UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTASTÍCA

Dissertação de Mestrado

Teorias de bifurcação local e global e aplicações

Erick Rodolfo Souza Trindade

Março de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTASTÍCA

Erick Rodolfo Souza Trindade

Teorias de bifurcação local e global e aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da UFPA, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

Março de 2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S719t Souza Trindade, Erick Rodolfo
Teorias de bifurcação local e global e aplicações / Erick Rodolfo Souza Trindade. — 2020.
ix, 55 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. Bifurcação; Crandall-Rabinowitz; Lyapunov-Schimdt; Autovalores. I. Título.

CDD 515.35

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Erick Rodolfo Souza Trindade

Teorias de bifurcação local e global e aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da UFPA, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 23 de Março de 2020

Resultado: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior (Orientador)
PPGME/PDM/UFPA

Amanda Suellen Sena Corrêa Leão.

Prof^a. Dra. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão
Faculdade de Matemática - UFPA

Denilson da S Pereira

Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Dedicatória

À minha mãe, Rose Mary Souza Trindade
Ao meu irmão, Joelson Trindade Lopes

Agradecimentos

Agradeço à Deus, pela vida e tudo que me proporcionou.

À minha mãe Rose Mary Souza Trindade, agradeço por todo amor, carinho e cuidado.

Aos meus irmãos Joelma, Arlete, Zelma, Adailton, Ednelson e Joelson, por sempre me apoiarem e estarem ao meu lado.

Ao meu professor e orientador João Rodrigues dos Santos Júnior, pela confiança, paciência, instrução e apoio que recebi.

À todos os professores que contribuíram positivamente na minha formação.

Aos amigos que me apoiaram.

À coordenação do PPGME.

À Capes, pelo apoio financeiro.

À Universidade Federal do Pará, pela formação.

Resumo

Neste trabalho faremos uma introdução à teoria de bifurcação, ramo da matemática de grande importância por apresentar métodos de resolução para equações diferenciais e possuir várias aplicações na física-matemática. Demonstraremos um teorema local e um global de bifurcação e aplicaremos no estudo de uma família de equações diferenciais parciais não lineares.

Palavras chave: Bifurcação; Crandall-Rabinowitz; Lyapunov-Schimdt; Autovalores.

Abstract

In this work, we will introduce the bifurcation theory, a branch of mathematics of great importance for presenting methods of solving differential equations and having several applications in mathematical physics. We will demonstrate a local and a global bifurcation theorem and apply it to the study of a family of partial non-linear differential equations.

Key Words: Bifurcation; Crandall-Rabinowitz; Lyapunov-Schimdt; Eigenvalues.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Bifurcação Local **4**

1.1 Teorema de Crandall - Rabinowitz 5

1.2 Métodos de redução Lyapunov - Schimdt 12

2 Aplicação do Teorema de Crandall-Rabinowitz **18**

3 Bifurcação Global **24**

4 Aplicação do Teorema Global de Rabinowitz **34**

A Cálculo em espaços de Banach **39**

B Outros resultados importantes **48**

Introdução

Neste trabalho investigaremos a estrutura local e global do conjunto de soluções não triviais para uma família de equações diferenciais parciais em espaços de Banach. Os métodos descritos se enquadram na Teoria de Bifurcação, que possui uma grande variedade de aplicações e é objeto de estudos de vários trabalhos da literatura. Nossa principal referência é [10], onde se encontram os principais resultados aqui apresentados.

O termo "bifurcação" foi ultilizado pela primeira vez por Henri Poincaré em [20], publicado em 1885. Desde então o desenvolvimento da teoria provocou a produção de um grande acervo de trabalhos acadêmicos com diversas aplicações na física e biologia, além das aplicações em outros ramos da matemática. Podemos ver, por exemplo, as relações entre bifurcação e estruturas elásticas, equações de reação-difusão, dinâmica dos fluidos, astrofísica, reações químicas, mecânica estatística, ondas químicas, onda de choques cinéticas, fenômenos em biomatemática e outras nas referências [4], [5], [6],[11] ,[17], [21] e [25].

Em geral, temos uma aplicação entre espaços de Banach, $\mathcal{F} : E_1 \to F$, e conhecemos uma curva de soluções $C = \{u(t) : t \in [a, b]\}$ da equação $\mathcal{F}(u) = 0$. Dizemos que uma solução $u(t_0) \in C$ é um ponto de bifurcação para a equação $\mathcal{F}(u) = 0$ se, toda vizinhança de $u(t_0)$ em E_1 possuir uma solução $u \notin C$. Esta foi a descrição de forma mais geral dada por Rabinowitz em [23]. Neste trabalho daremos atenção especial às equações da forma $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real, $\mathcal{F} : E_1 = \mathbb{R} \times E \to F$, e a curva de soluções conhecidas é $\{(\lambda, 0) \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$, ou seja, uma curva de soluções triviais, e portanto, a birfurcação (quando existe) são de soluções não triviais.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos e um apêndice. No capítulo

1, introduzimos a noção de bifurcação para uma equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, onde $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R} \times E, F)$ é uma aplicação entre espaços de Banach tal que $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, e damos condições necessárias para que um tal ponto seja de bifurcação. Em seguida apresentamos o principal resultado do capítulo 1, o teorema de Crandall-Rabinowitz, publicado pela primeira vez em [7], no ano de 1971. Quando $\mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)$ é um operador de Fredholm de índice zero e com núcleo unidimencional, o teorema de Crandall-Rabinowitz dá condições suficientes para a existência de uma curva contínua $(\lambda(s), u(s))$ de soluções não triviais (quando $s \neq 0$) bifurcando a partir de um certo $\lambda^* \in \mathbb{R}$, sendo estas as únicas soluções numa vizinhança de $(\lambda^*, 0)$ em $\mathbb{R} \times E$, dando a este teorema um caráter local. Além disso, se $\mathcal{F} \in C^k$, então $\lambda, u \in C^{k-1}$.

Ainda no capítulo 1, descrevemos o método redução de Lyapunov-Schimdt, ultilizado para resolver equações da forma $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, para o caso em que o núcleo V e a imagem R de $\mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)$ possuam complementares topológicos W e Z respectivamente, de modo que a equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ seja equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} P\mathcal{F}(\lambda, v + w) = 0 \\ Q\mathcal{F}(\lambda, v + w) = 0 \end{cases}$$

onde P e Q são as projeções de F sobre Z e R respectivamente, e $(v, w) \in V \times W$. Apesar de termos aumentado o número de equações, ganhamos a vantagem de poder reduzir a dimensão do espaço em que queremos resolver a equação $\mathcal{F}(\lambda, 0)$.

No capítulo 2, aplicaremos a teoria para estudar as soluções da família de equações da forma

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + f(x, u), & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. O primeiro resultado é a garantia da existência de soluções não triviais para o problema acima. A ideia é definir

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = \Delta u + \lambda u + f(\lambda, u)$$

de modo que as soluções da equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ sejam também soluções da equação em (1), e com algumas hipóteses sobre f, aplicaremos o teorema de Crandall-Rabinowitz para garantir que, a partir de qualquer autovalor simples λ_k de $-\Delta$, bifurque uma curva de soluções não triviais $(\lambda(s), u(s))$ da equação

$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, que são também soluções de (1). Além disso, devido as propriedades da curva $(\lambda(s), u(s))$, mostraremos que a sua direção depende do sinal de $\int_\Omega f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 dx$, onde φ_k é autofunção de λ_k. Porém, esta fórmula pode não ser suficiente para determinar a direção da bifurcação, como no caso particular em que $f(x,u) = a(x)u^p$, onde ocorre $\int_\Omega f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 dx = 0$. Neste caso, mostraremos que a direção depende do sinal de $\int_\Omega a(x)\varphi_k^{p+1} dx$.

No capítulo 3, estudaremos a família de equações da forma

$$u - T_\lambda u = 0 \tag{2}$$

onde $T_\lambda u = \lambda L u + h(\lambda, u)$, sendo $L : E \to E$ um operador linear compacto, $h : \mathbb{R} \times E \to E$ compacto e $h(\lambda, u) = o(\|u\|)$ uniformemente sobre intervalos limitados de $\mathbb{R}$quando $\|u\| \to 0$. O principal resultado deste capítulo é o teorema de Rabinowitz, publicado pela primeira vez em 1971, em [23]. Quando $1/\lambda^*$ é autovalor de multiplicidade ímpar de L, então o tereoma de Rabinowitz garante a existência de uma componente conexa maximal Σ no fecho das soluções não triviais de (2), tal que $(\lambda^*, 0) \in \Sigma$ e pelo menos um dos itens abaixo ocorre:

i) Σ é ilimitado.

ii) Σ passa por outro ponto $(\mu, 0) \neq (\lambda^*, 0)$, onde $1/\mu$ é autovalor de L.

Veja que este teorema dá informações globais sobre a estrutura do conjunto solução de (2).

No capítulo 4, agora já com a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, retomamos o problema (1) para obter informações globais sobre o conjunto solução. O principal resultado deste capítulo garante, sob certas condições, a existência de um contínuo maximal $\mathcal{C}_1$ (que passa por $(\lambda_1, 0)$) no fecho das soluções não triviais do problema (1), e além disso, $\mathcal{C}_1 \setminus \{(\lambda_1, 0)\}$ é união de duas componentes conexas $\mathcal{C}_1^+$ e $\mathcal{C}_1^-$, onde $\mathcal{C}_1^+$ é constituído apenas de soluções positivas, e $\mathcal{C}_1^-$ é constituído apenas de soluções negativas, e ambas as componentes ilimitadas.

No apêndice, apresentamos alguns conceitos e teoremas necessários (sem demonstração) para a melhor compreenção deste trabalho, principalmente em análise funcional, cálculo em espaços de Banach e a teoria do grau topológico.

