpha t(q)$, agora sejam $q_1 = t_0 + t_1 i + t_2 j + t_3 k$ e $q_2 = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$, logo

$$\begin{aligned}
t(q_1 + q_2) &= \overline{q_1 + q_2} \cdot \bar{q}_s \\
&= [(t_0 + r_0) - (t_1 + r_1)i - (t_2 + r_2)j - (t_3 + r_3)k](s_0 - s_1 i - s_2 j - s_3 k) \\
&= (t_0 + r_0)s_0 + (t_1 + r_1)s_1 + (t_2 + r_2)s_2 + (t_3 + r_3)s_3 + \\
&\quad [-(t_0 + r_0)s_1 - (t_1 + r_1)s_0 + (t_2 + r_2)s_3 - (t_3 + r_3)s_2]i \\
&\quad [-(t_0 + r_0)s_2 - (t_1 + r_1)s_3 - (t_2 + r_2)s_0 + (t_3 + r_3)s_1]j \\
&\quad [-(t_0 + r_0)s_3 + (t_1 + r_1)s_2 + (t_2 + r_2)s_1 - (t_3 + r_3)s_0]k \\
&= [(t_0 s_0 + t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3) - (t_0 s_1 + t_1 s_0 - t_2 s_3 + t_3 s_2)i \\
&\quad - (t_0 s_2 + t_1 s_3 + t_2 s_0 - t_3 s_1)j - (t_0 s_3 - t_1 s_2 + t_2 s_1 + t_3 s_0)k] + \\
&\quad [(r_0 s_0 + r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3) - (r_0 s_1 + r_1 s_0 - r_2 s_3 + r_3 s_2)i \\
&\quad - (r_0 s_2 + r_1 s_3 + r_2 s_0 - r_3 s_1)j - (r_0 s_3 - r_1 s_2 + r_2 s_1 + r_3 s_0)k] + \\
&= \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_s + \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_s \\
&= t(q_1) + t(q_2).
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular a aplicação t nos elementos da base de \mathbb{H} para obter a matriz de transformação

$$\begin{aligned}
t(1) &= 1 \cdot \bar{q}_s = s_0 - s_1 i - s_2 j - s_3 k, \\
t(i) &= -i \cdot \bar{q}_s = -s_1 - s_0 i - s_3 j + s_2 k, \\
t(j) &= -j \cdot \bar{q}_s = -s_2 + s_3 i - s_0 j - s_1 k, \\
t(k) &= -k \cdot \bar{q}_s = -s_3 - s_2 i + s_1 j - s_0 k.
\end{aligned}$$

Desse modo, podemos ver que a matriz de transformação é a matriz M_s .

Consideremos a matriz $M_{srt} = M_s M_r M_t$, onde r, s, t são vetores arbitrários de \mathbb{R}^4 . Segue de (3) que o polinômio característico de PM_{srt} é dado por

$$PM_{srt}(\lambda) = (\lambda^2 - \|srt\|^2)(\lambda^2 + 2P(s, r, t)\lambda + \|srt\|^2),$$

onde $P(s, r, t) = \text{Re}(q_s \cdot q_r \cdot q_t)$. Usando a propriedade de norma temos

$$PM_{srt}(\lambda) = (\lambda^2 - \|s\|^2\|r\|^2\|t\|^2)(\lambda^2 + 2s_0\lambda + \|s\|^2\|r\|^2\|t\|^2).$$

Segue de (5) que M_{srt} é a matriz conjugada do endomorfismo $q \mapsto \bar{q} \cdot \overline{q_s} \cdot \overline{q_r} \cdot \overline{q_t}$.

Concluimos também de (3) que o polinômio característico da matriz ortogonal O_{srt} é dado por

$$PO_{srt}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2\bar{P}(s, r, t)\lambda + 1),$$

onde $\bar{P}(s, r, t) = \frac{P(s, r, t)}{\|s\| \cdot \|r\| \cdot \|t\|}$, para a matriz simétrica correspondente $N_{srt} = O_{srt} + O_{srt}^t$ o espectro será

$$\text{Spec}(N_{srt}) = \{2, -2, -2\bar{P}(s, r, t), -2\bar{P}(s, r, t)\}. \quad (3.10)$$

Fazendo $n(d) = n(a, b, c) = P(a, b, c)$ e $m(d) = m(a, b, c) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|$. Observe que

$$\begin{aligned} |n(a, b, c)| &= |a_0b_0c_0 - a_0b_1c_1 - a_0b_2c_2 - a_0b_3c_3 + a_1b_3c_2 - a_1b_0c_1 - a_1b_1c_0 - a_1b_2c_3 \\ &\quad + a_2b_1c_3 - a_2b_0c_2 - a_2b_2c_0 - a_2b_3c_1 + a_3b_2c_1 - a_3b_0c_3 - a_3b_1c_2 - a_3b_3c_0|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| &= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \\ &= a_0^2(b_0^2c_0^2 + b_1^2c_1^2 + b_2^2c_2^2 + b_3^2c_3^2 + b_0^2c_1^2 + b_0^2c_2^2 + b_0^2c_3^2 + b_1^2c_0^2 + b_1^2c_2^2 + b_1^2c_3^2 + b_2^2c_0^2 \\ &\quad + b_2^2c_1^2 + b_2^2c_3^2 + b_3^2c_0^2 + b_3^2c_1^2 + b_3^2c_2^2) + a_1^2(b_0^2c_1^2 + b_1^2c_0^2 + b_2^2c_3^2 + b_3^2c_2^2 + b_0^2c_0^2 + b_1^2c_1^2 \\ &\quad + b_2^2c_2^2 + b_3^2c_3^2 + b_0^2c_2^2 + b_0^2c_3^2 + b_1^2c_2^2 + b_1^2c_3^2 + b_2^2c_0^2 + b_2^2c_1^2 + b_3^2c_0^2 + b_3^2c_1^2) + a_2^2(b_0^2c_2^2 \\ &\quad + b_1^2c_3^2 + b_2^2c_0^2 + b_3^2c_1^2 + b_0^2c_0^2 + b_1^2c_1^2 + b_2^2c_2^2 + b_3^2c_3^2 + b_0^2c_1^2 + b_1^2c_0^2 + b_1^2c_2^2 \\ &\quad + b_2^2c_1^2 + b_2^2c_3^2 + b_3^2c_0^2 + b_3^2c_2^2) + a_3^2(b_0^2c_3^2 + b_1^2c_2^2 + b_2^2c_0^2 + b_3^2c_1^2 + b_0^2c_0^2 + b_1^2c_1^2 + b_2^2c_2^2 \\ &\quad + b_3^2c_3^2 + b_0^2c_1^2 + b_0^2c_2^2 + b_1^2c_0^2 + b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2 + b_2^2c_3^2 + b_3^2c_0^2 + b_3^2c_2^2) \\ &\geq |a_0(b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3) + a_1(b_3c_2 - b_0c_1 - b_1c_0 - b_2c_3) \\ &\quad + a_2(b_1c_3 - b_0c_2 - b_2c_0 - b_3c_1) + a_3(b_2c_1 - b_0c_3 - b_1c_2 - b_3c_0)| \\ &= |P(a, b, c)|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| \geq |P(a, b, c)|. \quad (3.11)$$

Lembrando que $\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 = 3$ e usando o fato de que a média quadrática é maior que a média geométrica, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2}{3}} &\geq \sqrt[3]{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|} \\ \sqrt{\frac{3}{3}} &\geq \sqrt[3]{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|} \\ 1 &\geq \sqrt[3]{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Segue de (3.11) e (3.12) que $1 \geq \sqrt[3]{\|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|} \geq \sqrt[3]{|P(a, b, c)|}$, portanto,

$$1 \geq m(d) \geq |n(d)|. \quad (3.13)$$

Usando o fato de que Q é uma forma quadrática associada a uma matriz simétrica A implica $\vec{\nabla} Q = 2Ax$ (ver lema A.1), vejamos a proposição a seguir sobre o polinômio característico da forma quadrática $2Q_d$.

Proposição 3.1. *O polinômio característico CH_d da forma quadrática $2Q_d$ é igual a*

$$CH_d(x) = (x^3 - 3x + 2m)(x^3 - 3x - 2m)(x^3 - 3x + 2n)^2 \quad (3.14)$$

onde $n = n(d) = P(a, b, c)$ e $m = m(d) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\|$.

Demonstração. Segue do item (1) e do modo como a forma quadrática Q_d está definida que

$$\begin{aligned} Q_d(x, y, z) &= x^t M_c y + x^t M_b^t z + y^t M_a z \\ &= \|c\| x^t O_c y + \|b\| x^t O_b^t z + \|a\| y^t O_a z. \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança ortogonal das variáveis $X = O_c^t x$, $Y = y$ e $Z = O_a z$, a forma quadrática será dada da forma

$$\tilde{Q}_d(X, Y, Z) = \|c\| X^t Y + \|b\| X^t O_c^t O_b^t O_a^t Z + \|a\| Y^t Z, \quad (3.15)$$

em que a matriz da forma $2\tilde{Q}_d$ é a seguinte matriz de blocos (ver apêndice (B))

$$\tilde{M}_d = \begin{pmatrix} 0_4 & \|c\| I_4 & \|b\| O_{abc}^t \\ \|c\| I_4 & 0_4 & \|a\| I_4 \\ \|b\| O_{abc} & \|a\| I_4 & 0_4 \end{pmatrix},$$

onde 0_4 é a matriz nula, I_4 é a matriz identidade de ordem 4 e $O_{abc} = O_a O_b O_c$. Seja $\lambda \in \text{Spec}(\widetilde{M}_d)$ e tome $v_\lambda = (p_\lambda, q_\lambda, r_\lambda)$ um autovetor correspondente a λ , normalizado pela condição $\|v_\lambda\| = \sqrt{3}$. Da condição $\widetilde{M}_d \cdot v_\lambda = \lambda v_\lambda$, temos:

$$\lambda p_\lambda = \|c\|q_\lambda + \|b\|O_{abc}^t r_\lambda, \quad (3.16)$$

$$\lambda q_\lambda = \|c\|p_\lambda + \|a\|r_\lambda, \quad (3.17)$$

$$\lambda r_\lambda = \|b\|O_{abc}p_\lambda + \|a\|q_\lambda. \quad (3.18)$$

Multiplicando as equações (3.16) e (3.18) por λ obtemos

$$\lambda^2 p_\lambda = \|c\|\lambda q_\lambda + \|b\|O_{abc}^t \lambda r_\lambda, \quad (3.19)$$

$$\lambda^2 r_\lambda = \|b\|O_{abc}\lambda p_\lambda + \|a\|\lambda q_\lambda. \quad (3.20)$$

Substituindo a igualdade (3.17) nas igualdades a cima (3.19) e (3.20), temos:

$$\lambda^2 p_\lambda = \|c\|(\|c\|p_\lambda + \|a\|r_\lambda) + \|b\|O_{abc}^t \lambda r_\lambda,$$

$$\lambda^2 r_\lambda = \|b\|O_{abc}\lambda p_\lambda + \|a\|(\|c\|p_\lambda + \|a\|r_\lambda),$$

o que implica

$$(\lambda^2 - \|c\|^2)p_\lambda = (\|c\|\|a\| + \lambda\|b\|O_{abc}^t)r_\lambda \quad (3.21)$$

$$(\lambda^2 - \|a\|^2)r_\lambda = (\|c\|\|a\| + \lambda\|b\|O_{abc})p_\lambda. \quad (3.22)$$

Multiplicando por $(\lambda^2 - \|a\|^2)$ a equações (3.21) e substituindo a equação (3.22) no resultado

$$(\lambda^2 - \|c\|^2)(\lambda^2 - \|a\|^2)p_\lambda = (\|c\|\|a\| + \lambda\|b\|O_{abc}^t)(\lambda^2 - \|a\|^2)r_\lambda$$

$$(\lambda^2 - \|c\|^2)(\lambda^2 - \|a\|^2)p_\lambda = (\|c\|\|a\| + \lambda\|b\|O_{abc}^t)(\|c\|\|a\| + \lambda\|b\|O_{abc})p_\lambda. \quad (3.23)$$