Capítulo 1

Bifurcação Local

Neste capítulo aprensentamos o método de bifurcação para o estudo da existência de soluções de equações da forma

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0 \tag{1.1}$$

onde $\lambda \in \mathrm{I\!R}$ será o parâmetro de bifurcação, E e F espaços de Banach e $\mathcal{F} : \mathrm{I\!R} \times E \to F$ uma função que satisfaz as seguintes condições

(H1) $\mathcal{F} \in C^2(\mathrm{I\!R} \times E, F)$

(H2) $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0 \ \ \forall \lambda \in \mathrm{I\!R}$

Por (H2), temos que $u = 0$ é solução da equação (1.1) para todo λ, e tal solução é chamada de solução trivial. Seja S o conjunto das soluções não triviais, ou seja,

$$S = \{(\lambda, u) \in \mathrm{I\!R} \times E \; ; u \neq 0, \mathcal{F}(\lambda, u) = 0\}.$$

Definição 1.1 *Diremos que λ^* é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ da solução trivial quando $(\lambda^*, 0) \in \overline{S}$, isto é, quando existe uma sequência $(\lambda_n, u_n) \in \mathrm{I\!R} \times E$ tal que $u_n \neq 0$, $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$ e $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda^*, 0)$.*

Dizer que um ponto λ^* não é ponto de bifurcação significa que existe uma vizinhança aberta $V \subset \mathrm{I\!R} \times E$ do ponto $(\lambda^*, 0)$ tal que $V \cap S = \emptyset$, e consequentemente

$$\begin{cases} (\lambda, u) \in V \\ \mathcal{F}(\lambda, u) = 0 \end{cases} \Longrightarrow u = 0.$$

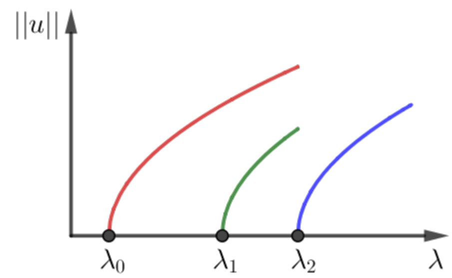


Figura 1.1: Pontos de bifurcação.

1.1 Teorema de Crandall - Rabinowitz

O principal objetivo desta seção é apresentar o teorema de Crandall - Rabinowitz, que dá condições suficientes para que um parâmetro λ^* seja ponto de bifurcação e descreve localmente a família de soluções nas proximidades de $(\lambda^*, 0)$.

Teorema 1.1 *Seja $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \to F$ uma aplicação com as hipóteses (H1) e (H2). Se λ^* é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)$ não é invertível.*

Demonstração: Suponhamos (para chegar numa contradição) que $\mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)$ seja invertível. Então o teorema da função implícita garante que em alguma vizinhança $\Theta \times V \subset \mathbb{R} \times F$ de $(\lambda^*, 0)$, as únicas soluções da equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ constituem uma curva da forma $(\lambda, u(\lambda)) \in \Theta \times V$. Por (H2), $(\lambda, 0)$ é uma curva de soluções para $\mathcal{F} = 0$ em $\Theta \times V$, e portanto estas são as únicas soluções em $\Theta \times V$. Em outras palavras, existe uma vizinhança em torno de $(\lambda^*, 0)$ onde as únicas soluções para $\mathcal{F} = 0$ são as triviais, ou seja, $(\lambda^*, 0)$ não percente ao fecho das soluções não triviais, o que contraria a hipótese de que λ^* é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$.

$\square$

Vejamos agora um caso particular. Considere $E = F,\ g \in C^2(E, E)$ e

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = \lambda u - g(u) \tag{1.2}$$

Nestas condições, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2 *Se λ^* é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ da forma (1.2), então λ^* pertence ao espectro de $g'(0)$.*

Demonstração: Como $\mathcal{F}(\lambda, u) = \lambda u - g(u)$, então $\mathcal{F}_u(\lambda, u) = \lambda I - g'(u)$, que implica em

$$\mathcal{F}_u(\lambda^*, 0) = \lambda^* I - g'(0)$$

Pelo teorema anterior, $\mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)$ não é invertível, e portanto $\lambda^* I - g'(0)$ também não é invertível, que por sua vez, implica que λ^* pertence ao espectro de $g'(0)$.

□

Em geral, a recíproca do teorema acima não é verdadeira. Daremos um exemplo de um autovalor λ de $g'(0)$ (portanto pertencente ao espectro) que não é ponto de bifurcação para $\mathcal{F}(\lambda, u) = \lambda u - g(u)$. Para isto, consideremos $E = F = \mathbb{R}^2$ e $g : E \to E$ dado por

$$g(x, y) = (x + y^3, y - x^3).$$

Assim, temos

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 3y^2 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto $g'(0, 0) = I$, cujo único autovalor é $\lambda = 1$. Como

$$\mathcal{F}(\lambda, (x, y)) = \lambda(x, y) - g(x, y),$$

então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\mathcal{F}(\lambda, (x, y)) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda x = x + y^3 \\ \lambda y = y - x^3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda xy = xy + y^4 \\ \lambda xy = xy - x^4 \end{cases} \Longrightarrow x^4 + y^4 = 0$$

Portanto a equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ não possui soluções não triviais. Em particular, o autovalor $\lambda = 1$ não é ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$.

Suponhamos agora, que em (1.2), g é um operador linear limitado. Então $g'(0) = g$. Neste caso, λ^* é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$ se, e só se, λ^* pertence ao fecho dos autovalores de g.

Lema 1.1 *Sejam $g_i \in C^1(E_i, F_i)$, $i = 1, ..., n$ aplicações entre espaços de Banach. Então existe uma função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua em $t = 0$ tal que*

$$\|g_i(u) - g_i(0)\| \leq \|u\| \, h(\|u\|), \;\; \forall \, u \in E_i \, , \;\; \forall \, i = 1, ..., n$$

e $h(0) = \sup\limits_{1\leq i\leq 1} \|g_i'(0)\|$.

Demonstração: Para cada $i = 1, ..., n$, tomemos $h_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$h_i(s) = \sup_{\|w\|\leq S} \|g_i'(w)\|$$

Pela desigualdade do valor médio e pela definição de h_i, temos

$$\|g_i(u) - g_i(0)\| \leq \sup_{0\leq\lambda\leq 1} \|g_i'(\lambda u)\|\ \|u\| \leq h_i(\|u\|)\|u\| \tag{1.3}$$

Dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de g_i' , existe $\delta_i > 0$ tal que

$$u \in B_{E_i}[0, \delta_i] \Longrightarrow \|g_i'(u) - g_i'(0)\| \leq \varepsilon$$

Ou seja,

$$\|g_i'(0)\| - \varepsilon \leq \|g_i'(u)\| \leq \|g_i'(0)\| + \varepsilon, \quad \forall u \in B_{E_i}[0, \delta_i]$$

Em particupar

$$0 \leq s \leq \delta_i \Longrightarrow \|g_i'(0)\| - \varepsilon \leq \|g_i'(u)\| \leq \|g_i'(0)\| + \varepsilon\ , \ \ \forall\ u \in B_{E_i}[0, s]$$

Logo,

$$0 \leq s \leq \delta_i \Longrightarrow \|g_i'(0)\| - \varepsilon \leq \sup_{\|u\|\leq s} \|g_i'(u)\| \leq \|g_i'(0)\| + \varepsilon$$

Como $h_i(0) = \|g_i'(0)\|$, então

$$0 \leq s \leq \delta_i \Longrightarrow h_i(0) - \varepsilon \leq h_i(s) \leq h_i(0) + \varepsilon$$

Isto prova a continuidade de h_i na origem $t = 0$. Tomando $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida como

$$h(s) = \sup_{1\leq i\leq n} h_i(s)$$

e $\delta = \inf\{\delta_1, ..., \delta_n\}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq \delta \quad &\Longrightarrow \quad h_i(0) - \varepsilon \leq h_i(s) \leq h_i(0) + \varepsilon \ \ \forall i = 1, ..., n \\ &\Longrightarrow \quad \sup_{1\leq i\leq n} h_i(0) - \varepsilon \leq \sup_{1\leq i\leq n} h_i(s) \leq \sup_{1\leq i\leq n} h_i(0) + \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad h(0) - \varepsilon \leq h(s) \leq h(0) + \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é contínua em $t = 0$, com $h(0) = \sup\limits_{1\leq i\leq n} \|g_i'(0)\|$, e de (1.3), temos

$$\|g_i(u) - g_i(0)\| \leq \|u\|\ h(\|u\|), \ \ \forall\ u \in E_i\ , \quad i = 1, ..., n.$$

$\square$

Teorema 1.3 (Crandall - Rabinowitz) *Seja $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \to F$ que satisfaz (H1) e (H2). Denotamos*

$$L_0 = \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0) \ \text{ e } \ L_1 = \mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda^*, 0)$$

Suponhamos que

a) $Ker(L_0) = \langle \varphi^* \rangle$,

b) $cod(Rg(L_0)) = 1$,

c) $L_1\varphi^*(1) \notin Rg(L_0)$.

Seja Z o complemento topológico de $Ker(L_0)$, ou seja, $E = Ker(L_0) \oplus Z$. Então λ^* é um ponto de bifircação para $\mathcal{F}$. Mais precisamente, existem $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ e aplicações de classe C^1

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & \mathbb{R}, \\ & s & \mapsto & \lambda(s) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi : & (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & Z \\ & s & \mapsto & \psi(s) \end{array}$$

com $\lambda(0) = \lambda^*$, $\psi(0) = 0$ e tais que

a) (Existência) A família $\lambda = \lambda(s), u = s(\varphi^* + \psi(s))$ constitue uma curva de soluções não triviais (quando $s \neq 0$) da equação $\mathcal{F} = 0$ que bifurcam do ponto λ^*.

b) (Unicidade) Se $(\lambda, u) \in B_\rho(\lambda^*, 0)$ é uma solução não trivial de $\mathcal{F} = 0$, então existe $s \in \mathbb{R}$, com $0 < |s| < \varepsilon$ tal que

$$(\lambda, u) = (\lambda(s), s(\varphi^* + \psi(s)).$$

Além disso, se $F \in C^k$, então $\lambda, u \in C^{k-1}$.

Demonstração: Primeiro definimos o operador $G : \mathbb{R}^2 \times Z \to F$ dado pela regra

$$G(s, \lambda, u) = \begin{cases} s^{-1}\mathcal{F}(\lambda, s(\varphi^* + u)), & \text{se } s \neq 0 \\ \mathcal{F}_u(\lambda, 0)(\varphi^* + u), & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

Como $\mathcal{F} \in C^2$, então $G \in C^1$. Também temos

$$G(0, \lambda^*, 0) = \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)\varphi^* = L_0\varphi^* = 0$$

. Diferenciando com respeito a $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times Z$, temos

$$\begin{aligned}
G_{(\lambda,u)}(0, \lambda^*, 0)(\lambda, u) &= \lim_{h \to 0} \frac{G(0, \lambda^* + h\lambda, hu) - G(0, \lambda^*, 0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{G(0, \lambda^* + h\lambda, hu)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{F}_u(\lambda^* + h\lambda, 0)(\varphi^* + hu)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{F}_u(\lambda^* + h\lambda, 0)\varphi^* - \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)\varphi^*}{h} + \lim_{h \to 0} \mathcal{F}_u(\lambda^* + h\lambda, 0)u \\
&= (\mathcal{F}_u)_\lambda(\lambda^*, 0)(\lambda)(\varphi^*) + \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)u \\
&= \mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda^*, 0)(\varphi^*)(\lambda) + L_0 u \\
&= \lambda \mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda^*, 0)(\varphi^*)(1) + L_0 u \\
&= \lambda L_1 \varphi^*(1) + L_0 u
\end{aligned}$$

O operador linear $G_{(\lambda,u)}(0, \lambda^*, 0)$ é contínuo e bijetivo. A continuidade vê-se facilmente. Provemos a injetividade: suponhamos que existam $u \in Z$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$L_0 u + \lambda L_1 \varphi^*(1) = G_{(\lambda,u)}(0, \lambda^*, 0)(\lambda, u) = 0$$

Se fosse $\lambda \neq 0$, teríamos $L_1\varphi^*(1) = L_0(-\frac{u}{\lambda})$, o que contraria $L_1\varphi^*(1) \notin Rg(L_0)$. Logo $\lambda = 0$ e consequentemente $L_0 u = 0$, e como $u \in Z$, então $u = 0$.

Agora vamos provar a sobrejetividade de $G_{(\lambda,u)}(0, \lambda^*, 0)$. Como $cod(Rg(L_0)) = 1$, então $Rg(L_0)$ possui um complemento topológico de dimensão 1, digamos $Rg(L_0) \oplus V = F$, com $V = \langle v_0 \rangle$, $v_0 \neq 0$. A forma geométrica do teorema de Hahn-Banach garante a existência de um funcional $\phi \in F'$ e uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\phi(w) < \alpha < \phi(v_0) \quad \forall\, w \in Rg(L_0).$$

Isto implica que

$$\phi(w) = 0 \ \ \forall w \in Rg(L_0)$$

$$\phi(v) \neq 0 \ \ \forall v \in V/\{0\}.$$

Como $Rg(L_0) \oplus V = F$ então,

$$Ker(\phi) = Rg(L_0).$$

Seja $f \in F$. Como $L_1\varphi^*(1) \notin Rg(L_0)$, então $\phi(L_1\varphi^*(1)) \neq 0$. Tomando $\lambda = \dfrac{\phi(f)}{\phi(L_1\varphi^*(1))}$, temos

$$\phi(-\lambda L_1\varphi^*(1) + f) = -\lambda\phi(L_1\varphi^*(1)) + \phi(f) = -\frac{\phi(f)}{\phi(L_1\varphi^*(1))}\phi(L_1\varphi^*(1)) + \phi(f) = 0$$

portanto $-\lambda L_1\varphi^*(1) + f \in Ker(\phi) = Rg(L_0)$, ou seja, existe $u \in E$ tal que $L_0u = -\lambda L_1\varphi^*(1) + f$. Finalmente, temos $\lambda L_1\varphi^*(1) + L_0u = f$, que prova a sobrejeividade.

O teorema da função implícita aplicado em G, garante a existência de uma curva $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto (\lambda(s), \psi(s)) \in \mathbb{R}\times Z$ de classe C^1, com $\lambda(0) = \lambda^*$ e $\psi(0) = 0$, tal que

$$G(s, \lambda(s), \psi(s)) = 0 \tag{1.4}$$

onde $(s, \lambda(s), \psi(s))$ são as únicas soluções não triviais da equação $G = 0$ em uma vizinhança de $(0, \lambda^*, 0)$ em $\mathbb{R}\times \mathbb{R}\times Z$.

Segue de (1.4) e da definição de G que a aplicação $s \mapsto (\lambda(s), s(\varphi^* + \psi(s)))$ é uma curva de soluções para $\mathcal{F} = 0$. Assim, provamos a existência de soluções não triviais para $\mathcal{F}$ que bifurcam de $(\lambda^*, 0)$. Restando provar a unicidade.

Suponhamos inicialmente que existam $\rho > 0$ e uma função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua na origem $(t = 0)$, com $g(0) = 0$, e tal que

$$u \in Z, \ \ (\lambda, s\varphi^* + u) \in B_\rho(\lambda^*, 0), \quad \mathcal{F}(\lambda, s\varphi^* + u) = 0$$

implicam em

$$\|u\| + |s||\lambda - \lambda^*| \leq |s|g(|s|)$$

Primeiro vamos mostrar que isto garante a unicidade das soluções não triviais próximo de $(\lambda^*, 0)$ e depois mostrar a existência de g. Lembrando que a unicidade é para $0 < |s| < \varepsilon$, multiplicamos a desigualdade acima por $|s|^{-1}$, obtendo

$$\|s^{-1}u\| + |\lambda - \lambda^*| \leq g(|s|)$$

Como g é contínua em zero e $g(0) = 0$, então para s suficientemente pequeno, teremos $(\lambda, s^{-1}u)$ suficientemente próximo de $(\lambda^*, 0)$ e

$$G(s, \lambda, s^{-1}u) = s^{-1}\mathcal{F}(\lambda, s\varphi^* + u) = 0$$

Pela unicidade das soluções de $G = 0$ em torno de $(0, \lambda^*, 0)$, temos

$$(\lambda, s^{-1}u) = (\lambda(s), \psi(s)).$$

Agora só resta provar a existência de g com as propriedades descritas. Observamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}(\lambda, s\varphi^* + u) \\ &= \mathcal{F}(\lambda, s\varphi^* + u) - \mathcal{F}(\lambda, s\varphi^*) - \mathcal{F}_u(\lambda, s\varphi^*)u \\ &+\mathcal{F}(\lambda, s\varphi^*) - \mathcal{F}(\lambda, 0) - s\mathcal{F}_u(\lambda, 0)\varphi^* \\ &+s[\mathcal{F}_u(\lambda, 0)\varphi^* - (\lambda - \lambda^*)\mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda^*, 0)\varphi^*(1)] \\ &+\mathcal{F}_u(\lambda, s\varphi^*)u - \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)u \\ &+\mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)u + s(\lambda - \lambda^*)\mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda^*, 0)\varphi^*(1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Em seguida, tomemos as funções

$$\begin{aligned} g_1(u) &= \mathcal{F}(\lambda, s\varphi^* + u) - \mathcal{F}_u(\lambda, s\varphi^*)u \\ g_2(s) &= \mathcal{F}(\lambda, s\varphi^*) - s\mathcal{F}_u(\lambda, 0)\varphi^* \\ g_3(s) &= \mathcal{F}_u(s + \lambda^*, 0)\varphi^* + s\mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda^*, 0)\varphi^*(1). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{F} \in C^2$, então g_1, g_2 e g_3 são de classe C^1. O lema (1.1) garante a existência de uma função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua na origem e tal que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\lambda, s\varphi^* + u) - \mathcal{F}(\lambda, s\varphi^*) - \mathcal{F}_u(\lambda, s\varphi^*)u\| &\leq \|u\|\ h(\|u\|) \\ \|\mathcal{F}(\lambda, s\varphi^*) - \mathcal{F}(\lambda, 0) - s\mathcal{F}_u(\lambda, 0)\varphi^*\| &\leq |s|\ h(|s|) \\ \|\mathcal{F}_u(\lambda, 0)\varphi^* - (\lambda - \lambda^*)\mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda^*, 0)\varphi^*(1)\| &\leq |\lambda - \lambda^*|\ h(|\lambda - \lambda^*|) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Além disso, $h(0) = \sup\{\|g_1'(0)\|, \|g_2'(0), \|\|g_3'(0)\|\} = 0$.

Usando as notações $L_0 = \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)$ e $L_1 = \mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda^*, 0)$ em (1.5) e combinando com (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} \|L_0 u + s(\lambda - \lambda^*)L_1\varphi^*\| \leq\ & \|u\|\ h(\|u\|) + |s|\ h(|s|) + |s||\lambda - \lambda^*|\ h(|\lambda - \lambda^*|) + \\ & + \|\mathcal{F}_u(\lambda, s\varphi^*) - \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)\|\|u\| \end{aligned}$$

Como $(\lambda, u) \mapsto L_0 u + \lambda L_1\varphi^*$ é um isomorfismo, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C(\|u\| + |s|\,|\lambda - \lambda^*|) \leq \|L_0 u + s(\lambda - \lambda^*)L_1\varphi^*\|$$

para todos $s, \lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in Z$. De modo que

$$C(\|u\|+|s|\,|\lambda-\lambda^*|) \leq \|u\|\; h(\|u\|)+|s|\; h(|s|)+|s||\lambda-\lambda^*|\; h(|\lambda-\lambda^*|)+\|\mathcal{F}_u(\lambda, s\varphi^*)-\mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)\|\|u\|$$

Como $F \in C^2$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ (lembrando que $|s| < \varepsilon$) e $\rho > 0$ tão pequenos de modo que

$$(\lambda, s\varphi^* + u) \in B_\rho(\lambda^*, 0)$$

implica em

$$h(\|u\|) < \frac{C}{4}, \quad h(|\lambda - \lambda^*|) < \frac{C}{2} \quad \text{e} \quad \|\mathcal{F}_u(\lambda, s\varphi^*) - \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)\| < \frac{C}{4}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&C(\|u\| + |s|\,|\lambda - \lambda^*|) \leq \\
&\leq \|u\|\; h(\|u\|) + |s|\; h(|s|) + |s||\lambda - \lambda^*|\; h(|\lambda - \lambda^*|) + \|\mathcal{F}_u(\lambda, s\varphi^*) - \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0)\|\|u\| \\
&\leq \|u\|\frac{C}{4} + |s|h(|s|) + |s|\;|\lambda - \lambda^*|\frac{C}{2} + \|u\|\frac{C}{4} \\
&\leq \frac{C}{2}\,(\|u\| + |s|\;|\lambda - \lambda^*|) + |s|\; h(|s|)
\end{aligned}$$

que implica em

$$\|u\| + |s|\;|\lambda - \lambda^*| \leq |s|\frac{2}{C}h(|s|)$$

Agora basta tomar $g(|s|) := \dfrac{2}{C}h(|s|)$, e concluímos a demonstração.