Desse modo,

$$(\lambda^2 - \|c\|^2)(\lambda^2 - \|a\|^2)p_\lambda = (\|c\|\|a\| + \lambda\|b\|O_{abc}^t)(\|c\|\|a\| + \lambda\|b\|O_{abc})p_\lambda$$

$$\begin{aligned} (\lambda^4 - \lambda^2\|c\|^2 - \lambda^2\|a\|^2 + \|a\|^2\|c\|^2)p_\lambda &= (\|a\|^2\|c\|^2 + \lambda\|a\|\|b\|\|c\|O_{abc} + \lambda\|a\|\|b\|\|c\|O_{abc}^t \\ &\quad + \lambda^2\|b\|^2O_{abc}^tO_{abc})p_\lambda \end{aligned}$$

$$(\lambda^4 - \lambda^2(\|c\|^2 + \|a\|^2))p_\lambda = (\lambda m(d)O_{abc} + \lambda m(d)O_{abc}^t + \lambda^2\|b\|^2I_4)p_\lambda$$

$$(\lambda^4 - \lambda^2(\|c\|^2 + \|a\|^2 + \|b\|^2))p_\lambda = \lambda m(d)N_{abc}p_\lambda$$

$$(\lambda^4 - 3\lambda^2)p_\lambda - \lambda m(d)N_{abc}p_\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^3 - 3\lambda - \lambda m(d)N_{abc})p_\lambda = 0.$$

Logo, $\lambda = 0$ ou $\lambda^3 I_4 - 3\lambda I_4 - \lambda m(d) N_{abc} = 0$, isto é, $(\lambda^3 - 3\lambda) \in m(d) \cdot \text{Spec}(N_{abc})$, segue de (3.10) que $m(d) \cdot \text{Spec}(N_{abc}) = \{2m(d), -2m(d), -2m(d)\bar{P}(a, b, c), -2m(d)\bar{P}(a, b, c)\}$, onde $m(d)\bar{P}(a, b, c) = m(d) \frac{P(a, b, c)}{\|a\|\|b\|\|c\|} = n(d)$, então

$$m(d) \cdot \text{Spec}(N_{abc}) = \{2m(d), -2m(d), -2n(d), -2n(d)\}.$$

Assim, encerramos o caso onde o autovalor $\lambda \neq 0$. Agora, se $\lambda = 0$ segue das equações (3.16), (3.17) e (3.18) que:

$$\begin{aligned} 0 &= \|c\|q_\lambda + \|b\|O_{abc}^t r_\lambda, \\ 0 &= \|c\|p_\lambda + \|a\|r_\lambda, \\ 0 &= \|b\|O_{abc} p_\lambda + \|a\|q_\lambda. \end{aligned}$$

Como $\|d\| = \sqrt{3}$, seque que $\|a\|$, $\|b\|$ ou $\|c\|$ é diferente de zero. Supondo $\|c\| \neq 0$, da primeira e segunda equação a cima temos $q_\lambda = -\frac{\|b\|}{\|c\|} O_{abc}^t r_\lambda$ e $p_\lambda = -\frac{\|a\|}{\|c\|} r_\lambda$, logo, substituindo na terceira equação obtemos $0 = \frac{\|b\| \cdot \|a\|}{\|c\|} O_{abc} r_\lambda - \frac{\|b\| \cdot \|a\|}{\|c\|} O_{abc} r_\lambda$, o que implica $O_{abc} = O_{abc}^t$, segue do modo como essas matrizes estão definidas que $m = 0$ e desse modo a fórmula vale também para este caso. \square

Observemos que a derivada do polinômio P_{12} na direção d aplicada em d é

$$\begin{aligned} DP_d(a, b, c) &= a_0[b_0c_0 - b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3] + b_0[a_0c_0 - a_1c_1 - a_2c_2 - a_3c_3] + \\ & c_0[a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3] + a_1[-b_0c_1 - b_1c_0 - b_2c_3 + b_3c_2] + \\ & b_1[-a_0c_1 - a_1c_0 + a_2c_3 - a_3c_2] + c_1[-a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2] + \\ & a_2[-b_0c_2 + b_1c_3 - b_2c_0 - b_3c_1] + b_2[-a_0c_2 - a_1c_3 - a_2c_0 + a_3c_1] + \\ & c_2[-a_0b_2 + a_1b_3 - a_2b_0 - a_3b_1] + a_3[-b_0c_3 - b_1c_2 + b_2c_1 - b_3c_0] + \\ & b_3[-a_0c_3 + a_1c_2 - a_2c_1 - a_3c_0] + c_3[-a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_0] \\ DP_d(d) &= 3P(a, b, c). \end{aligned}$$

Lembrando que o produto escalar de dois vetores pode ser escrito como o produto da norma dos vetores vezes o cosseno do ângulo formado entre eles. Logo, se β é o ângulo formado entre o vetor direcional d e o vetor gradiente ∇P temos

$$DP_d(d) = \nabla P \cdot d = \|\nabla P\| \cdot \|d\| \cdot \cos(\beta).$$

Calculando a norma de $\nabla P(a, b, c)$ obtemos $\|\nabla P(a, b, c)\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 + \|a\|^2\|c\|^2 + \|b\|^2\|c\|^2 = 3$. Logo,

$$\begin{aligned} DP_d(d) &= \|\nabla P\| \cdot \|d\| \cdot \cos(\beta) \\ 3P(a, b, c) &= \sqrt{3}\sqrt{3} \cos(\beta) \\ n &= \cos(\beta). \end{aligned}$$

Corolário 3.1. *Defina os ângulos $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ por $m = \cos(\alpha)$ e $n = \cos(\beta)$ então*

$$\text{Spec}(\widetilde{M}_d) = \left\{ 2 \cos\left(\frac{\alpha + k\pi}{3}\right), 2 \cos\left(\frac{\beta + (2l+1)\pi}{3}\right), 2 \cos\left(\frac{\beta + (2l+1)\pi}{3}\right) \right\},$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e $l = 0, 1, 2$.

Demonstração. Fazendo $x = 2 \cos(\gamma)$ e substituindo no polinômio característico, obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2m &= 8 \cos^3(\gamma) - 6 \cos(\gamma) + 2 \cos(\alpha) \\ 0 &= 4 \cos^3(\gamma) - 3 \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) &= \cos(3\gamma). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Analogamente, encontramos

$$\cos(\alpha) = \cos(3\gamma) \tag{3.25}$$

$$-\cos(\beta) = \cos(3\gamma). \tag{3.26}$$

Segue de (3.24) que $3\gamma = \alpha + k\pi$, para k -ímpar. E de (3.25) temos $3\gamma = \alpha + k'\pi$, para k' -par. Assim, $\gamma = \frac{\alpha + k\pi}{3}$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Do mesmo modo, de (3.26) segue que $3\gamma = \beta + k\pi$, para k -ímpar. Logo, $\gamma = \frac{\beta + (2l+1)\pi}{3}$, com $l = 0, 1$. Assim, chegamos a conclusão de que se $x \in \text{Spec}(\widetilde{M}_d)$ então $x = 2 \cos\left(\frac{\alpha + k\pi}{3}\right)$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, ou $x = 2 \cos\left(\frac{\beta + (2l+1)\pi}{3}\right)$, com $l = 0, 1$. \square

Lema 3.3. *(Lema Fundamental) Sejam $F_m(x) = (x^3 - 3x - 2m)$ com $|m| \leq 1$, e $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ as raízes de F_m , assim:*

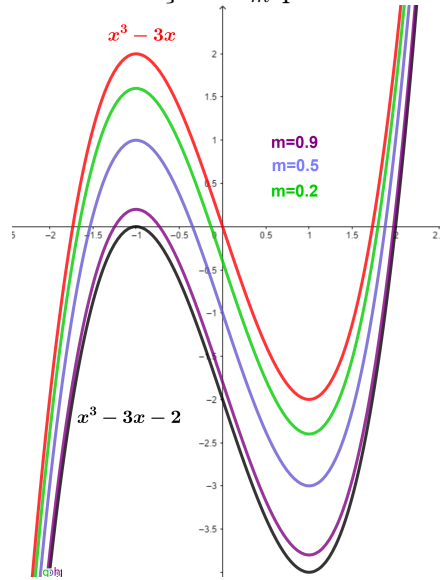
1. *Se $0 \leq m \leq 1$ então $\sqrt{3} \leq x_1 \leq 2$ e $x_3 \leq -1$. Da condição $x_1 = 2$ ou $x_3 = -1$ implica que $m = 1$.*
2. *Se $-1 \leq m \leq 0$ então $-2 \leq x_3 \leq -\sqrt{3}$ e $1 \leq x_1$. Da condição $x_1 = 1$ ou $x_3 = -2$ implica que $m = -1$.*

Demonstração. 1. Para $0 \leq m \leq 1$ segue que

$$x^3 - 3x \geq F_m(x) \geq x^3 - 3x - 2. \quad (3.27)$$

Note que as raízes de $x^3 - 3x$ são 0 e $\pm\sqrt{3}$, e as raízes de $x^3 - 3x - 2$ são -1 e 2 . Logo, como $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, implica de (3.27) que devemos ter $\sqrt{3} \leq x_1 \leq 2$ e $x_3 \leq -1$. Observe a figura a baixo, onde as funções em verde, azul e roxo, são as funções F_m para os valores 0.2 , 0.5 e 0.9 , respectivamente.

Figura 3.1: Gráfico das funções F_m para os valores 0.2 , 0.5 e 0.9



Fonte: Elaborada pelo autor

2. Análogo, ao caso (1).

□

A partir de agora ordenamos os autovalores de forma decrescente

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{11} \geq \lambda_{12}. \quad (3.28)$$

Corolário 3.2. *Sejam λ_i , com $i = 1, 2, \dots, 12$, os autovalores da forma (3.28), então:*

1. $1 \leq \lambda_4 \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq 2$
2. $-2 \leq \lambda_{12} \leq \lambda_{11} \leq \lambda_{10} \leq \lambda_9 \leq -1$
3. $\lambda_{12} \leq -\sqrt{3}; \lambda_1 \geq \sqrt{3}$

4. Se $\lambda_1/\lambda_3 = 2$ (respectivamente $\lambda_{12}/\lambda_{10} = 2$) então o polinômio

$$CH_d(\lambda) = (\lambda + 2)^3(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^6$$

em (3.14) (respc. $CH_d(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^6$) e $d = v_1$ (respc. $d = v_2$) onde v_i é um autovetor normalizado correspondente a λ_i .

Demonstração. Sejam $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ e $z_1 \geq z_2 \geq z_3$ as raízes dos respectivos polinômios $x^3 - 3x - 2m$, $x^3 - 3x + 2m$ e $x^3 - 3x + 2n$. Segue do item (1) do lema (3.3) que $\sqrt{3} \leq x_1 \leq 2$ e $x_3 \leq -1$. Do item (2) do mesmo lema implica que $-2 \leq y_3 \leq -\sqrt{3}$ e $1 \leq y_1$, do mesmo modo $-2 \leq z_3 \leq -\sqrt{3}$ e $1 \leq z_1$. Logo, $x_1, y_1, z_1 \in [1, 2]$ e $x_3, y_3, z_3 \in [-2, -1]$. Assim, quando consideramos o polinômio característico $CH_d(\lambda) = (\lambda^3 - 3\lambda + 2m)(\lambda^3 - 3\lambda - 2m)(\lambda^3 - 3\lambda - 2n)^2$ e ordenamos os autovalores de forma decrescente, e do fato do polinômio $(\lambda^3 - 3\lambda - 2n)$ está ao quadrado o polinômio CH_d apresentará tais raízes repetidas. Logo, chegamos a conclusão que os itens (1), (2) e (3) são verdadeiros. Do item (4) temos como hipótese $\lambda_1/\lambda_3 = 2$, logo de $1 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 \leq 2$ segue que $1 \leq 2 \leq \frac{2}{\lambda_3}$, como $\lambda_3 \geq 1$, tais desigualdades implicam que $\lambda_3 = 1$, portanto $\lambda_1 = 2$. Assim, como consequência do item (1) teremos $\lambda_4 = 1$. Como $\lambda_4 = \lambda_3 = 1$ é raiz repetida, então é raiz de $\lambda^3 - 3\lambda + 2n$, o que implica $n = 1$ e desse modo podemos decompor o polinômio como

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Se $\lambda_1 = 2$ é raiz de $\lambda^3 - 3\lambda - 2m$, pelo lema (3.3) item (1) segue $m = 1$. Caso λ_1 seja raiz de $\lambda^3 - 3\lambda + 2m$ então $m = -1$. De qualquer forma, vamos poder decompor os polinômios da seguinte forma

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Como $m(d) = n(d) = 1$, o que implica que a função P tem um máximo absoluto em d , sua derivada na direção d é igual a 1, o que significa que $2Q(d) = 2$, logo $d = v_1$. Portanto, segue o resultado. Analogamente, se $\lambda_{12}/\lambda_{10} = 2$, irá implicar que $\lambda_{10} = -1$ e $\lambda_{12} = -2$, prosseguindo de modo similar, chegamos ao resultado do item (4).

□

Vamos fazer algumas observações sobre as propriedades espectrais do $2Q_d$ quando d varia sobre $\mathbb{S}_{\sqrt{3}}^{11}$. Temos uma estratificação $V_0 \subset \mathbb{S}_{\sqrt{3}}^{11} \supset T \supset V = V_+ \cup V_-$, onde: $T = \mathbb{S}_1^3 \times \mathbb{S}_1^3 \times \mathbb{S}_1^3$ é definido pela condição $m(d) = 1$, $V_+ = \{d; P(d) = 1\}$, $V_- = \{d; P(d) = -1\}$, $V_0 = \{d; P(d) = 0\}$. Cada conjunto V_+ e V_- é difeomorfo a $\mathbb{S}_1^3 \times \mathbb{S}_1^3$. O polinômio característico de V_+ é dado por $(x+2)^3(x-2)(x+1)^2(x-1)^6$ e de V_- é dado por $(x-2)^3(x+2)(x-1)^2(x+1)^6$. Em $\mathbb{S}_{\sqrt{3}}^{11} \setminus (T \cup V_0)$ temos $\sqrt{3} < \lambda_1(d) < 2$, $1 < \lambda_4(d)$, $-1 > \lambda_9(d)$ e $-2 < \lambda_{12}(d) < -\sqrt{3}$. O polinômio característico de V_0 é dado por $x^4(x^2 - 3)^4$.

O corolário a seguir serve de ferramenta para a demonstração do resultado principal.

Corolário 3.3. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^{12}$ com $u \neq v$ e norma $\sqrt{3}$. Então*

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \lambda_{10}(d) \|u - v\| \leq P(u) - P(v) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \lambda_3(d) \|u - v\| \quad (3.29)$$

onde $d = \sqrt{3} \frac{u-v}{\|u-v\|}$,

Demonstração. Ver [21], pág. 1294. □

3.3 A construção não clássica mais simples

Antes de enunciarmos a proposição a seguir, fazemos a seguinte observação, N. Nadi-rashvili e S. Vladut no artigo [21] utilizaram o software MAPLE para realizar as contas do trabalho, e assim, conseguiram mostrar a seguinte igualdade

$$\omega_{ee}(a) = P_{ee}(a) - P(a)$$

para um e específico, cujas características serão dadas na proposição, de modo que $e \perp a$, com $a \in \mathbb{S}_1^{11}$.

Proposição 3.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{S}_1^{11}$ com $a \neq b$. então existem dois vetores $e, f \in \mathbb{S}_1^{11}$ tal que*

$$\begin{aligned} \omega_{ee}(a) - \omega_{ee}(b) &\geq \frac{\|a - b\|}{4\sqrt{3}} \\ \omega_{ff}(a) - \omega_{ff}(b) &\leq -\frac{\|a - b\|}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $d = \sqrt{3} \frac{a-b}{\|a-b\|}$. Consideremos v_i , $i = 1, 2, \dots, 12$ os autovetores normalizados da forma quadrática $2Q_d$ e os seus respectivos autovalores $\lambda_i = \lambda_i(d)$ ordenados de

forma decrescente. Tomemos V^+ como sendo o espaço tridimensional gerado pelos autovetores v_1, v_2, v_3 e seja $e \in S_1^{11} \cap V^+ \cap a^\perp \cap b^\perp$. Note que do fato de v_1, v_2, v_3 serem autovetores de $2Q_d$ segue que $2Q_d(e) = 2Q_d(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 \geq \lambda_3(d)$, pois os autovalores estão ordenados de forma decrescente. Portanto

$$2Q_d(e) \geq \lambda_3(d). \quad (3.30)$$

Por outro lado, da condição $b \perp e$ e $a \perp e$ temos

$$\omega_{ee}(a) = P_{ee}(a) - P(a) \quad (3.31)$$

$$\omega_{ee}(b) = P_{ee}(b) - P(b). \quad (3.32)$$

Fazendo a subtração (3.31) menos (3.32), obtemos

$$\omega_{ee}(a) - \omega_{ee}(b) = P_{ee}(a) - P_{ee}(b) - (P(a) - P(b)). \quad (3.33)$$

Do fato de $P_{ee}(x)$ ser linear e da desigualdade (3.30) temos

$$\begin{aligned} P_{ee}(a) - P_{ee}(b) &= \frac{\|a - b\|}{\sqrt{3}} P_{eed} \\ &= 2 \frac{\|a - b\|}{\sqrt{3}} Q_d(e) \\ &\geq \frac{\|a - b\|}{\sqrt{3}} \lambda_3(d). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Observe que $P(\beta x) = \beta^3 P(x)$. Usando a desigualdade (3.29) do corolário 3.3, segue que

$$\begin{aligned} P(a) - P(b) &= \frac{P(\sqrt{3}a) - P(\sqrt{3}b)}{3\sqrt{3}} \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}\lambda_3(d)\sqrt{3}\|a - b\|}{12\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\lambda_3(d)\|a - b\|}{4}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Usando as desigualdades (3.34) e (3.35), a igualdade (3.33) será limitada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \omega_{ee}(a) - \omega_{ee}(b) &= P_{ee}(a) - P_{ee}(b) - (P(a) - P(b)) \\ &\geq \frac{\|a - b\|}{\sqrt{3}} \lambda_3(d) - \frac{\sqrt{3}\lambda_3(d)\|a - b\|}{4} \\ &= \lambda_3(d)\|a - b\| \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \frac{\lambda_3(d)\|a - b\|}{4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Do item (1) do corolário 3.2 temos que $\lambda_3(d) \geq 1$, assim,

$$\omega_{ee}(a) - \omega_{ee}(b) \geq \frac{\|a - b\|}{4\sqrt{3}}.$$

A segunda desigualdade é obtida de forma análoga fazendo $f \in S_1^{11} \cap V^- \cap a^\perp \cap b^\perp$ onde V^- é o espaço tridimensional gerado pelos autovetores v_{10}, v_{11}, v_{12} . \square

Corolário 3.4. *Considerando ω_{12} definida em (3.2), temos que a aplicação $H(a) : \mathbb{S}^{11} \rightarrow Q(\mathbb{R}^{12})$ dada por $H(a) = D^2\omega_{12}(a)$ é uma imersão suave.*

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 3.2. \square

Corolário 3.5. *Considerando ω_{12} definida em (3.2). Sendo $a, b \in \mathbb{S}_1^{11}$ com $a \in b$ e*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{11} \geq \mu_{12}$$

os autovalores de $D^2\omega_{12}(a) - D^2\omega_{12}(b)$. Então

$$M^{-1} = \frac{1}{1536\sqrt{3}} \leq -\frac{\mu_1}{\mu_{12}} \leq 1536\sqrt{3} = M. \quad (3.36)$$

Demonstração. Para qualquer $e, f, g, x \in \mathbb{S}_1^{11}$ temos que $\|\omega_{efg}(x)\| \leq 32 = 2^5$. Então, para $d' = \frac{d}{\sqrt{3}}$,

$$\|\omega_{ef}(a) - \omega_{ef}(b)\| \leq \|\omega_{efd'}(d')\| \cdot \|a - b\| \leq 2^5 \|a - b\|, \quad (3.37)$$

segue então que todos os elementos da matriz $Hess(\omega_{12}(a)) - Hess(\omega_{12}(b))$ tem valor absoluto menor que $2^5 \|a - b\|$, o que implica que todos os seus autovalores são de valores absolutos menores que $12 \cdot 2^5 \|a - b\|$. Pelo corolário (3.2) temos $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_{12} < 0$. Assim, usando a proposição (3.2) segue que $\lambda_1 \leq 12 \cdot 2^5 \|a - b\| \leq -12 \cdot 2^5 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \lambda_{12}$ e $-\lambda_{12} \geq -12 \cdot 2^5 \|a - b\| \geq 12 \cdot 2^5 \cdot 4 \sqrt{3} \lambda_1$, portanto, fazendo $12 \cdot 2^5 \cdot 4 \sqrt{3} = M$, temos

$$\frac{1}{M} \leq -\frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \leq M.$$

\square

Desse modo, podemos apresentar agora o teorema principal do trabalho.

Teorema 3.1. *A função*

$$\omega_{12}(x) = \frac{Re(q_1 \cdot q_2 \cdot q_3)}{\|x\|}$$

onde $q_i \in \mathbb{H}$, $i = 1, 2, 3$, $x = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}^4 = \mathbb{R}^{12}$ é uma solução de viscosidade em \mathbb{R}^{12} de uma equação uniformemente elíptica da forma (3.3) com F suave.

Demonstração. Segue dos corolários (3.4) e (3.5) que a função ω_{12} satisfaz as condições do problema **(H)**, logo do lema (3.3) temos que ω_{12} é solução de viscosidade da equação uniformemente elíptica (3.3) com F suave. \square

Segue imediatamente dos resultados discutidos no capítulo 2, o seguinte corolário:

Corolário 3.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{12}$ uma bola de raio 1 e $\phi = \omega_{12}$ em $\partial\Omega$. Então existe uma F suave uniformemente elíptica tal que o problema de Dirichlet (2.4) tem uma solução não clássica.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento deste trabalho foi abordado assuntos de Álgebra de composição e Equações Diferenciais Parciais de 2ª ordem, com o objetivo de destacar o artigo [21] dos autores Nikolai Nadirashvili e Serge Vladut, onde fazem um estudo estreitando a relação entre estas duas áreas da matemática. Acreditamos que este estudo abre espaço para outros trabalhos envolvendo tais áreas no programa.

Um dos propósitos deste trabalho foi de adquirir conhecimentos básicos sobre esta nova pesquisa para servirem de base no estudo para o doutorado, tendo em vista que pretendemos continuar tal pesquisa com o objetivo de investigar algumas questões em aberto, como por exemplos: estudar a construção do operador F e a demonstração da sua constante de elipticidade. Fazer as contas detalhadas no Mathematica para verificar as igualdades e desigualdades assumidas neste texto, como a igualdade $\omega_{ee}(a) = P_{ee}(a) - P(a)$. Pretendemos, brevemente estudar o caso ω_{24} abordado no artigo *Singular Solutions to Conformal Hessian Equations*, escrito por Nikolai Nadirashvili e Serge Vladut, usando o Mathematica para auxiliar nas contas.

MATRIZES SIMÉTRICAS E FORMAS QUADRÁTICAS

Esta seção é dedicada ao estudos das formas quadráticas, exibindo suas principais propriedades. Primeiramente apresentamos o isomorfismo entre o espaço das formas quadráticas e o espaço das matrizes simétricas, tal propriedade foi utilizada no capítulo (3). Em seguida apresentamos as características das formas quadráticas e suas classificações. Por fim, fazemos o estudo da relação existente entre as formas quadráticas e a Hessiana de uma função de classe C^2 . Antes de iniciar o texto, vamos definir de modo formal o que é uma forma quadrática.

Definição A.1. *Uma forma quadrática é uma função $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo*

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$$

onde $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Um termo de uma forma quadrática que envolve produto de variáveis diferentes, isto é, $x_i x_j$ com $i \neq j$, é chamada termo com produto misto.

A.1 Isomorfismo entre $Q(\mathbb{R}^n)$ e $Sym_n \mathbb{R}$

Antes de fazer a demonstração do isomorfismo existente entre os espaços $Q(\mathbb{R}^n)$ e $Sym_n \mathbb{R}$, vejamos algumas definições.

Definição A.2. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial. Uma forma bilinear simétrica em V é uma*

aplicação

$$\begin{aligned} B : V \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\mapsto B(a, b) \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $B(\lambda a_1 + a_2, b) = \lambda B(a_1, b) + B(a_2, b)$, para quaisquer $a_1, a_2, b \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;
2. $B(a, \lambda b_1 + b_2) = \lambda B(a, b_1) + B(a, b_2)$, para quaisquer $a, b_1, b_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;
3. $B(a, b) = B(b, a)$, para quaisquer $a, b \in V$.