$\square$

1.2 Métodos de redução Lyapunov - Schimdt

No método de Lyapunov - Schimdt, pretende-se diminuir a dimensão do espaço em que se quer resolver a equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$. Dentre as aplicações, este método pode também ser ultilizado para demonstrar o Teorema de Crandall-Rabinowitz (ver [10]).

Seja $\mathcal{F}$ uma função satisfazendo:

(H1) $F \in C^2(\mathbb{R} \times E, F)$;

(H2) $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Sejam

$$L_0 = \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0) \in L(E, F), \qquad V = Ker(L_0) \subset E, \qquad R = Rg(L_0) \subset F$$

Suponhamos também que

(H3) V possui complementar topológico W em E, isto é,

$$E = V \oplus W.$$

(H4) R é fechado e possui complementar topológico Z em F, ou seja,

$$F = R \oplus Z.$$

Sejam $P : F \to Z$ e $Q : F \to R$ as projeções. Seja $u = v + w$, com $v \in V$ e $w \in W$, então

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}(\lambda, v + w) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P\mathcal{F}(\lambda, v + w) = 0 \\ Q\mathcal{F}(\lambda, v + w) = 0 \end{cases}$$

Seja φ definida por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = L_0 u + \varphi(\lambda, u) \tag{1.7}$$

Como $v \in V = Ker(L_0)$ e $L_0 w \in R = Rg(L_0)$, então $QL_0 v = 0$ e $QL_0 w = L_0 w$. Usando este fato junto com a igualdade (1.7), temos

$$\begin{aligned} Q\mathcal{F}(\lambda, v + w) = 0 &\Leftrightarrow QL_0(v + w) + Q\varphi(\lambda, v + w) = 0 \\ &\Leftrightarrow QL_0 v + QL_0 w + Q\varphi(\lambda, v + w) = 0 \\ &\Leftrightarrow L_0 w + Q\varphi(\lambda, v + w) = 0 \end{aligned}$$

Vamos estudar a equação $Q\mathcal{F}(\lambda, v + w) = 0$, que equivale a

$$\phi(\lambda, v, w) = L_0 w + Q\varphi(\lambda, v + w) = 0. \tag{1.8}$$

Lema 1.2 *Para cada (λ, v), existe um único $w = \gamma(\lambda, v)$ que resolve (1.8). Além disso, temos*

a) $\gamma(\lambda, 0) = 0$.

b) $\gamma_v(\lambda^*, 0) = 0$.

Demonstração: Temos $\phi \in C^2(\mathbb{R}\times V \times W, R)$ e $\phi_w(\lambda^*, 0, 0) \in L(W, R)$ com

$$\phi_w(\lambda^*, 0, 0)(z) = L_0 z + Q\varphi_u(\lambda^*, 0)(z) \tag{1.9}$$

Pela definição $\varphi(\lambda, u) = \mathcal{F}(\lambda, u) - L_0 u$, temos

$$\varphi_u(\lambda^*, 0) = \mathcal{F}_u(\lambda^*, 0) - L_0 = 0 \tag{1.10}$$

Por (1.9) e (1.10), temos

$$\phi_w(\lambda^*, 0, 0) = L_0|_W : W \to R.$$

Pela definição de W e R, a restrição $L_0|_W : W \to R$ é bijetiva. Como W e R são fechados, portanto espaços de Banach, então (pelo teorema da aplicação aberta) $\phi_w(\lambda^*, 0, 0) = L_0|_W : W \to R$ possui inversa contínua, portanto é um isomorfismo.

Agora podemos aplicar o teorema da função implícita na equação (1.8), garantindo a existência de uma vizinhança aberta $(\Lambda \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$ de $(\lambda^*, 0, 0)$ em $\mathbb{R}\times V \times W$ e uma função $\gamma \in C^2(\Lambda \times \mathcal{V}, \mathcal{W})$ tal que

$$\begin{cases} L_0\gamma(\lambda, v) + Q\varphi(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0, \ \ \forall(\lambda, v) \in \Lambda \times \mathcal{V} \\ L_0 w + Q\varphi(\lambda, v + w) = 0, (\lambda, v) \in \Lambda \times \mathcal{V} \Longrightarrow w = \gamma(\lambda, v) \end{cases} \tag{1.11}$$

Em particular, para $v = 0$, a equação

$$\phi(\lambda, 0, w) = L_0 w + Q\varphi(\lambda, w) = 0$$

possui $w = 0$ como uma solução. Portanto

$$\gamma(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \tag{1.12}$$

Isto prova o tem a) do lema.

Diferenciando a primeira equação de (1.11) em relação a v, no ponto $(\lambda^*, 0)$, obtemos

$$L_0\gamma_v(\lambda^*, 0)x + Q\varphi_u(\lambda^*, \gamma(\lambda^*, 0))[x + \gamma_v(\lambda^*, 0)x] = 0 \quad \forall x \in V$$

Usando (1.10) e (1.12), obtemos

$$L_0\gamma_v(\lambda^*, 0)x = 0 \quad \forall x \in V$$

Portanto $\gamma_v(\lambda^*,0)x \in V = Ker(L_0)$, e como $\gamma_v(\lambda^*,0)x \in W$ (pois $\gamma_v(\lambda^*,0) \in L(V,W)$), então $\gamma_v(\lambda^*,0)x = 0$ para todo $x \in V$. Finalmente, temos

$$\gamma_v(\lambda^*,0) = 0$$

Como queríamos. $\square$

Agora suponhamos também que,

(H5) V é unidimensional, isto é, existe $u^* \neq 0$ tal que $V = \langle u^* \rangle$.

(H6) R é fechado e $cod(R) = 1$.

Como $cod(R) = 1$, isto é, R é um hiperplano, então existe um funcional $\psi \in F^*$, $\psi \neq 0$, tal que

$$Ker(\psi) = R.$$

Substituindo $w = \gamma(\lambda, v)$, a equação $P\mathcal{F}(\lambda, v + w) = 0$ toma a forma

$$P\mathcal{F}(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0$$

chamada de equação de bifurcação.

Como $P : F \to Z$ é uma projeção, $R \oplus Z = F$, $R = \ker(\psi)$ e $V = \langle u^* \rangle$, então

$$\begin{aligned} P\mathcal{F}(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) \in R \\ &\Leftrightarrow \quad \psi(F(\lambda, v + \gamma(\lambda, v))) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \psi(\mathcal{F}(\lambda, tu^* + \gamma(\lambda, tu^*))) = 0 \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda = \lambda^* + \mu$, definimos

$$\beta(\mu, t) = \psi(\mathcal{F}(\lambda^* + \mu, tu^* + \gamma(\lambda^* + \mu, tu^*)))$$

onde β é uma função real em torno de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Como $\psi, \mathcal{F}$ e γ são de classe C^2, então β também é de classe C^2.

Teorema 1.4 *Tem-se*

a) $\beta(\mu, 0) = 0 \ \ \forall \mu$.

b) $\beta_\mu(0,0) = \beta_{\mu\mu}(0,0) = 0$.

c) $\beta_t(0,0) = 0$.

d) $\beta_{t\mu}(0,0)[1,1] = \psi(\mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda^*,0)[1,u^*])$.

e) $\beta_{tt}(0,0)[1,1] = \psi(\mathcal{F}_{uu}(\lambda^*,0)[u^*,u^*])$.

Demonstração: Lembrando que

$$\beta(\mu,t) = \psi(\mathcal{F}(\lambda^* + \mu, tu^* + \gamma(\lambda^* + \mu, tu^*))),$$

temos

a) Pelo lema (1.1) e por (H2), temos

$$\beta(\mu,0) = \psi(\mathcal{F}(\lambda^* + \mu, \gamma(\lambda^* + \mu, 0))) = \psi(\mathcal{F}(\lambda^* + \mu, 0)) = 0$$

b) Como $\beta(\mu,0) = 0 \quad \forall\mu$, então $\beta_\mu(\mu,0) = 0$. Em particular, $\beta_\mu(0,0) = 0$. Além disso, $\beta_\mu(\mu,0) = 0$ implica em $\beta_{\mu\mu}(0,0) = 0$.

c) Diferenciando β em relação a t, obtemos

$$\beta_t(\mu,t)(r) = \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*+\mu, tu^*+\gamma(\lambda^*+\mu, tu^*))(ru^*+\gamma_v(\lambda^*+\mu, tu^*)(ru^*))),\ \forall r \in \mathbb{R}$$

tomando $t = 0$ e $\mu = 0$, obtemos

$$\beta_t(0,0)(r) = \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*, \gamma(\lambda^*,0))(ru^* + \gamma_v(\lambda^*,0)(ru^*))),\ \forall r \in \mathbb{R}$$

Pelo lema (1.1), temos $\gamma(\lambda^*,0) = 0$ e $\lambda_v(\lambda^*,0) = 0$. Logo

$$\beta_t(0,0)(r) = \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(ru^*)) = r\psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(u^*)) = r\psi(L_0 u^*) = 0,\ \forall r \in \mathbb{R}$$

Portanto,

$$\beta_t(0,0) = 0.$$

d) Em $\beta_t(\mu,t)$ acima, fazemos $t = 0$ e $r = 1$, assim

$$\beta_t(\mu,0)(1) = \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^* + \mu, \gamma(\lambda^* + \mu, 0))(u^* + \gamma_v(\lambda^* + \mu, 0)(u^*))).$$

Novamente usando o lema 1.1, obtemos

$$\beta_t(\mu,0)(1) = \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*+\mu,0)(u^*+\gamma_v(\lambda^*+\mu,0)u^*)).$$