Se além dessas propriedades B satisfizer $B(a, b) = 0$ para todo $b \in V$ implicar $a = 0$, dizemos que B é uma forma bilinear simétrica não degenerada.

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ordenada para o espaço vetorial V , dados $x, y \in V$ então $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ e $y = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$, segue da definição de forma bilinear que:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= B\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j\right) \\ &= \alpha_1 \beta_1 B(e_1, e_1) + \alpha_1 \beta_2 B(e_1, e_2) + \dots + \alpha_1 \beta_n B(e_1, e_n) \\ &\quad + \alpha_2 \beta_1 B(e_2, e_1) + \alpha_2 \beta_2 B(e_2, e_2) + \dots + \alpha_2 \beta_n B(e_2, e_n) + \dots \\ &\quad + \alpha_n \beta_1 B(e_n, e_1) + \alpha_n \beta_2 B(e_n, e_2) + \dots + \alpha_n \beta_n B(e_n, e_n) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_1, e_2) & \dots & B(e_1, e_n) \\ B(e_2, e_1) & B(e_2, e_2) & \dots & B(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n, e_1) & B(e_n, e_2) & \dots & B(e_n, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\ &= x^t \mathcal{B} y \end{aligned}$$

\mathcal{B} é chamada matriz relativa a base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Observe que \mathcal{B} é uma matriz quadrada e simétrica, pois a forma bilinear B é simétrica, o que implica $B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$.

A definição a seguir apresenta a relação da forma quadrática com a forma bilinear.

Definição A.3. A forma quadrática associada a uma forma bilinear simétrica B é uma aplicação $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $q(a) = B(a, a)$.

Definição A.4. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, um número real λ é dito autovalor de A se existe pelo menos um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. Os vetores x que satisfazem a igual são denominados autovetores.

Tendo os conceitos e características apresentados, podemos agora demonstrar a existência do isomorfismo entre os espaços $Q(\mathbb{R}^n)$ e $Sym_n\mathbb{R}$.

Proposição A.1. *O espaço das formas quadráticas $Q(\mathbb{R}^n)$ e o espaço das matrizes simétricas $Sym_n\mathbb{R}$ são isomorfos.*

Demonstração. Dados $x, y \in V$ e usando a definição de forma quadrática, obtemos:

$$\begin{aligned} q(x+y) &= B(x+y, x+y) \\ &= B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y) \\ &= q(x) + 2B(x, y) + q(y) \end{aligned}$$

logo,

$$2B(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y). \quad (\text{A.1})$$

Do fato de que $B(x, y) = x^t \mathcal{B}y$, segue que $q(x) = x^t \mathcal{Q}x$, onde \mathcal{Q} é a matriz relativa a base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Assim, toda forma quadrática está relacionada a uma matriz quadrada simétrica. Analogamente, toda matriz simétrica está associada a uma forma quadrática, considere $Q(\mathbb{R}^n)$ o espaço das formas quadráticas e $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, então

$$\begin{aligned} f : Sym_n(R) &\longrightarrow Q(\mathbb{R}^n) \\ A &\longmapsto x^t A x \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

gera um isomorfismo entre $Sym_n(R) \cong Q(\mathbb{R}^n)$, pois é injetivo, sobrejetivo. \square

A.2 Propriedades

A seguir iremos apresentar algumas propriedades de formas quadráticas e matrizes simétricas

Teorema A.1. *Se A é uma matriz de ordem n , então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. *A é ortogonalmente diagonalizável;*
2. *A tem um conjunto ortogonal de n autovetores;*
3. *A é simétrica.*

Demonstração. Ver [4], teorema 7.3.1, pág. 251. □

Definição A.5. Uma forma quadrática $Q(x) = x^t Ax$, $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$, com $x \neq 0$, é dita:

- i) *Positiva definida* se $Q(x) > 0$, neste caso a matriz A é dita *positiva definida*.
- ii) *Positiva semidefinida* se $Q(x) \geq 0$, neste caso a matriz A é dita *positiva semidefinida*.
- iii) *Negativa definida* se $Q(x) < 0$, neste caso a matriz A é dita *negativa definida*.
- iv) *Negativa semidefinida* se $Q(x) \leq 0$, neste caso a matriz A é dita *negativa semidefinida*.
- v) *Indefinida* se $Q(x)$ assume valores positivos e negativos.

A proposição a seguir nos dá ferramentas para classificar uma forma quadrática em positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida ou negativa semidefinida.

Proposição A.2. Sejam $Q(x) = x^t Ax$ uma forma quadrática e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seus autovalores, então:

- i) Q é definida positiva se e somente se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$,
- ii) Q é definida semipositiva se e somente se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$,
- iii) Q é definida negativa se e somente se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$
- iv) Q é definida seminegativa se e somente se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leq 0$,

Demonstração. Como A é simétrica, então é diagonalizável. Logo $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, onde λ_i são os autovalores. Portanto, se $Q(x)$ é positiva definida então para todo x temos $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 > 0$, logo cada autovalor é positivo. Por outro lado, se todos os autovalores são positivos, segue que $Q(x) > 0$. Então o item i fica provado. Analogamente, mostram-se os demais itens. □

Apresentamos agora algumas definições sobre conjuntos e funções côncavos e convexos com o objetivo de estabelecer uma nova classificação para as forma quadráticas.

Definição A.6. Um subconjunto S de \mathbb{R}^n é convexo se para todo $a, b \in S$ o segmento $[a, b]$ está contido em S .

O segmento $[a, b]$ pode ser parametrizado como $(1 - t)a + tb$, para $t \in [0, 1]$.

Definição A.7. *Seja f uma função em n variáveis definidas em um subconjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$. Então f é convexa se o segmento de linha que une dois pontos do gráfico de f nunca estiver abaixo do gráfico. Por outro lado, f é côncava se o segmento de linha que une dois pontos do gráfico de f nunca ultrapassar o gráfico.*

Temos as seguintes condições concretas de convexidade: seja $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tome $a, b \in S$ então

- f é convexa se e somente se $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$, para todo $t \in [0, 1]$
- f é côncava se e somente se $f((1 - t)a + tb) \geq (1 - t)f(a) + tf(b)$, para todo $t \in [0, 1]$.

A seguir é apresentado algumas propriedades de funções côncavas e convexas.

Teorema A.2. *seja $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:*

- i) *Se f é constante ou uma função linear (função polinomial de grau um), então f é convexo e côncavo.*
- ii) *se $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, com $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, onde f_1 e f_2 são funções convexas então f é convexa.*
- iii) *Se $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, com $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, onde f_1 e f_2 são funções côncavas então f é côncava.*

Demonstração. Segue imediatamente das definições. □

Assim, podemos agora definir uma nova classificação para as formas quadráticas relacionando com a classificação de positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida e negativa semidefinida.

Proposição A.3. *Seja $Q(x) = x^t A x$ uma forma quadráticas nas n variáveis $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$, então*

- i) *Q é convexa se e somente se A é positiva semidefinida.*
- ii) *Q é côncava se e somente se A é negativa semidefinida.*

iii) Q é estritamente convexa se e somente se A é positiva definida.

iv) Q é estritamente côncava se e somente se A é negativa definida.

Demonstração. Temos que $Q(x) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, onde λ_i são autovalores. \square

Caminhamos agora para estabelecer as relações entre forma quadrática e matriz Hessiana, com tudo, precisamos primeiramente definir de maneira clara o que é uma matriz Hessiana.

Definição A.8. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em Ω . Definimos a matriz Hessiana \mathcal{H} como sendo a seguinte matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Neste trabalho denotaremos por Δ_k , $1 \leq k \leq n$, o menor principal de ordem k dado pelo determinante da matriz $k \times k$ formada pelas primeiras k linhas e k colunas de \mathcal{H} . Os vetores de \mathbb{R}^n serão denotados usando a identificação com o espaço das matrizes colunas $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ de modo que se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ indicaremos por

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vimos na seção (A) que dada uma matriz simétrica A existe uma forma quadrática Q_A associada, dada por $Q_A(x) = x^T A x$, porém, usando produto interno, podemos enxergar tal aplicação da seguinte forma $Q_A(x) = \langle Ax, x \rangle$.

Lema A.1. *Seja Q a forma quadrática associada a matriz simétrica A então*

$$\vec{\nabla} Q = 2Ax. \quad (\text{A.4})$$

Demonstração. Fazendo $A = (a_{ij})$ observe que o produto Ax pode ser escrito da seguinte forma

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right) \quad (\text{A.5})$$

desse modo, usando o fato de $a_{ij} = a_{ji}$ pois A é simétrica, a forma quadrática será dada por

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^T Ax \\ &= (x_1, \dots, x_n) \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j. \end{aligned}$$

Derivando $Q(x)$ com relação a x_k , notemos que no somatório $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$ quando i e j são simultaneamente diferentes de k , a derivada com relação a x_k se anulam nestas parcelas. Assim, a derivada da forma quadrática será dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_k}(x) &= 2a_{kk}x_k + 2 \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \\ &= 2 \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Como $\vec{\nabla} Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right)$, segue de (A.5) e (A.6) que $\vec{\nabla} Q = 2Ax$. \square

O teorema a seguir no diz que se $x \in \mathbb{R}^n$ está restrita a condição

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 1$$

então a forma quadrática $Q(x)$ assume valor máximo em λ_1 (o maior autovalor) e valor mínimo em λ_n (o menor autovalor).

Teorema A.3. *Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica cujos autovalores em ordem decrescente são $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Se x for restrito a $\|x\| = 1$ relativamente ao produto interno Euclidiano em \mathbb{R}^n , então:*

1. $\lambda_1 \geq x^t Ax \geq \lambda_n$;

2. $x^t Ax = \lambda_n$ se x é um autovetor de A associado a λ_n e $\lambda_1 = x^t Ax$ se x é um autovetor de A associado a λ_1 .

Demonstração. Como A é uma matriz simétrica, segue do teorema (A.1) a existência de uma base ortonormal de \mathbb{R}^n consistindo de autovalores de A , assim, seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a tal base onde v_i são autovetores correspondentes aos autovalores λ_i , com $i = 1, 2, \dots, n$. Agora, tomemos $x \in \mathbb{R}^n$, logo $x = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$, para cada vetor $v_i \in B$ temos

$$\begin{aligned}\langle x, v_i \rangle &= \langle k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n, v_i \rangle \\ &= k_1 \langle v_1, v_i \rangle + k_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + k_n \langle v_n, v_i \rangle\end{aligned}$$

como B é base ortonormal, segue que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle v_j, v_i \rangle = 1$ se $j = i$, logo $\langle x, v_i \rangle = k_i$. Desse modo, podemos reescrever x da seguinte forma $x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle x, v_n \rangle v_n$. Assim,

$$\begin{aligned}Ax &= \langle x, v_1 \rangle Av_1 + \langle x, v_2 \rangle Av_2 + \dots + \langle x, v_n \rangle Av_n \\ &= \lambda_1 \langle x, v_1 \rangle v_1 + \lambda_2 \langle x, v_2 \rangle v_2 + \dots + \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n\end{aligned}$$

Segue que os vetores de coordenadas de x e de Ax com relação a base B são

$$\begin{aligned}(x)_B &= (\langle x, v_1 \rangle, \langle x, v_2 \rangle, \dots, \langle x, v_n \rangle) \\ (Ax)_B &= (\lambda_1 \langle x, v_1 \rangle, \lambda_2 \langle x, v_2 \rangle, \dots, \lambda_n \langle x, v_n \rangle)\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle x, v_1 \rangle^2 + \langle x, v_2 \rangle^2 + \dots + \langle x, v_n \rangle^2 \\ \langle x, Ax \rangle &= \lambda_1 \langle x, v_1 \rangle^2 + \lambda_2 \langle x, v_2 \rangle^2 + \dots + \lambda_n \langle x, v_n \rangle^2\end{aligned}$$

Como λ_1 é o maior autovalor e λ_n é o menor, segue que:

$$\begin{aligned}x^T Ax = \langle x, Ax \rangle &= \lambda_1 \langle x, v_1 \rangle^2 + \lambda_2 \langle x, v_2 \rangle^2 + \dots + \lambda_n \langle x, v_n \rangle^2 \\ &\leq \lambda_1 \langle x, v_1 \rangle^2 + \lambda_1 \langle x, v_2 \rangle^2 + \dots + \lambda_1 \langle x, v_n \rangle^2 \\ &= \lambda_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}x^T Ax = \langle x, Ax \rangle &= \lambda_1 \langle x, v_1 \rangle^2 + \lambda_2 \langle x, v_2 \rangle^2 + \dots + \lambda_n \langle x, v_n \rangle^2 \\ &\geq \lambda_n \langle x, v_1 \rangle^2 + \lambda_n \langle x, v_2 \rangle^2 + \dots + \lambda_n \langle x, v_n \rangle^2 \\ &= \lambda_n\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda_1 \geq x^t Ax \geq \lambda_n$. □

De modo geral, temos o corolário a seguir.

Corolário A.1. *Sejam A uma matriz simétrica e Q a forma quadrática associada a A . Considere o conjunto dos autovalores de A e tomando M e N como sendo o valor máximo e mínimo, respectivamente, que a forma quadrática Q atinge sobre a esfera unitária. Então:*

a) M e m são, respectivamente, o maior e o menor autovalores (reais).

b) $m\|x\|^2 \leq Q(x) \leq M\|x\|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. a) Segue da propriedade de continuidade da forma quadrática que Q assume valor máximo e mínimo no compacto, ou seja, na esfera unitária S^{n-1} . Considere a função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, para cada ponto de máximo e de mínimo x pertence à $S^{n-1} = g^{-1}(0)$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{\nabla} Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda \vec{\nabla} g(x_1, \dots, x_n)$$

pelo lema (A.1) temos que $2AX = \lambda(2x)$, então para tais pontos segue que $Ax = \lambda x$. Tomando x_M tal que $\|x_M\| = 1$ e $Q(x_M) = M$, seja $\lambda_M \in \mathbb{R}$ de modo que $Ax_M = \lambda_M x_M$, temos

$$M = Q(x_M) = \langle Ax_M, x_M \rangle = \langle \lambda_M x_M, x_M \rangle = \lambda_M \|x_M\|^2 = \lambda_M.$$

Analogamente, se considerarmos x_m tal que $\|x_m\| = 1$ e $Q(x_m) = m$ obtemos $m = \lambda_m$, onde $\lambda_m x_m = Ax_m$. Por outro lado, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A , então existe \vec{v} unitário tal que $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$, logo, $Q(\vec{v}) = \langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle = \lambda$. Como \vec{v} é unitário, segue que $m \leq Q(\vec{v}) \leq M$. Portanto, $m \leq \lambda \leq M$, ou seja, temos que os autovalores de A pertencem ao intervalo $[m, M]$, o que implica M e m serem o maior e o menor autovalores, respectivamente.

b) Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$, logo podemos normaliza-lo da seguinte forma $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Usando o fato de que a forma quadrática Q é bilinear, segue que $Q\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) = \frac{Q(\vec{v})}{\|\vec{v}\|^2}$. Assim,

$$m \leq Q\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \leq M \implies m \leq \frac{Q(\vec{v})}{\|\vec{v}\|^2} \leq M \implies m\|\vec{v}\|^2 \leq Q(\vec{v}) \leq M\|\vec{v}\|^2.$$

Portanto, a desigualdade é válida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

□

Usaremos a seguinte notação $B_r(a)$ para nos referir a bola aberta de centro a e raio r .

O lema a seguir servirá de ferramenta para a demonstração o teorema que nos dá a relação dos autovalores da Hessiana de uma função e a forma quadrática relacionada.

Lema A.2. *Seja $f \in C^2(B_r(a))$ com $B_r(a) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, onde a é um ponto crítico de f e $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\vec{v}\| < r$. Então:*

$$f(a + \vec{v}) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j + \|v\|^2 E(a, \vec{v}) \quad (\text{A.7})$$

com $\lim_{\|\vec{v}\| \rightarrow 0} E(a, \vec{v}) = 0$.

Demonstração. Ver [25], pág. 23.

□

Teorema A.4. *Sejam $B_r(a) \in \mathbb{R}^n$, $f : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(B_r(a))$, onde a é um ponto crítico de f e*

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j$$

com $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Podemos fazer as seguintes afirmações sobre os autovalores da Hessiana \mathcal{H} de $f(a)$:

- a) *Se todos são estritamente positivos, f tem um mínimo local em a .*
- b) *Se todos são estritamente negativos, f tem um máximo local em a .*
- c) *Se houver autovalores com sinais opostos, então a é um ponto de sela.*

Demonstração. **a)** Seja $m > 0$ o menor autovalor de $\mathcal{H}(a)$, segue do item (b) do (A.1) que

$$m\|v\|^2 < Q(v) \quad (\text{A.8})$$

, para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Do lema (A.2) (e da definição de convergência) existe $\delta > 0$ tal que $|E(a, v)| < \frac{m}{4}$ se $0 < \|v\| < \delta$ logo,

$$\frac{m}{4}\|v\|^2 < E(a, v) < \frac{m}{4}\|v\|^2, \quad (\text{A.9})$$

assim de (A.8) e (A.9) temos

$$f(a+v) - f(a) = \frac{1}{2}Q(v) + \|v\|^2 E(a, v) > \frac{m}{2}\|v\|^2 - \frac{m}{4}\|v\|^2 = \frac{m}{4}\|v\|^2$$

como por hipótese $m > 0$, segue que $f(a+v) - f(a) > 0$ para todo $v \in B_r(a)$. Portanto, a é um ponto de mínimo.

b) Fazendo $-f$ e seguindo com os cálculos análogos ao do item (a) obtemos o resultado.

c) Sejam λ um autovalor da Hessiana \mathcal{H} e v um autovetor (unitário) associado a λ , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \vec{v}}(a) = Q(v) = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2 = \lambda$$

Logo, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \vec{v}}(a)$ troca de sinal (por hipótese), o que implica que a é um ponto de sela. □

Proposição A.4. *Seja $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$, considere os seus menores principais $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Então existe $N \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\det N = 1$ e*

$$N^t A N = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Demonstração. Ver [25], pág. 13. □

Corolário A.2. *Se A é uma matriz simétrica e $Q(x) = \langle Ax, x \rangle > 0$ para todo $x \neq 0$, então os menores principais $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ de A são estritamente positivos.*

Demonstração. A demonstração será dada por indução sobre n . Para $n = 1$ temos $A = [a]$ logo $Q(x) = \langle ax, x \rangle = a\|x\|^2$, para que $Q(x)$ seja positivo devemos ter $a > 0$. Logo, $a = \Delta_1 > 0$. Suponhamos a afirmação válida para n . Consideremos o caso para $n + 1$. então, $Q(e_1) = \langle Ae_1, e_1 \rangle = a_{11} = \Delta_1 > 0$. Como A é simétrica, segue da proposição (A.4), existe N simétrica inversível tal que $A = N^t B N$ onde

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right)$$

onde A_1 é simétrica de ordem $n \times n$ (pois N é simétrica), observe que A_1 tem os mesmos menores principais que A . Segue do fato de que N é inversível que Q_{A_1} é positiva definida. Logo, por hipótese de indução os menores principais de A_1 são estritamente positivos. Como $\Delta_1 > 0$, os menores principais de B são positivos, o que implica que os menores principais de A também são. □

MATRIZ DA FORMA QUADRÁTICA

$\tilde{Q}_d(X, Y, Z)$

Consideremos a forma quadrática $\tilde{Q}_d(X, Y, Z)$ vista no capítulo (3) dada por:

$$\tilde{Q}_d(X, Y, Z) = \|c\|X^tY + \|b\|X^tO_c^tO_b^tO_a^tZ + \|a\|Y^tZ$$

Vamos mostrar que a matriz da forma $2\tilde{Q}_d$ é a seguinte matriz de blocos :

$$\tilde{M}_d = \begin{pmatrix} 0_4 & \|c\|I_4 & \|b\|O_{abc}^t \\ \|c\|I_4 & 0_4 & \|a\|I_4 \\ \|b\|O_{abc} & \|a\|I_4 & 0_4 \end{pmatrix}$$

De fato, sejam $X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ base dos vetores de entrada da forma quadrática, onde cada vetor W_i tem quatro entradas, todas nulas exceto i -ésima entrada. Observe que ao aplicar a forma quadrática num vetor $\alpha X_i + X_j$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, teremos $\tilde{Q}_d(\alpha X_i + X_j, 0, 0) = 0$. Analogamente para vetores do tipo $\alpha Y_i + Y_j$ e $\alpha Z_i + Z_j$. Portanto as entradas da diagonal da matriz em blocos será de fato a matriz nula de ordem 4. Agora, ao aplicar a forma quadrática em vetores X_i e Y_j , teremos $\tilde{Q}_d(X_i, Y_j, 0) = \|c\|X_i^tY_j$, em que será igual a zero se $i \neq j$ e caso $i = j$ teremos $\|c\|$, logo, as entradas correspondentes aos elementos (1, 2) e (2, 1) da matriz em blocos será a matriz $\|c\|I_4$. Do mesmo modo, concluímos que as entradas (2, 3) e (3, 2) será a matriz $\|a\|I_4$. Agora, a matriz $O_c^tO_b^tO_a^t$ é dada por

$$\left[\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} c_0[b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3] \\ -c_1[-b_1a_0 + b_0a_1 - b_3a_2 + b_2a_3] \\ -c_2[-b_2a_0 + b_3a_1 + b_0a_2 - b_1a_3] \\ -c_3[-b_3a_0 - b_2a_1 + b_1a_2 + b_0a_3] \\ -c_1[b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3] \\ -c_0[-b_1a_0 + b_0a_1 - b_3a_2 + b_2a_3] \\ +c_3[-b_2a_0 + b_3a_1 + b_0a_2 - b_1a_3] \\ -c_2[-b_3a_0 - b_2a_1 + b_1a_2 + b_0a_3] \\ -c_2[b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3] \\ -c_3[-b_1a_0 + b_0a_1 - b_3a_2 + b_2a_3] \\ -c_0[-b_2a_0 + b_3a_1 + b_0a_2 - b_1a_3] \\ +c_1[-b_3a_0 - b_2a_1 + b_1a_2 + b_0a_3] \\ -c_3[b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3] \\ +c_2[-b_1a_0 + b_0a_1 - b_3a_2 + b_2a_3] \\ -c_1[-b_2a_0 + b_3a_1 + b_0a_2 - b_1a_3] \\ -c_0[-b_3a_0 - b_2a_1 + b_1a_2 + b_0a_3] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_0[-b_0a_1 + b_1a_0 + b_2a_3 - b_3a_2] \\ -c_1[b_1a_1 + b_0a_0 - b_3a_3 - b_2a_2] \\ -c_2[b_2a_1 + b_3a_0 + b_0a_3 + b_1a_2] \\ -c_3[b_3a_1 - b_2a_0 + b_1a_3 - b_0a_2] \\ -c_1[-b_0a_1 + b_1a_0 + b_2a_3 - b_3a_2] \\ -c_0[b_1a_1 + b_0a_0 - b_3a_3 - b_2a_2] \\ +c_3[b_2a_1 + b_3a_0 + b_0a_3 + b_1a_2] \\ -c_2[b_3a_1 - b_2a_0 + b_1a_3 - b_0a_2] \\ -c_2[-b_0a_1 + b_1a_0 + b_2a_3 - b_3a_2] \\ -c_3[b_1a_1 + b_0a_0 - b_3a_3 - b_2a_2] \\ -c_0[b_2a_1 + b_3a_0 + b_0a_3 + b_1a_2] \\ +c_1[b_3a_1 - b_2a_0 + b_1a_3 - b_0a_2] \\ -c_3[-b_0a_1 + b_1a_0 + b_2a_3 - b_3a_2] \\ +c_2[b_1a_1 + b_0a_0 - b_3a_3 - b_2a_2] \\ -c_1[b_2a_1 + b_3a_0 + b_0a_3 + b_1a_2] \\ -c_0[b_3a_1 - b_2a_0 + b_1a_3 - b_0a_2] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_0[-b_0a_2 - b_1a_3 + b_2a_0 + b_3a_1] \\ -c_1[-b_1a_2 - b_0a_3 - b_3a_0 + b_2a_1] \\ -c_2[b_2a_2 - b_3a_3 + b_0a_0 - b_1a_1] \\ -c_3[b_3a_2 + b_2a_3 + b_1a_0 + b_0a_1] \\ -c_1[-b_0a_2 - b_1a_3 + b_2a_0 + b_3a_1] \\ -c_0[-b_1a_2 - b_0a_3 - b_3a_0 + b_2a_1] \\ +c_3[b_2a_2 - b_3a_3 + b_0a_0 - b_1a_1] \\ -c_2[b_3a_2 + b_2a_3 + b_1a_0 + b_0a_1] \\ -c_2[-b_0a_2 - b_1a_3 + b_2a_0 + b_3a_1] \\ -c_3[-b_1a_2 - b_0a_3 - b_3a_0 + b_2a_1] \\ -c_0[b_2a_2 - b_3a_3 + b_0a_0 - b_1a_1] \\ +c_1[b_3a_2 + b_2a_3 + b_1a_0 + b_0a_1] \\ -c_3[-b_0a_2 - b_1a_3 + b_2a_0 + b_3a_1] \\ +c_2[-b_1a_2 - b_0a_3 - b_3a_0 + b_2a_1] \\ -c_1[b_2a_2 - b_3a_3 + b_0a_0 - b_1a_1] \\ -c_0[b_3a_2 + b_2a_3 + b_1a_0 + b_0a_1] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_0[-b_0a_3 + b_1a_2 - b_2a_1 + b_3a_0] \\ -c_1[b_1a_3 + b_0a_2 + b_3a_1 - b_2a_0] \\ -c_2[b_2a_3 + b_3a_2 - b_0a_1 - b_1a_0] \\ -c_3[b_3a_3 - b_2a_2 - b_1a_1 + b_0a_0] \\ -c_1[-b_0a_3 + b_1a_2 - b_2a_1 + b_3a_0] \\ -c_0[b_1a_3 + b_0a_2 + b_3a_1 - b_2a_0] \\ +c_3[b_2a_3 + b_3a_2 - b_0a_1 - b_1a_0] \\ -c_2[b_3a_3 - b_2a_2 - b_1a_1 + b_0a_0] \\ -c_2[-b_0a_3 + b_1a_2 - b_2a_1 + b_3a_0] \\ -c_3[b_1a_3 + b_0a_2 + b_3a_1 - b_2a_0] \\ -c_0[b_2a_3 + b_3a_2 - b_0a_1 - b_1a_0] \\ +c_1[b_3a_3 - b_2a_2 - b_1a_1 + b_0a_0] \\ -c_3[-b_0a_3 + b_1a_2 - b_2a_1 + b_3a_0] \\ +c_2[b_1a_3 + b_0a_2 + b_3a_1 - b_2a_0] \\ -c_1[b_2a_3 + b_3a_2 - b_0a_1 - b_1a_0] \\ -c_0[b_3a_3 - b_2a_2 - b_1a_1 + b_0a_0] \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