Diferenciando $\mu \mapsto \beta_t(\mu,0)(1)$, obtemos

$$\begin{aligned}\beta_{t\mu}(\mu,0)[s,1] = \quad & \psi(\mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda^*+\mu,0)[s,u^*+\gamma_v(\lambda^*+\mu,0)u^*])+ \\ & +\psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*+\mu,0)(\gamma_{v\lambda}(\lambda^*+\mu,0)[s,u^*]))\end{aligned}$$

Tomando $\mu = 0$, $s = 1$ e usando o lema 1.1, temos

$$\begin{aligned}\beta_{t\mu}(0,0)[1,1] \quad & = \psi(\mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda^*,0)[1,u^*+\gamma_v(\lambda^*,0)u^*])+ \\ & \quad +\psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(\gamma_{v\lambda}(\lambda^*+\mu,0)[1,u^*])) \\ & = \psi(\mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda^*,0)[1,u^*]) + \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(\gamma_{v\lambda}(\lambda^*,0)[1,u^*]))\end{aligned}$$

Mas como

$$\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(\gamma_{v\lambda}(\lambda^*,0)[1,u^*]) \in R \Longrightarrow \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(\gamma_{v\lambda}(\lambda^*,0)[1,u^*])) = 0$$

então

$$\beta_{t\mu}(0,0)[1,1] = \psi(\mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda^*,0)[1,u^*]).$$

e) Do item c), temos

$$\beta_t(\mu,t)(1) = \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*+\mu,tu^*+\gamma(\lambda^*+\mu,tu^*))(u^*+\gamma_v(\lambda^*+\mu,tu^*)u^*))$$

Diferenciando $t \mapsto \beta_t(\mu,t)(1)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\beta_{tt}(\mu,t)[1,1] = \\ &= \psi(\mathcal{F}_{uu}(\lambda^*+\mu,tu^*+\gamma(\lambda^*+\mu,tu^*))[u^*+\gamma_v(\lambda^*+\mu,tu^*)u^*,u^*+\gamma_v(\lambda^*+\mu,tu^*)u^*]+ \\ &\quad +\mathcal{F}_u(\lambda^*+\mu,tu^*+\gamma(\lambda^*+\mu,tu^*))(\gamma_{vv}(\lambda^*+\mu,tu^*)[u^*,u^*]))\end{aligned}$$

Fazendo $t = 0$ e $\mu = 0$,

$$\begin{aligned}&\beta_{tt}(0,0)[1,1] = \psi(\mathcal{F}_{uu}(\lambda^*,\gamma(\lambda^*,0))[u^*+\gamma_v(\lambda^*,0)u^*,u^*+\gamma_v(\lambda^*,0)u^*]+ \\ &\quad +\mathcal{F}_u(\lambda^*,\gamma(\lambda^*,0))(\gamma_{vv}(\lambda^*,0)[u^*,u^*]))\end{aligned}$$

Pelo lema 1.1, temos

$$\begin{aligned}\beta_{tt}(0,0)[1,1] \quad & = \psi(\mathcal{F}_{uu}(\lambda^*,0)[u^*,u^*]+\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(\gamma_{vv}(\lambda^*,0)[u^*,u^*])) \\ & = \psi(\mathcal{F}_{uu}(\lambda^*,0)[u^*,u^*]) + \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(\gamma_{vv}(\lambda^*,0)[u^*,u^*]))\end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(\gamma_{vv}(\lambda^*,0)[u^*,u^*]) \in R \Longrightarrow \psi(\mathcal{F}_u(\lambda^*,0)(\gamma_{vv}(\lambda^*,0)[u^*,u^*])) = 0$$

então

$$\beta_{tt}(0,0)[1,1] = \psi(\mathcal{F}_{uu}(\lambda^*,0)[u^*,u^*]).$$

$\square$

Capítulo 2

Aplicação do Teorema de Crandall-Rabinowitz

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções para equações da forma

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + f(x,u), \quad \Omega \\ u &= 0, \qquad\qquad\quad\; \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função que satisfaz

$$f(x,0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{s} = 0. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1 *Para cada autovalor simples λ_k de $-\Delta$, existe uma curva $(\lambda(s), u(s))$ de classe C^1, cujos pontos são soluções do problema (2.1), desde que f satisfaça (2.2). Além disso $\lim\limits_{s\to 0} \lambda(s) = \lambda_k$, $\lim\limits_{s\to 0} u(s) = 0$ e $u(s) \neq 0$ para $s \neq 0$. Em particular, λ_k é ponto de bifurcação.*

Demonstração: Sejam $E = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\,; \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$ e $F = C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$. Definimos a função $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \to F$ dada por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = \Delta u + \lambda u + f(u)$$

onde $f(u)$ está definido por $f(u)(x) = f(x, u(x))$ (usamos a mesma notação para f e para o operador de Nemitskii de f). Desta forma, qualquer solução da equação

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$$

também será solução da equação (2.1).

Usando (2.2) em $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_u$, obtemos

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \\ &\mathcal{F}_u(\lambda, 0) = \Delta + \lambda I \end{aligned}$$

onde I é a inclusão $E \to F$. Lembramos que o teorema (B.5) garante a existência de uma sequência de autovalores λ_k e autofunções φ_k satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k &= \lambda_k\varphi_k, \quad \Omega \\ \quad \varphi_k &= 0, \qquad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

onde pelo menos λ_1 é autovalor simples de $-\Delta$, e $\int_\Omega \varphi_k^2 = 1$.

Se λ_k é um autovalor simples de $-\Delta$, então de (2.3) segue que

$$\ker(\mathcal{F}_u(\lambda_k, 0)) = \ker(\Delta + \lambda_k I) = \langle \varphi_k \rangle \tag{2.4}$$

Pelo teorema (B.5) b), temos

$$Rg(\mathcal{F}_u(\lambda_k, 0)) = \left\{ u \in F\,;\ \int_\Omega u\varphi_k = 0 \right\}$$

Logo,

$$cod(Rg(\mathcal{F}_u(\lambda_k, 0))) = 1. \tag{2.5}$$

Como $\mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda_k, 0)[v, 1] = \mathcal{F}_{u\lambda}(\lambda_k, 0)[1, v] = v$, então

$$\mathcal{F}_{\lambda u}(\lambda_k, 0)[\varphi_k, 1] = \varphi_k \notin Rg(\mathcal{F}_u(\lambda_k, 0)) \tag{2.6}$$

pois $\int_\Omega \varphi_k^2 = 1$.

Por (2.4), (2.5) e (2.6), podemos aplicar o teorema de Crandall - Rabinowits, de modo que para λ_k (e qualquer outro autovalor simples de $-\Delta$), existe uma curva de soluções $(\lambda(s), u(s))$ não triviais (quando $s \neq 0$) da equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$, com $\lim_{s \to 0} \lambda(s) = \lambda_k$ e $\lim_{s \to 0} u(s) = 0$. Em particular, λ_k (e qualquer outro autovalor simples de $-\Delta$) é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}$. Além disso, $\lambda(s)$ e $u(s)$ são de classe C^1, com $\lambda(0) = \lambda_k$ e $u(s) = s(\varphi_k + \psi_k(s))$, onde ψ_k também é de classe C_1 com $\psi_k(0) = 0$. $\square$

Como pelo menos λ_1 é autovalor simples de $-\Delta$, e toda solução da equação $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ também é solução de (2.1), então garantimos a existência de uma família de soluções não triviais para o problema (2.1).

Agora, estudaremos a direção da bifurcação. Se (μ_n, u_n) é uma bifurcação partindo de $(\lambda_k, 0)$, ou seja, $(\mu_n, u_n) \to (\lambda_k, 0)$, com $u_n \neq 0$, então chamaremos a bifurcação de subcrítica quando $\mu_n < \lambda_k$, e supercrítica quando $\mu_n > \lambda_k$, para n suficientemente grande. Ver figura 2.1.

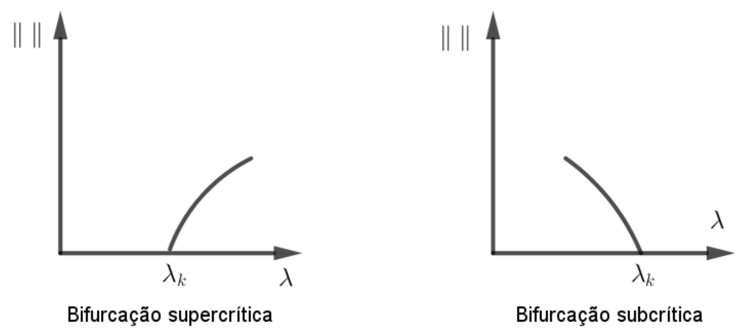


Figura 2.1: Direção da bifurcação.

Teorema 2.2 *Considere o problema (2.1) e as hipóteses (2.2). Se φ_k é autofunção de um autovalor simples λ_k de $-\Delta$ e*

$$\int_\Omega f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 dx \neq 0,$$

então de $(\lambda_k, 0)$ parte uma bifurcação supercrítica quando $\int_\Omega f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 dx < 0$, e subcrítica quando $\int_\Omega f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 dx > 0$.