Ao aplicar a forma quadrática em X e Z teremos $\tilde{Q}_d(X, 0, Z) = \|b\| X_i^t O_c^t O_b^t O_a^t Z_j$, onde devemos fazer a seguinte multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} c_0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ -c_1 & -c_0 & c_3 & -c_2 \\ -c_2 & -c_3 & -c_0 & c_1 \\ -c_3 & c_2 & -c_1 & -c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 \\ -b_2 & -b_3 & -b_0 & b_1 \\ -b_3 & b_2 & -b_1 & -b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_1 & -a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & -a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

Assim, por exemplos, observe que ao aplicar nos vetores $X_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $Z_1 = (1, 0, 0, 0)$ obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} & -c_1[b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3] - c_0[-b_1a_0 + b_0a_1 - b_3a_2 + b_2a_3] \\ & +c_3[-b_2a_0 + b_3a_1 + b_0a_2 - b_1a_3] - c_2[-b_3a_0 - b_2a_1 + b_1a_2 + b_0a_3] \end{aligned}$$

o que é a entrada entrada $(2, 1)$ da matriz O_{abc}^t . analogamente, conseguimos visualizar que ao aplicar a forma quadrática nos vetores X_i e Z_j o resultado é a entrada (j, i) da matriz O_{abc}^t . O que mostra que de fato a matriz \tilde{M}_d é a matriz da forma quadrática $2\tilde{Q}_d$.

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Abordaremos aqui algumas definições de variedades diferenciáveis que nos auxiliam na demonstração do corolário 3.4.

Definição C.1. *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção $\tau \in P(X)$, chamados os abertos da topologia, com as seguintes propriedades:*

1. *emptyset e X pertencem a τ ;*
2. *Se $A_1, A_2 \in \tau$ então $A_1 \cap A_2 \in \tau$;*
3. *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, $A_\lambda \in \tau$, para todo $\lambda \in L$ então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.*

Um *espaço topológico* é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X .

Definição C.2. *(Espaço de Hausdorff) Um espaço topológico X é um espaço de Hausdorff se dados $a, b \in X$, com $a \neq b$, existir U_a vizinhança de a e U_b vizinhança de b tal que $U_a \cap U_b = \emptyset$.*

Um espaço de Hausdorff também é conhecido como Espaço separado.

Exemplo C.1. *O espaço topológico discreto ($\tau = P(X)$, $P(X)$ é o conjunto das partes de X) é um espaço de Hausdorff.*

Exemplo C.2. *Cada espaço métrico é um espaço de Hausdorff.*

Definição C.3. Seja X um espaço com uma topologia τ . Uma coleção de abertos $B \subset \tau$ é dita ser uma base da topologia τ se todo τ -aberto puder ser escrito como união de elementos de B : se $A \in \tau$ então $A = \bigcup_{\lambda} B_{\lambda}$ onde todos os B_{λ} são elementos de B . Note que a união não necessita ser finita ou enumerável.

Observação C.1. Os espaços de Hausdorff com base enumerável de abertos, que, do ponto de vista topológico, se comportam localmente como espaços euclidianos de dimensão n , constituem as variedades topológicas n -dimensionais.

Definição C.4. Dois espaços topológicos dizem-se homeomorfos se existir uma aplicação entre esses espaços que seja contínua, invertível e a sua inversa seja contínua.

Definição C.5. Uma curva (simples) é um subespaço de \mathbb{R}^3 localmente homeomorfo a um intervalo real aberto, ou seja, uma curva é um subconjunto $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, tal que para cada ponto $p \in \gamma$ existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 , e um homeomorfismo $\phi : I \rightarrow \gamma \cap V$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto.

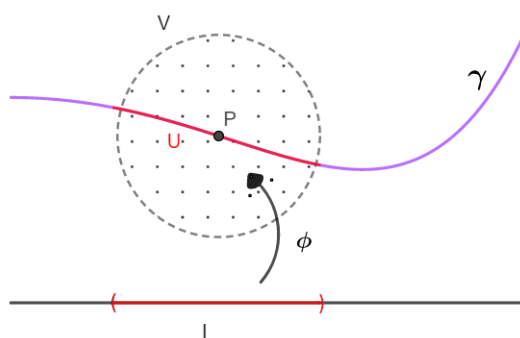


Figura C.1: $\gamma \cap V = U$ é uma vizinhança de p no subespaço $\gamma \in \mathbb{R}^3$.

O homeomorfismo $\phi : I \rightarrow U$ é uma *parametrização* local da curva γ , pois dado $q = (x, y, z) \in U$, existe $t \in I$ tal que $\phi(t) = q$. As coordenadas de q podem ser escritas como funções do parâmetro t , como $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$, chamadas de *Equações Paramétricas* de γ (válidas na vizinhança U). A representação vetorial é dada por $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Dizemos que a parametrização $\phi : I \rightarrow U$ é diferenciável de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) se as equações para métricas admitem derivadas contínuas até ordem k .

A parametrização diferenciável $\phi : I \rightarrow U$ é dita *Parametrização Regular* se o vetor $\frac{dr}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definição C.6. (Parametrizações admissíveis em relação a γ) Dizemos que γ é uma parametrização regular de classe C^k se para cada $p \in \gamma$ existe uma parametrização regular de classe C^k , válida numa vizinhança de P .

Observação C.2. As curvas regulares são as que possuem tangentes bem definida em cada ponto.

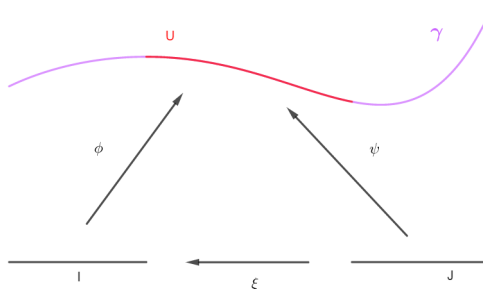
Consideremos:

γ - curva regular de classe C^k

ϕ - parametrização local admissível (válida num aberto $U \subset \gamma$).

$J \subset \mathbb{R}$ - aberto

$\xi : J \rightarrow I$ - homeomorfismo diferenciável de classe C^k , $\xi'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$.

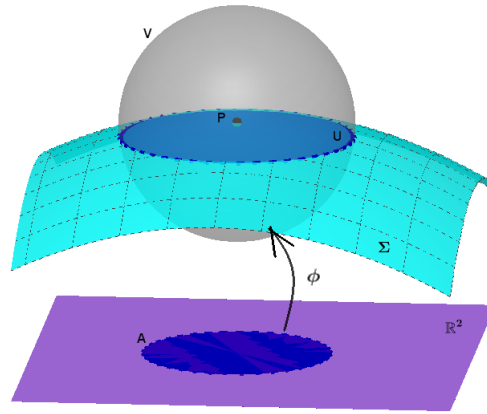


Portanto, o homeomorfismo inverso $\xi^{-1} : I \leftarrow J$ é também diferenciável de classe C^k , e dizemos que ξ é um *difeomorfismo* de classe C^k .

Observação C.3. O homeomorfismo composto $\phi \circ \xi = \psi : J \rightarrow U$ é uma parametrização local admissível em relação a γ .

Observe que o difeomorfismo ξ é justamente o homeomorfismo composto $\phi^{-1} \circ \psi$. De fato, se $\phi : I \rightarrow U$ e $\psi : J \rightarrow V$ são duas parametrizações locais admissíveis em relação a curva γ , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então $\xi = \phi^{-1} \circ \psi$ é um difeomorfismo de $\psi^{-1}(U \cap V)$ sobre $\phi^{-1}(U \cap V)$.

Definição C.7. Uma superfície (simples) é um subespaço de \mathbb{R}^3 localmente homeomorfo a um aberto do plano, ou seja, uma superfície é um subconjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, tal que para cada ponto $p \in \Sigma$ existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e um homeomorfismo $\phi : A \rightarrow \Sigma \cap V$, onde $A \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto. ($\Sigma \cap V = U$ - vizinhança de P no subespaço $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.)



Dado $q \in \Sigma$ então, as coordenadas de q são funções dos parâmetros u e v , $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$, chamadas de equações paramétricas de Σ (válidas na vizinhança U). A representação vetorial é dada por: $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Dizemos que a parametrização local $\phi : A \rightarrow U$ é diferenciável de classe C^k ($\leq k \leq \infty$) se as equações paramétricas admitirem todas as derivadas parciais de ordem $1, 2, \dots, k$ contínuas.

Definição C.8. Uma parametrização diferenciável $\phi : A \rightarrow U$, válida num aberto $U \subset \Sigma$, é regular se os vetores $\frac{\partial r}{\partial u}$ e $\frac{\partial r}{\partial v}$ são l.i., qualquer que seja $(u, v) \in A$.

Definição C.9. (Parametrização admissível em relação a Σ .) Uma superfície Σ é regular de classe C^k , se para todo $p \in \Sigma$ existe uma parametrização regular de classe C^k , válida numa vizinhança de p .

Observação C.4. As superfícies regulares são as que admitem um plano tangente definido em cada ponto.

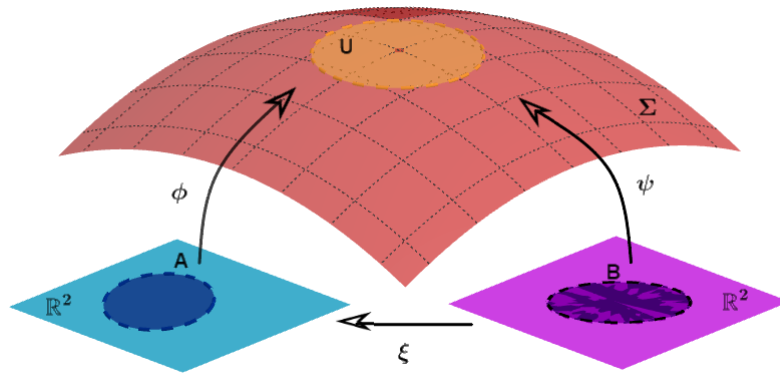
Sejam:

$\phi : A \rightarrow U$ - parametrização local admissível;

Σ - superfície regular de classe C^k ;

$B \subset \mathbb{R}^2$ - aberto;

$\xi : B \rightarrow A$ - homeomorfismo diferenciável de classe C^k tal que o determinante Jacobiano é diferente de 0 em todo ponto de B .



Portanto, o homeomorfismo inverso $\xi^{-1} : A \rightarrow B$ é diferenciável de classe C^k , e dizemos que ϕ é um *difeomorfismo* de classe C^k .

O homeomorfismo $\phi \circ \xi = \psi : B \rightarrow U$ é uma parametrização admissível em relação a Σ e é claro que $\xi = \phi^{-1} \circ \psi$. Com efeito, se $\phi : A \rightarrow U$ e $\psi : B \rightarrow V$ são duas parametrizações locais admissíveis relativamente a superfície regular Σ , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, demonstra-se que $\phi^{-1} \circ \psi = \xi$ é um difeomorfismo de $\psi^{-1}(U \cap V)$ sobre $\phi^{-1}(U \cap V)$.

Definição C.10. Uma variedade topológica de dimensão n é um espaço de Hausdorff \mathcal{M} , com base enumerável de conjuntos abertos, localmente homeomorfo ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Notações: \mathcal{M} é a variedade,

\mathcal{M}^n é a variedade de dimensão n .

Do fato de a variedade \mathcal{M} ser localmente homeomorfa ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n , significa que para cada $p \in \mathcal{M}$, existe uma vizinhança U homeomorfa a um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, assim o homeomorfismo local $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ permite-nos a introdução de coordenadas na variedade \mathcal{M} . No sentido de que para cada $q \in U$ temos $x(q) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, por definição os números reais x_1, \dots, x_n são as coordenadas do ponto p no sistema local $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dada uma cobertura de \mathcal{M} formada de conjuntos abertos U_α , de tal forma que cada U_α é domínio de um sistema local $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, desse modo cada ponto da variedade \mathcal{M} possui coordenadas.

Definição C.11. Um atlas de dimensão n sobre a variedade \mathcal{M} é uma coleção de sistemas de coordenadas locais em \mathcal{M} .

Consideremos:

\mathcal{M}^n - uma variedade

$$\left. \begin{array}{l} x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{- sistemas locais tais que } U \cap V \neq \emptyset$$

Seja $p \in U \cap V$ então $x(p) = (x_1, \dots, x_n)$ e $y(p) = (y_1, \dots, y_n)$. O homeomorfismo

$$\begin{aligned} y \circ x^{-1} : \quad x(U \cap V) &\longrightarrow y(U \cap V) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

é chamada *transformação de coordenadas locais* na variedade \mathcal{M} . A transformação $y \circ x^{-1}$ associa ao ponto $(x_1, \dots, x_n) \in x(U \cap V)$ o ponto $(y_1, \dots, y_n) \in y(U \cap V)$, desse modo podemos enxergá-la como um sistema de equações $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. Diz-se que essa transformação é diferenciável de classe C^k se as funções reais y_1, \dots, y_n admitem derivadas parciais contínuas de ordens $1, \dots, k$. Quando a transformação inversa $x \circ y^{-1}$ é também diferenciável de classe C^k , dizemos que $y \circ x^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k , e neste caso o jacobiano $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ é diferente de zero em todo ponto onde é definido.

Um atlas \mathcal{A} sobre uma variedade topológica \mathcal{M} diz-se diferenciável de classe C^k as transformações de coordenadas locais $y \circ x^{-1}$, correspondentes a todo par de sistemas $x, y \in \mathcal{A}$, são diferenciáveis de classe C^k , e então tais transformações são difeomorfismos de classe C^k .

Definição C.12. *Sejam \mathcal{A} um atlas diferenciável de classe C^k sobre a variedade topológica \mathcal{M}^n e $z : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais. Se a transformação de coordenadas $z \circ x^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k , para qualquer sistema local $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pertencente a \mathcal{A} , tal que $V \cap U \neq \emptyset$, então dizemos que z é admissível em relação ao atlas \mathcal{A} .*

Definição C.13. *Um atlas \mathcal{A} é máximo quando todo sistema local admissível em relação a \mathcal{A} pertence ao atlas \mathcal{A} .*

Definição C.14. *Uma variedade diferenciável de dimensão n e de classe C^k é uma variedade topológica \mathcal{M}^n dotada de um atlas diferenciável máximo de classe C^k .*

Espaço vetorial tangente a uma variedade diferenciável

Consideremos \mathcal{M} uma variedade de dimensão n , $p \in \mathcal{M}$ e \mathcal{M}_p a coleção dos sistemas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $p \in U$.

Definição C.15. Um vetor tangente à variedade \mathcal{M} no ponto p é uma função $v : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que dados $x, y \in \mathcal{M}_p$, com $v(x) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $v(y) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ então

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \alpha_j, \quad i = 1, \dots, n$$

onde $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)$ é a matriz Jacobiana da transformação de coordenadas $y \circ x^{-1}$, calculada no ponto $x(p) \in \mathbb{R}^n$. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as componentes do vetor tangente v no sistema x .

Denotando por M_p o conjunto de todos os vetores tangentes à variedade \mathcal{M} no ponto p e definindo:

- Soma de dois vetores: $u, v \in M_p$, $u + v \in M_p$ tal que $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$, para todo sistema $x \in \mathcal{M}_p$.
- Multiplicação por escalar: dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in M_p$, $\lambda u \in M_p$ tal que $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$, para todo $x \in \mathcal{M}_p$.

Desse modo (é possível mostrar que) o conjunto M_p apresenta uma estrutura algébrica de espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Sendo então M_p o espaço vetorial tangente a variedade \mathcal{M} no ponto p . O vetor zero desse espaço tangente é o vetor $0 \in M_p$ tal que $0(x) = (0, \dots, 0)$ para todo sistema $x \in \mathcal{M}_p$.

Consideremos um sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $p \in U$. Sejam X_1, \dots, X_n os vetores tangentes a \mathcal{M} em p , dados por:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= (1, 0, \dots, 0) \\ X_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ X_n(x) &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

é possível mostrar que $\{X_1, \dots, X_n\}$ é a base de M_p associado ao sistema x (ver página 17 da referência [7]).

Aplicações diferenciáveis

Definição C.16. *Sejam \mathcal{M}^n e \mathcal{N}^n duas variedades diferenciáveis de classe C^k . Dizemos que uma aplicação $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é diferenciável de classe C^h ($h \leq k$) se:*

1. *Para todo $p \in \mathcal{M}^n$ e todo sistema local $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(p) \in V$, existe um sistema local $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $p \in U$ e $\phi(U) \subset V$.*
2. *A aplicação composta $y \circ \phi \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$ é diferenciável de classe C^h .*

Observação C.5. *Se ϕ é diferenciável então ϕ é contínua. Com efeito, segue de (1) que dado $p \in \mathcal{M}^n$ e o sistema local $y : B_\epsilon(\phi(p)) \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe um sistema local $x : B_\delta(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(U) \subset B_\epsilon(\phi(p))$. Logo, para todo $a \in B_\delta(p)$ temos que $|a-p| < \delta \implies |\phi(a) - \phi(p)| < \epsilon$.*

Segue de (2) que se $q \in U$ com $x(q) = (x_1, \dots, x_m)$ e $y(\phi(q)) = (y_1, \dots, y_n)$ então a aplicação $y \circ \phi \circ x^{-1}$ é representada por $y_i = y_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, n$, onde y_1, \dots, y_n são funções que admitem derivadas parciais de ordem $1, \dots, h$ em todo ponto do seu domínio $x(U)$.

Vamos agora definir a diferencial de uma aplicação diferenciável. Para tanto, consideremos \mathcal{M}^m , \mathcal{N}^n variedades e $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ uma aplicação diferenciável. Então, ϕ induz em cada ponto $p \in \mathcal{M}$, uma aplicação linear $\phi_p : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{N}_{\phi(p)}$, de modo que a cada vetor tangente a \mathcal{M} em p é levado pela ϕ_p num vetor tangente a \mathcal{N} em $\phi(p)$. De fato, fazendo $\phi(p) = q$ e considerando sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, em \mathcal{M} , e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, em \mathcal{N} , tais que $p \in U$ e $q \in V$. do fato de ϕ ser diferenciável, podemos assumir que $\phi(U) \subset V$. Sabemos que a aplicação ϕ representa-se, em termos dos ditos sistemas lineares, por equações do tipo $y_i = y_i(x_1, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, n$. Seja $u \in \mathcal{M}_p$ um vetor cujas componentes na base associada ao sistema x são $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Por definição, a aplicação ϕ_p associa ao vetor u um vetor $v \in \phi_p(u) \in \mathcal{N}_q$, cujas componentes $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ na base associada ao sistema y são, por definição de vetor tangente:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p), \quad i = 1, \dots, n.$$

A matriz da aplicação linear ϕ_p , relativamente as bases associadas aos sistemas de coordenadas x e y , é a matriz jacobiana $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \right)$ da aplicação diferenciável $y \circ \phi \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow$

$y(V)$, calculada no ponto $x(p)$. Segue da definição de ϕ_p que esta é linear. É possível mostrar que ϕ_p não depende da escolha dos sistemas lineares (ver página 20 da referência [7]). A aplicação $\phi_p : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{N}_q$ diz-se diferencial de $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ no ponto $p \in \mathcal{M}$.

Definição C.17. Dizemos que ϕ é regular no ponto $p \in \mathcal{M}$ quando a aplicação linear induzida $\phi_p : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{N}_{\phi(p)}$ é biunívoca. Neste caso, a imagem $\phi_p(\mathcal{M}_p)$ é um subespaço de dimensão m do espaço vetorial $\mathcal{N}_{\phi(p)}$, e claro que $m \leq n$.

Uma aplicação regular $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma aplicação que é regular em todo ponto $p \in \mathcal{M}$.

Definição C.18. A aplicação $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é uma imersão quando é ao mesmo tempo uma aplicação regular e um homeomorfismo de \mathcal{M} em \mathcal{N} .

Teorema C.1. (Teorema da Imersão de Whitney) Se M é uma variedade diferenciável suave de dimensão $n > 1$, então existe uma imersão $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$.

Seja $N \subset M$ a aplicação inclusão é dada por $i : N \rightarrow M$ como sendo $i(x) = x$, para todo $x \in N$.

Definição C.19. Seja M^m e N^n duas variedades e considere $f : M \rightarrow N$. Dizemos que f é um mergulho se for imersão e homeomorfismo (da imagem) com a topologia induzida na imagem.

ALGUNS CONCEITOS E RESULTADOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

D.1 Classificação de Equações Diferenciais Parciais

Uma Equação Diferencial Parcial pode ser classificada com relação a ordem, grau, linearidade e tipo. Esta seção é dedicada a definição destas classificações, para mais detalhes o leitor pode consultar...

A ordem de uma equação diferencial parcial é a ordem da mais alta derivada que ocorre na equação.

Exemplo D.1. *O exemplo mais clássico de uma EDP de segunda ordem é a equação de Laplace dada por*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

O grau de uma EDP é o expoente da derivada mais alta quando a equação está escrita em uma forma semelhante a uma função polinomial em que as potências fazem o papel das derivadas da ordem respectiva.

Exemplo D.2. *A Equação Diferencial Parcial dada por*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \sin(xy)$$

tem grau 2.