Demonstração: Pelo teorema de Crandall-Rabinowitz, de $(\lambda_k, 0)$ bifurca uma curva de soluções $(\lambda(s), u(s))$ não triviais que podem ser escritas como

$$\begin{cases} \lambda(s) & = \lambda_k + s\mu_k + o(s) \\ u(s) & = s\varphi_k + s^2\psi_k + o(s^2), \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \end{cases}$$

Agora definimos

$$g(s) := f(x, u(s)),$$

e calculamos as derivadas

$$\begin{aligned} & g'(t)s = f_u(x, u(t))u'(t)s \\ & g''(t)s^2 = f_{uu}(x, u(t))(u'(t))^2 s^2 + f_u(x, u(t))u''(t)s^2 \end{aligned}$$

Fazendo $t = 0$, e usando (2.2) e $u(s) = s\varphi_k + s^2\psi_k + o(s^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
g(0) &= f(x,u(0))\\
&= f(x,0)\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(0)s &= f_u(x,u(0))u'(0)s\\
&= f_u(x,0)u'(0)s\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g''(0)s^2 &= f_{uu}(x,u(0))(u'(0))^2s^2 + f_u(x,u(0))u''(0)s^2\\
&= f_{uu}(x,0)\varphi_k^2 s^2 + f_u(x,0)u''(0)s^2\\
&= f_{uu}(x,0)\varphi_k^2 s^2
\end{aligned}$$

Usando a expansão de Taylor, temos

$$g(s) = g(0) + g'(0)s + \frac{1}{2}g''(0)s^2 + o(s^2)$$

Que nos leva a

$$f(x,u(s)) = \frac{1}{2}f_{uu}(x,0)\varphi_k^2 s^2 + o(s^2)$$

Fazendo essas substituições em (2.1), obtemos

$$-\Delta(s\varphi_k+s^2\psi_k+o(s^2)) = (\lambda_k+s\mu_k+o(s))(s\varphi_k+s^2\psi_k+o(s^2))+\frac{1}{2}f_{uu}(x,0)\varphi_k^2 s^2+o(s^2)$$

Dividindo ambos os lados por $s \neq 0$, obtemos

$$-\Delta(\varphi_k+s\psi_k+o(s)) = (\lambda_k+s\mu_k+o(s))(\varphi_k+s\psi_k+o(s))+\frac{1}{2}f_{uu}(x,0)\varphi_k^2 1s+o(s)$$

Usando o fato de que $-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$ e substituindo acima, obtemos

$$-\Delta(s\psi_k+o(s)) = \lambda_k(s\psi_k+o(s))+(s\mu_k+o(s))(\varphi_k+s\psi_k+o(s))+\frac{1}{2}f_{uu}(x,0)\varphi_k^2 1s+o(s)$$

Dividindo novamente por s, obtemos

$$-\Delta\left(\psi_k+\frac{o(s)}{s}\right) = \lambda_k\left(\psi_k+\frac{o(s)}{s}\right)+\left(\mu_k+\frac{o(s)}{s}\right)(\varphi_k+s\psi_k+o(s))+\frac{1}{2}f_{uu}(x,0)\varphi_k^2+o(s)$$

Fazendo $s \to 0$, obtemos

$$-\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k + \mu_k\varphi_k + \frac{1}{2}f_{uu}(x,0)\varphi_k^2$$

Que nos dá (lembrando que $\varphi_k \in \ker(-\Delta - \lambda_k)$),

$$\int_\Omega \mu_k\varphi_k^2 dx + \int_\Omega \frac{1}{2}f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 \mathrm{dx} = 0$$

Portanto

$$\mu_k = -\frac{\displaystyle\int_\Omega f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 \mathrm{dx}}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_k^2 \mathrm{dx}}$$

A direção da bifurcação é determinada pelo sinal de $\displaystyle\int_\Omega f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 \mathrm{dx}$. Se este for negativo, então a direção é de supercrítica, mas se $\displaystyle\int_\Omega f_{uu}(x,0)\varphi_k^3 \mathrm{dx}$ for positivo, então a direção é subcrítica. □

Porém, pode ocorrer desta integral ser igual a zero. Vejamos o caso em que

$$f(x,u) = a(x)u^p, \ p > 0, \ p \neq 1$$

onde $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Neste caso, temos $f_{uu}(x,0) = 0$. A equação (2.1) toma a forma

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda u + a(x)u^p, & \Omega \\ u & = & 0, & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Para estudarmos a direção de bifurcação neste caso, escrevamos a curva de soluções da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda(s) & = & \lambda_k + \mu_k(s) \\ u(s) & = & s(\varphi_k + \psi_k(s)) \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Onde $\psi_k(s)$ é de classe C^1 com $\lim_{s\to 0}\psi_k(s) = 0$. Substituindo (2.8) em (2.7), obtemos

$$-\Delta(s\varphi_k + s\psi_k(s)) = (\lambda_k + \mu_k(s))(s\varphi_k + s\psi_k(s)) + a(x)s^p(\varphi_k + \psi_k(s))^p$$

Dividindo por s, obtemos

$$-\Delta(\varphi_k + \psi_k(s)) = (\lambda_k + \mu_k(s))(\varphi_k + \psi_k(s)) + a(x)s^{p-1}(\varphi_k + \psi_k(s))^p$$

Subsituindo $-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$, obtemos

$$-\Delta\psi_k(s) = \lambda_k\psi_k(s) + \mu_k(s)(\varphi_k + \psi_k(s)) + a(x)s^{p-1}(\varphi_k + \psi_k(s))^p$$

Usando novamente $-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$, temos

$$0 = \mu_k(s)\varphi_k(\varphi_k + \psi_k(s)) + a(x)s^{p-1}\varphi_k(\varphi_k + \psi_k(s))^p$$

que por sua vez, implica em

$$\frac{\mu_k(s)}{s^{p-1}}\varphi_k(\varphi_k + \psi_k(s)) = -a(x)s^{p-1}\varphi_k(\varphi_k + \psi_k(s))^p$$

Fazendo $s \to 0$, obtemos

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mu_k(s)}{s^{p-1}}\varphi_k^2 = -a(x)\varphi_k^{p+1}$$

Portanto

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mu_k(s)}{s^{p-1}} = -\frac{\displaystyle\int_\Omega a(x)\varphi_k^{p+1}dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_k^2 dx}$$

Logo, para o problema (2.7), a bifurcação é supercrítica quando $\int_\Omega a(x)\varphi_k^{p+1}dx < 0$, e é subcrítica quando $\int_\Omega a(x)\varphi_k^{p+1}dx > 0$.

Capítulo 3

Bifurcação Global

Neste capítulo, consideraremos a equação

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0 \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \to E$ está definido como

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = u - T_\lambda u \ ,$$

$T_\lambda : E \to E$ está definido como

$$T_\lambda u = \lambda L u + h(\lambda, u)$$

e $L : E \to E$ e $h : \mathbb{R} \times E \to E$ são funções tais que

(H7) L é linear e compacto.

(H8) h é compacto.

(H9) $h(\lambda, u) = o(\|u\|)$ uniformemente sobre intervalos limitados de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1 *Nas condições acima, se $\lambda^* \neq 0$ é um ponto de bifurcação para (3.1), então $1/\lambda^*$ é autovalor de L.*

Demonstração: Sendo λ^* ponto de bifurcação, significa que existe uma sequência $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times E$ tal que $u_n \neq 0$, $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$ e $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda^*, 0)$. Dividindo a equação $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$ por $\|u_n\|$ e usando a linearidade de L, temos

$$0 = \frac{u_n}{\|u_n\|} - \lambda_n L\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) - \frac{h(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|}.$$

Por (H8), temos que $\frac{h(\lambda_n,u_n)}{\|u_n\|} \to 0$ quando $n \to \infty$, e juntamente com a compacidade de L e h, existe $w \in E$ com $\|w\| = 1$ tal que

$$0 = w - \lambda^* Lw,$$

que implica em

$$Lw = \frac{1}{\lambda^*} w.$$

Portanto $1/\lambda^*$ é autovalor de L.

Teorema 3.2 *Suponhamos (H7), (H8), e (H9). Seja $\lambda^* \in \mathbb{R}, \lambda^* \neq 0$ tal que $1/\lambda^*$ é autovalor de L de multiplicidade ímpar. Então λ^* é um ponto de bifurcação.*

Demonstração: Suponhamos por contradição que λ^* não seja ponto de bifurcação. Isto significa que $(\lambda^*, 0)$ pertence a uma vizinhança aberta $B = B_1(\lambda^*, \varepsilon_0) \times B_2(0, r) \subset \mathbb{R} \times E$ de modo que B não possua soluções não triviais, ou seja, $B \cap S = \emptyset$, portanto

$$\begin{cases} (\lambda, u) \in B \\ \mathcal{F}(\lambda, u) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\lambda, u) \notin S \\ \mathcal{F}(\lambda, u) = 0 \end{cases} \Longrightarrow u = 0 \tag{3.2}$$

Para r suficientemente pequeno, na implicação acima podemos usar $B_1 \times \overline{B_2}$ em vez de B, assim a equação $\mathcal{F} = 0$ só possui solução em B_2 se esta for a solução trivial, e como $u = 0 \notin \partial B_2$, então $\mathcal{F} = 0$ não possui solução em ∂B_2, ou seja, para qualquer $\lambda \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0)$, por (3.2) temos $0 \notin \mathcal{F}(\lambda, \partial B_2) = (I - T_\lambda)(\partial B_2)$, portanto está definido o grau topológico $d(I - T_\lambda, B_2, 0)$.

Dados $\lambda_1 \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^*)$ e $\lambda_2 \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon_0)$, temos

$$d(I - T_{\lambda_1}, B_2, 0) = d(I - T_{\lambda_2}, B_2, 0) \tag{3.3}$$

pois a aplicação $[0,1] \times E \to E$, $(t, u) \mapsto T_{(1-t)\lambda_1 + t\lambda_2} u$ define uma homotopia compacta entre T_{λ_1} e T_{λ_2}

Agora para $\lambda \neq \lambda^*$, tomemos a homotopia

$$h_1 : [0,1] \times \overline{B}_2(0, r) \to E, \quad h_1(t, u) = \lambda Lu + t\, h(\lambda, u).$$

Se $0 \in I - h_1(t, \partial B_2)$, então $(I - \lambda L)u = t\, h(\lambda, u)$. Para ε_0 suficientemente pequeno, temos $(I - \lambda L)$ injetiva. De fato, se para todo $\varepsilon_0 > 0$, houvesse algum

$\lambda \in (\lambda^* - \varepsilon_0, \lambda^* + \varepsilon_0)$ tal que $\ker(I - \lambda L) \neq \emptyset$, então existiria uma sequência de autovalores $(1/\lambda_n)$ que converge para um autovalor não nulo $1/\lambda^*$, um absurdo pelo teorema (B.1). Portanto, $(I - \lambda L)$ é injetiva e

$$u = (I - \lambda L)^{-1}(t\, h(\lambda, u)) \Longrightarrow \|u\| \leq M \|h(\lambda, u)\| \Longrightarrow 1 \leq M \frac{\|h(\lambda, u)\|}{\|u\|}.$$