Podemos classificar as EDP's de acordo com a linearidade desta. Vamos definir estas classificações para as EDP's de ordem dois, visto que este é o foco do trabalho. Assim dizemos que uma EDP é

a) Linear: se F (definida em (2.6)) é linear em relação a u e a todas as suas derivadas parciais, ou seja, apresenta a forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, a_{ij}, b_i, c e f são funções contínuas definidas em Ω e as funções a_{ij} não são todas nulas. Além disso, dizemos que a EDP é homogênea se $f \equiv 0$.

b) Semi-linear: quando F é não linear somente com relação a u , mas é linear com relação a todas as suas derivadas parciais, logo apresenta a forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(u, x)u = 0$$

c) Quase-linear: quando F é linear somente com relação às derivadas parciais da ordem da equação.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, u, x \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(u, x)u = 0$$

d) Totalmente não-linear: quando F é não linear com relação às derivadas parciais da ordem da equação.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, u, x \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, u, x \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(u, x)u = 0$$

Exemplo D.3. *Veja no quadro a seguir alguns exemplos de EDP e suas classificações quanto a ordem e a linearidade.*

<i>Equação do transporte</i>	$u_t + u_x = 0$	<i>primeira ordem, linear</i>
<i>Equação de Laplace</i>	$\Delta u = 0$	<i>segunda ordem, linear</i>
<i>Equação da difusão (ou do calor)</i>	$u_t = \Delta u$	<i>segunda ordem, linear</i>
<i>Equação da onda</i>	$u_{tt} = \Delta u$	<i>segunda ordem, linear</i>
<i>Equação do p-Laplaciano</i>	$\operatorname{div}(\nabla u ^{p-2}\nabla u) = 0$	<i>segunda ordem, quase linear</i>
<i>Equação de Monge-Ampère</i>	$\det(D^2u) = f$	<i>segunda ordem, totalmente não linear</i>
<i>Equação de Poisson não linear</i>	$\Delta u = f(u)$	<i>segunda ordem, semilinear</i>
<i>Equação do telégrafo</i>	$U_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u_t + \gamma^2 u$	<i>segunda ordem, linear</i>

D.2 Operador Lineares de 2ª Ordem

Um operador linear de segunda ordem é dado pela expressão a seguir

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad (\text{D.1})$$

onde $u \in C^2(\Omega)$ e os coeficientes $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas. Ao menos que se diga o contrário $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto limitado. Usando a notação $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, podemos reescrever o operador (D.1) da seguinte forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x)u. \quad (\text{D.2})$$

O Teorema do Schwarz nos garante que o fato de $u \in C^2(\Omega)$ as derivadas parciais de segunda ordem mistas são iguais, ou seja, $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$, para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Desse modo, o operador (D.2) será reescrito como

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} (a_{ij}(x) + a_{ji}(x)) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x)u. \quad (\text{D.3})$$

e podemos supor, sem perda de generalidade, que para cada $x \in \Omega$ a matriz

$$A(x) := \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

é uma matriz simétrica.

Definição D.1. Dizemos que o operador L definido em (D.2) é elíptico no ponto $x \in \Omega$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ definida em (D.4) é positiva definida, isto é, se $\lambda(x)$ denota o menor autovalor de A em x , então

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)\|\xi\|^2 > 0 \quad (\text{D.5})$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. O operador L é elíptico em Ω se for elíptico em cada ponto de Ω .

Definição D.2. Dizemos que o operador L definido em (D.2) é uniformemente elíptico em Ω se existe $\theta_0 > 0$ tal que $\lambda(x) \geq \theta_0$ para todo $x \in \Omega$, ou seja, vale a seguinte desigualdade

$$\xi A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta_0\|\xi\|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{D.6})$$

Seja e_i o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n , fazendo $\xi = e_i$ obtemos

$$e_i A(x) e_i = a_{ii}(x) \geq \theta_0,$$

$i = 1, 2, \dots, n, x \in \Omega$.

D.3 Solução Fraca

Dizemos que um dado problema para uma equação diferencial parcial é bem colocado se, primeiro, de fato o problema tem uma solução e esta é única, segundo, a solução depende continuamente dos dados fornecidos no problema. A segunda condição é importante para modelar problemas como os problemas físicos, assim quando mudamos as condições sobre as hipóteses é importante que a solução represente o modelo idealizado. Apesar de que para muitos problemas a unicidade não é de se esperar. Nestes casos, as principais tarefas matemáticas são classificar e caracterizar as soluções. Claramente, desejamos resolver a EDP de modo que ela satisfaça as duas condições.

Ainda não deixamos claro o que queremos dizer com solução de uma EDP. Pedir que a solução seja infinitamente diferenciável é exigir demais, logo o mais sensato é exigir que uma solução de um EDP de ordem k seja pelo menos k vezes continuamente diferenciável. Desse modo, pelo menos todas as derivadas que aparecem na EDP existirão e serão contínuas,

embora talvez certas derivadas superiores não existam. Vamos chamar tal uma solução com tanta suavidade uma solução clássica da EDP, que segundo Evans esta é certamente a noção mais óbvia de solução.

Algumas equações diferenciais parciais específicas podem ser resolvidas obtendo a solução clássica, porém muitas outras não são possíveis. Por exemplos, em geral, a lei de conservação não tem solução clássica, mas modela bem certos casos se permitirmos soluções generalizadas ou fracas adequadamente definidas. Logo, certas EDP's nos levam a acreditar pela estrutura da equação que esta não possui solução clássica ou suave. Na maioria das vezes, enquanto ainda esperamos alcançar as condições de existência, unicidade e continuidade dos dados, nos leva a investigar uma classe mais ampla de candidatos a soluções. E, de fato, mesmo para aquelas EDP's que acabam sendo solucionáveis, geralmente é mais conveniente inicialmente procurar por algum tipo apropriado de solução fraca.

A questão é que se desde o início exigimos que nossas soluções sejam muito regulares, digamos k vezes continuamente diferenciáveis, então geralmente teremos muita dificuldade em encontrá-las, já que nossas provas devem necessariamente incluir demonstrações intrincadas as funções que estamos construindo são de fato suaves. Para isto usamos a seguinte estratégia, consideramos separadamente os problemas de existência e suavidade. A ideia é definir para uma dada EDP uma noção razoavelmente ampla de uma solução fraca, com a expectativa de que não estamos pedindo muito pela suavidade dessa solução fraca, pode ser mais fácil estabelecer sua existência, singularidade e dependência contínua dos dados fornecidos. Assim muitas vezes é importante procurar provar a boa disposição em alguma classe apropriada de soluções fracas ou generalizadas.

Para várias equações diferenciais parciais, isso é o melhor que pode ser feito. Para outras equações, podemos esperar que a nossa solução fraca acabe sendo suave o suficiente para qualificar como uma solução clássica. Isso leva à questão da regularidade das soluções fracas, muitas vezes a existência de soluções fracas depende de estimativas bastante simples, além de idéias de análise funcional, enquanto a regularidade das soluções fracas, quando verdadeiras, geralmente se baseia em muitos cálculos intrincados de cálculo, como feito em [16].

Desse modo, consideremos a equação diferencial parcial da forma

$$F(D^2u) = 0 \tag{D.7}$$

definida em \mathbb{R}^{12} . Assumindo que esta é uma equação elíptica totalmente não-linear apresentaremos neste trabalho um estudo a regularidade de suas soluções.

Uma função u é **solução fraca** de (D.7) se é de classe $C^2(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, e satisfaz (D.7). Desde que F é uma função suave (C^α) dos seus argumentos, qualquer solução clássica de (D.7) é uma solução suave ($C^{\alpha+2}$) (ver lema ?? em D).

Neste trabalho não nos preocupamos com regularização da solução, mas deixamos aqui definido o que é uma estimativa a priori.

Uma estimativa a-priori para soluções de uma equação diferencial parcial é uma desigualdade que é válida para todas as soluções de um determinado problema cujos os dados e coeficientes obedecem a certas restrições. Isto é, existe uma constante c tal que se u é uma solução do problema então $\|u\| \leq c$ em alguma norma $\|\cdot\|$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. D. Aleksandrov, *Research into maximum principle*. VI, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Ser. Math. No. 1 (1961), 3-20 in Russian.
- [2] A. D. Aleksandrov, *Uniqueness conditions and estimates for solutions of the Dirichlet problem*, Vestnik Leningrad. Univ., Vol. 18, No. 3 (1963), 5-29. English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 68 (1968), 89-119.
- [3] A. Farina, *Two results on entire solutions of Ginzburg-Landau system in higher dimensions*, J. Funct. Anal. 214 (2004), 386{395. MR2083306 (2005g:35093).
- [4] A. Howard, R. Chris, *Álgebra linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. 572 p.
- [5] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.
- [6] E. Calabi, *Improper affine hypersurfaces of convex type and a generalization of a theorem by K. Jorgens*, Michigan. Math. J. Vol. 5 (1958), 2.
- [7] E. D. Júdice, *Publicações Matemáticas: O teorema de Sard e suas aplicações*, Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 1961.
- [8] H.B. Lawson and R. Osserman, *Non-existence, non-uniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system*, Acta Math. 139 (1977), 1{17. MR0452745 (80b:35059).

- [9] H. Ishii, P. L. Lions, *Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Second-Order Elliptic Partial Differential Equations*, Journal of Differential Equations 83, 26-78 (1990).
- [10] J. F. Adams, Zafer Mahmud, Mamoru Mimura- *Lectures on exceptional Lie groups*- University of Chicago Press (1996).
- [11] J. Ge and Y. Xie, *Gradient map of isoparametric polynomial and its application to Ginzburg-Landau system*, J.Funct. Anal. 258 (2010), 1682{1691. MR2566315 (2011d:53140).
- [12] J. W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math. 64 (1956), 399{405. MR0082103 (18,498d).
- [13] K. A. Zhevlakov, A. M. Slinko, I.P. Shestakov, A. I. Shirshov , *Rings that are nearly associative*. New York: Academic Press, 1982. 372p.
- [14] L. Caffarelli, X. Cabré, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995.
- [15] L. C. Evans, *Classical solutions of fully nonlinear convex, second order elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 25 (1982), 333-363.
- [16] L. C. Evans, *Partial differential equations*-American Mathematical Society (1998).
- [17] M. Atiyah, V.G. Drinfel'd, N.J. Hitchin and Yu. I. Manin, *Construction of Instantons*, Phys. Lett. A 65 (1978), 185{187. MR0598562 (82g:81049).
- [18] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions - *USER'S GUIDE TO VISCOSITY SOLUTIONS OF SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*-Volume 27, Number 1, July 1992, Pages 1-67
- [19] M. V. Safonov, *Harnack inequality for elliptic equations and the Hölder property of their solutions*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) Vol. 96 (1980), 272-287 in Russian. English translation in J. Soviet Math. Vol. 21 No. 5 (1983), 851-863.
- [20] N. Nadirashvili, *Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators*. An. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sc. 24 (1997), 537-550. MR1612401 (99b:35042).

- [21] N. Nadirashvili, S. Vladut, *Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations*, *Geom. Func. An.* 17 (2007), 1283-1296.
- [22] N. Nadirashvili, V. Tkachev, S. Vladut, *Nonlinear elliptic equations and nonassociative algebras*, Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2014.
- [23] N. Trudinger, *Fully Nonlinear PDEs in Geometry*, CBMS Lectures, fonte: [https : //maths – people.anu.edu.au/ neilt/RecentPapers/notes1.pdf](https://maths-people.anu.edu.au/neilt/RecentPapers/notes1.pdf), visto em: 01/08/2019, às 8:51.
- [24] N. V. Krylov, M. V. Safonov, *A certain property of solutions of parabolic equations with measurable coefficients*, *Izvestija Akad. Nauk SSSR, ser. mat.* Vol. 44 No. 1 (1980), 161-175. English translation in *Math. USSR Izvestija*, Vol. 16, No. 1 (1981), 151-164.
- [25] O. R. B de Oliveira, *O Hessiano Em Duas E Várias Variáveis*, fonte: [https : //www.ime.usp.br/ oliveira/ELE – HESSIANO.pdf](https://www.ime.usp.br/oliveira/ELE-HESSIANO.pdf), visto em: 04/08/2019, às 09:21.
- [26] P. M. M. de Paula, *Álgebras de Divisão Alternativas sobre \mathbb{R} com Dimensão Finita*, fonte: [https : //www.ime.unicamp.br/ ~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/paula_2013.pdf](https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/paula_2013.pdf), visto em: 22/05/2019, às 08:50.
- [27] R. Harvey and H. B. Lawson Jr., *Calibrated geometries*, *Acta Math.* 148 (1982), 47{157. MR666108 (85i:53058).
- [28] R. J. Biezuner, *Notas de aula: Equações Diferenciais Parciais I/II*, fonte: [http : //arquivoescolar.org/bitstream/arquivo – e/151/1/edp.pdf](http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/151/1/edp.pdf), visto em 29/08/2019, às 16:00.
- [29] S. Bernstein, *Sur la généralization du problèm de Dirichlet.* (Deuxième partie), *Math. Annalen.*, Vol. 69 (1910), 82-136.