Por (H8), a última desigualdade é absurda para r suficientemente pequeno. Logo $0 \notin I - h_1(t, \partial B_2)$. Portanto

$$d(I - T_\lambda, B_2, 0) = d(I - h_1(1, \cdot), B_2, 0) = d(I - h_1(0, \cdot), B_2, 0) = d(I - \lambda L, B_2, 0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(I - T_{\lambda_1}, B_2, 0) &= d(I - \lambda_1 L, B_2, 0) \\ d(I - T_{\lambda_2}, B_2, 0) &= d(I - \lambda_2 L, B_2, 0) \end{aligned}$$

Junto com (3.3), temos

$$d(I - \lambda_1 L, B_2, 0) = d(I - \lambda_2 L, B_2, 0) \tag{3.4}$$

Por outro lado, pelo teorema (B.11), temos

$$d(I - \lambda_2 L, B_2, 0) = d(I - \lambda_1 L, B_2, 0)(-1)^\sigma$$

onde σ é a multiplicidade de $1/\lambda^*$, que por hipótese é ímpar. Logo

$$d(I - \lambda_1 L, B_2, 0) = -d(I - \lambda_2 L, B_2, 0) \tag{3.5}$$

Por (3.4) e (3.5), devemos ter

$$d(I - \lambda_1 L, B_2, 0) = d(I - \lambda_2 L, B_2, 0) = 0$$

O que contraria o teorema (B.11), pois como os operadores lineares $u \mapsto \lambda_1 L u$ e $u \mapsto \lambda_2 L u$ não admitem 1 como autovalor (já que $N(I - \lambda L) = \emptyset \ \ \forall \lambda$), então o item a) do teorema (B.11) garante que

$$\{d(I - \lambda_1 L, B_2, 0),\ d(I - \lambda_2 L, B_2, 0)\} \subset \{1, -1\}$$

(lembrando que os raios das bolas B_1 e B_2 são suficientemente pequenos). $\square$

Teorema 3.3 (Rabinowitz) *Suponhamos (H7), (H8) e (H9). Seja* $\lambda^* \in \mathbb{R}, \lambda^* \neq 0$ *tal que* $1/\lambda^*$ *é autovalor de* L *de multiplicidade ímpar. Então* λ^* *pertence a uma componente conexa maximal* Σ *, do fecho do conjunto das soluções não triviais de* $\mathcal{F}(\lambda, u) = 0$ *(i.e.* $\overline{S}$*), de modo que pelo menos uma das afirmações abaixo é verdadeira*

i) Σ *não é limitado.*

ii) Σ *possui um ponto* $(\mu, 0) \neq (\lambda^*, 0)$*, onde* $1/\mu$ *é outro autovalor de* L*.*

Para provar este teorema, usaremos os dois seguintes lemas, cujas demonstrações podem ser vistas em [26].

Lema 3.1 *Seja* $1/\mu$ *um autovalor de* L *e* Σ *a componente conexa maximal de* $\overline{S}$ *que contém* $(\mu, 0)$*. Se* Σ *é limitada e não contém nenhum outro ponto da forma* $(\lambda, 0)$ *onde* $1/\lambda$ *é algum outro autovalor de* L*, então existe um aberto limitado* $\Theta \subset \mathbb{R} \times E$ *com as seguintes propriedades:*

a) $\Sigma \subset \Theta$.

b) $\overline{S} \cap \partial\Theta = \emptyset$.

c) Se denotarmos por $J = \{1/\lambda_j;\ \lambda_j \text{ autovalor de } L\}$ *e* $\varepsilon_0 = d(\mu,\ J \setminus \{\mu\})$*, então*

$$\Theta \cap (\mathbb{R} \times \{[0\}) = (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$$

com $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon_0$.

d) $\exists\, \alpha > 0\ ;\ \forall\, (\lambda, u) \in \Theta,\ |\lambda - \mu| \geq \varepsilon \Longrightarrow \|u\| \geq \alpha$.

Lema 3.2 *Seja* E *um espaço de Banach,* $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ *um aberto limitado,* $F_0 : \overline{\Omega} \to E$ *compacta e* $F(t, x) = x - F_0(t, x)$*. Seja* $\Omega(t) = \{x \in E\ ;\ (t, x) \in \Omega\}$ *e* $y \in E$*. Seja* $J \subset \mathbb{R}$ *um intervalo tal que* $y \neq F(t, x)$ *para todo* $t \in J$ *e* $x \in (\partial\Omega)(t)$*. Então* $d(I - F_0(t, x), \Omega(t), y)$ *é invariante em* $t \in J$*.*

Demonstração do teorema (3.3): Suponhamos por contradição que o teorema seja falso, então pelo lema (3.1), existe um aberto Θ com as propriedades descritas no lema para $\mu = \lambda^*$. Definimos

$$\overline{S}_\lambda = \{u \in E \ ; \ (\lambda, u) \in \overline{S}\} \text{ e } \Theta_\lambda = \{u \in E \ ; \ (\lambda, u) \in \Theta\}.$$

O intervalo $(\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon)$ não contém inversos de autovalores de L. De fato, se existisse algum $\mu \in (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon)$ tal que $1/\mu$ fosse autovalor de L, então teríamos $\mu \in J \setminus \{\lambda^*\}$ e

$$d(\lambda^*, J \setminus \{\lambda^*\}) \leq d(\lambda^*, \mu) < \varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon_0 < d(\lambda^*, J \setminus \{\lambda^*\})$$

obviamente uma contradição. Pelo teorema (3.1), se $0 < |\mu - \lambda^*| < \varepsilon$, então μ não é ponto de bifurcação. Portando, definindo

$$s(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} d(0, \overline{S}_\lambda), & \text{se } 0 < |\lambda - \lambda^*| < \varepsilon \\ \frac{1}{2}\alpha, & \text{se } |\lambda - \lambda^*| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

vemos que $s(\lambda) > 0$.

Provaremos agora que para todo $\lambda \neq \lambda^*$, o grau topológico

$$d(I - T_\lambda, \Theta_\lambda \setminus \overline{B_{s(\lambda)}}, 0)$$

está bem definido. Para isto, mostraremos que a equação $I - T_\lambda = 0$ não tem solução na fronteira $\partial(\Theta_\lambda \setminus \overline{B_{s(\lambda)}})$. Separamos em casos:

a) Seja $0 < |\overline{\lambda} - \lambda^*| < \varepsilon$. Se u é uma solução da equação $\mathcal{F}(\overline{\lambda}, u) = u - T_{\overline{\lambda}} u = 0$, então $u \in \overline{S_{\overline{\lambda}}}$, portanto

$$2\, s(\overline{\lambda}) = d(0, \overline{S_{\overline{\lambda}}}) \leq d(0, u) = \|u\|.$$

Suponhamos por contradição que $u \in \partial(\Theta_{\overline{\lambda}} \setminus \overline{B_{s(\overline{\lambda})}}) \subset \partial\Theta_{\overline{\lambda}} \cup \partial\overline{B_{s(\overline{\lambda})}}$. Como $\|u\| > 2\, s(\overline{\lambda})$, então $u \notin \partial\overline{B_{s(\overline{\lambda})}}$, e portanto $u \in \partial\Theta_{\overline{\lambda}}$. Isto significa que para toda bola B em torno de u, existem $u_1, u_2 \in B$ tais que

$$\begin{cases} u_1 \in \Theta_{\overline{\lambda}} \\ u_2 \notin \Theta_{\overline{\lambda}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\overline{\lambda}, u_1) \in \Theta \\ (\overline{\lambda}, u_2) \notin \Theta \end{cases} \Longrightarrow (\overline{\lambda}, u) \in \partial\Theta$$

Porém, como $(\overline{\lambda}, u) \in \overline{S}$, isto contraria o item b) do lema (3.1).

b) Seja $|\overline{\lambda}-\lambda^*|\geq\varepsilon$. Se $u\in\overline{\Theta_{\overline{\lambda}}}$, existem $u_n\in\Theta_{\overline{\lambda}}$ com $u_n\to u$. Pelo item d) do lema (3.1), temos $\|u_n\|\geq\alpha$, logo $\|u\|\geq\alpha$. Como $s(\overline{\lambda})=\frac{1}{2}\alpha$, então $u\notin\overline{B_{s(\overline{\lambda})}}$. Isto prova que $\overline{\Theta_{\overline{\lambda}}}\cap\overline{B_{s(\overline{\lambda})}}=\emptyset$. Portanto, $\Theta_{\overline{\lambda}}\setminus\overline{B_{s(\overline{\lambda})}}=\Theta_{\overline{\lambda}}$, que implica em

$$\partial(\Theta_{\overline{\lambda}}\setminus\overline{B_{s(\overline{\lambda})}})=\partial(\Theta_{\overline{\lambda}})$$

Juntamente com o item b) do lema (3.1), vemos que a equação $\mathcal{F}=0$ não tem solução em $\partial(\Theta_{\overline{\lambda}}\setminus\overline{B_{s(\overline{\lambda})}})$. Como queríamos.

Agora mostraremos que

$$d(I-T_\lambda,\Theta_\lambda\setminus\overline{B_{s(\lambda)}},0)=0,\ \ \forall\,\lambda\neq\lambda^*. \tag{3.6}$$

Primeiro suponhamos que $\overline{\lambda}>\lambda^*$. O caso em que $\Theta_\lambda=\emptyset$ é imediato, então vamos supor que $\Theta_\lambda\neq\emptyset$. Como Ω é limitado, então podemos tomar $\lambda_0>\overline{\lambda}$ tal que $\Theta_{\lambda_0}=\emptyset$. Definimos

$$s=\inf\{s(\lambda)\ ;\ \overline{\lambda}\leq\lambda\leq\lambda_0\}.$$

Se $|\overline{\lambda}-\lambda^*|\geq\varepsilon$, então $|\lambda-\lambda^*|\geq\varepsilon$ para todo $\lambda\in(\overline{\lambda},\lambda_0)$, logo $s(\lambda)=\frac{1}{2}\alpha$ para todo $\overline{\lambda}\leq\lambda\leq\lambda_0$, e portanto $s=\frac{1}{2}\alpha>0$. Se, porém, tivermos $0<|\overline{\lambda}-\lambda^*|<\varepsilon$, então também ocorre $s>0$, pois caso contrário, teríamos $\inf\{d(0,\overline{S_\lambda})\ ;\ \overline{\lambda}\leq\lambda<\lambda^*+\varepsilon\}=0$, ou seja, para cada $n\in\mathbb{N}$, existiria λ_n tal que $d(0,S_{\lambda_n})<\frac{1}{n}$, que por sua vez implicaria na existência de $u_n\in S_{\lambda_n}$ tal que $\|u_n\|<\frac{1}{n}$, ou seja, $(\lambda_n,u_n)\in S$ com $u_n\to0$ e (tomando uma subsequência se necessário) isto contraria a não existência de bifurcação em $(\lambda^*,\lambda^*+\varepsilon)$. Portanto, $s>0$. Como $s\leq s(\overline{\lambda})$, então pelo item $d3$) do teorema (B.8), temos

$$d(I-T_{\overline{\lambda}},\Theta_{\overline{\lambda}}\setminus\overline{B_s},0)=d(I-T_{\overline{\lambda}},\Theta_{\overline{\lambda}}\setminus\overline{B_{s(\overline{\lambda})}},0)+d(I-T_{\overline{\lambda}},B_{s(\overline{\lambda})}\setminus\overline{B_s},0)$$

Como já vimos, a equação $\mathcal{F}=0$ não possui solução em $B_{s(\overline{\lambda})}\setminus\overline{B_s}$, pois as soluções devem ter normas maior ou igual a $2\,s(\overline{\lambda})$. Logo, $d(I-T_{\overline{\lambda}},B_{s(\overline{\lambda})}\setminus\overline{B_s},0)=0$, e portanto

$$d(I-T_{\overline{\lambda}},\Theta_{\overline{\lambda}}\setminus\overline{B_s},0)=d(I-T_{\overline{\lambda}},\Theta_{\overline{\lambda}}\setminus\overline{B_{s(\overline{\lambda})}},0). \tag{3.7}$$

Agora considere o conjunto

$$\mathcal{A}=\Theta\setminus([\lambda^*,\lambda_0]\times\overline{B_s}).$$

Então $\mathcal{A}$ é aberto limitado, $\mathcal{F} = 0$ não possui soluções na fronteira de $\mathcal{A}$ (ver item b do lema (3.1)) e $\mathcal{A}_\lambda = \Theta_\lambda \setminus \overline{B_s}$, em particular $\mathcal{A}_{\lambda_0} = \Theta_{\lambda_0} \setminus \overline{B_s} = \emptyset$. Pelo lema (3.2), $d(I - T_\lambda, \mathcal{A}_\lambda, 0)$ é invariante em $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_0]$, logo

$$d(I - T_{\overline{\lambda}}, \Theta_{\overline{\lambda}} \setminus \overline{B_s}, 0) = d(I - T_{\overline{\lambda}}, \mathcal{A}_{\overline{\lambda}}, 0) = d(I - T_{\lambda_0}, \mathcal{A}_{\lambda_0}, 0) = 0$$

junto com (3.7), temos

$$d(I - T_{\overline{\lambda}}, \Theta_{\overline{\lambda}} \setminus \overline{B_{s(\overline{\lambda})}}, 0) = 0.$$

para $\overline{\lambda} > \lambda^*$. O caso em que $\overline{\lambda} < \lambda^*$ é análogo. Portanto, vale (3.6).

Tomemos $\underline{\lambda} \in (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^*)$ e $\overline{\lambda} \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon)$. Para $0 < |\lambda - \lambda^*| < \varepsilon$, a equação $I - T_\lambda = 0$ possui solução em $\overline{B_{s(\lambda)}}$ apenas na origem, então pelo item $d2$ do teorema (B.8) junto com o teorma (B.10) e o comentário após ele, temos que

$$\begin{aligned} d(I - T_{\underline{\lambda}}, \Theta_{\underline{\lambda}}, 0) &= i(I - T_{\underline{\lambda}}, 0, 0) + d(I - T_{\underline{\lambda}}, \Theta_{\underline{\lambda}} \setminus \overline{B_{s(\underline{\lambda})}}, 0) \\ d(I - T_{\overline{\lambda}}, \Theta_{\overline{\lambda}}, 0) &= i(I - T_{\overline{\lambda}}, 0, 0) + d(I - T_{\overline{\lambda}}, \Theta_{\overline{\lambda}} \setminus \overline{B_{s(\overline{\lambda})}}, 0) \end{aligned}$$

Segue do lema (3.2) que $d(I - T_\lambda, \Theta_\lambda, 0)$ é constante para todo $\lambda \in (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon)$, e junto com (3.6), temos

$$i(I - T_{\underline{\lambda}}, 0, 0) = i(I - T_{\overline{\lambda}}, 0, 0). \tag{3.8}$$

Fixando $\lambda \in (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon)$, $\lambda \neq \lambda^*$, provaremos que existe $r > 0$ suficientemente pequeno, tal que a homotopia

$$H : [0, 1] \times B_r \to E$$

definida por

$$H(t, u) = \lambda L u + t \cdot h(\lambda, u)$$

é compacta e satisfaz

$$u - H(t, u) \neq 0 \quad \text{para todo } (t, u) \in [0, 1] \times \partial B_r.$$

De fato, caso contrário existiria uma sequência $(t_n, u_n) \in [0, 1] \times E$ com $u_n \neq 0$ e $u_n \to 0$, tal que

$$u_n - H(t_n, u_n) = 0$$

equivalentemente,

$$u_n - \lambda L u_n - t_n \cdot h(\lambda, u_n) = 0.$$

Tomando $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, obtemos

$$v_n = \lambda L v_n + t_n \cdot \frac{h(\lambda, u_n)}{\|u_n\|}.$$

Pela compacidade de L e h, e por $h(\lambda, u) = o(\|u\|)$ quando $\|u\| \to 0$, então fazendo $n \to 0$ e tomando uma subsequência se necessário, obtemos $v_n \to v_0$ com $\|v_0\| = 1$ e

$$v_0 = \lambda L v_0,$$

contrariando o fato de que λ não é inverso de autovalores de L. Portanto, para $r > 0$ suficientemente pequeno, podemos usar a invariância homotópica para obter

$$d(I - \lambda L, B_r, 0) = d(I - H(0, \cdot), B_r, 0) = d(I - H(1, \cdot), B_r, 0) = d(I - T_\lambda, B_r, 0)$$

Temos

$$\begin{aligned} i(I - \lambda L, 0, 0) &= \lim_{r \to 0} d(I - \lambda L, B_r, 0) \\ &= \lim_{r \to 0} d(I - T_\lambda, B_r, 0) \\ &= i(I - T_\lambda, 0, 0). \end{aligned}$$

Juntando este fato com (3.8), obtemos

$$i(I - \underline{\lambda} L, 0, 0) = i(I - \overline{\lambda} L, 0, 0) \tag{3.9}$$

Porém, como já vimos, o teorema (B.11) garante que $i(I - \lambda L, 0, 0) \in \{-1, 1\}$ e também troca de sinal quando λ atravessa o inverso de um autovalor de multiplicidade ímpar de L, ou seja,

$$i(I - \underline{\lambda} L, 0, 0) = -i(I - \overline{\lambda} L, 0, 0) \neq 0,$$

uma contradição com (3.9). □

Considere, em particular, o caso em que $h(\lambda, u) = 0$, então a equação (3.1) torna-se

$$u - \lambda L u = 0.$$

Para cada μ, onde $1/\mu$ é autovalor de L, os pontos do conjunto $\{\mu\} \times \ker(\frac{1}{\mu}I - L)$ são soluções da equação acima. Como $\ker(\frac{1}{\mu}I - L)$ é um subespaço vetorial, então μ é um ponto de bifurcação, além disso, $\{\mu\} \times \ker(\frac{1}{\mu}I - L)$ é conexo, fechado, ilimitado e está contido no fecho das soluções não triviais $\overline{S}$. Com isto verificamos o item i) do teorema de Rabinowitz. Precisamente, o conjunto $\{\mu\} \times \ker(\frac{1}{\mu}I - L)$ é a própria componente conexa maximal que passa pelo ponto $(\mu, 0)$. De fato, se houvesse algum outro ponto $(\mu_0, 0)$ na componente conexa, então $1/\mu_0 \neq 0$ seria limite se uma sequência de autovalores, o que sabemos que não ocorre. Logo, o item ii) do teorema de Rabinowitz não ocorre neste caso.

Como outro exemplo, tome $E = F = \mathbb{R}^2$ e considere a equação

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_2^3 \\ (1/2)u_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

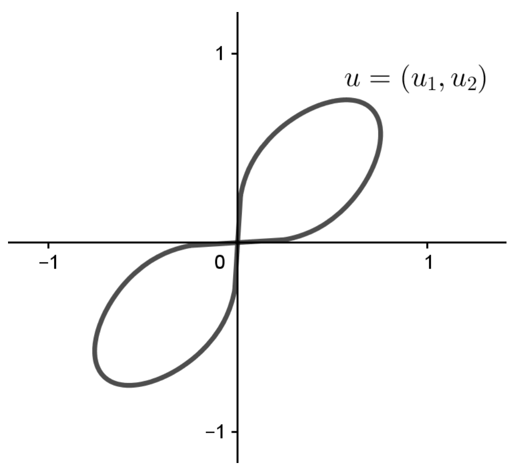
que está na forma (3.1), onde

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ h(\lambda, u) = \begin{pmatrix} -u_2^3 \\ (1/2)u_1^3 \end{pmatrix}.$$

Os inversos dos autovalores de L são 1 e 2, e o conjunto solução consiste da curva

$$u = \begin{cases} u_1 = \pm(2-\lambda)^{3/8}(\lambda-1)^{1/8} \\ u_2 = \pm(2-\lambda)^{1/8}(\lambda-1)^{3/8} \end{cases},\quad 1 \leq \lambda \leq 2$$

que é limitada, pois $\|u\| \leq 1$. Logo o item i) do teorema de Rabinowitz não ocorre. Por outro lado, o conjunto solução mostrado acima é uma curva conexa e contínua que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(2, 0)$, se verificando assim o item ii) do teorema de Rabinowitz.



$u = (u_1, u_2)$
1
−1
0
1
−1

Capítulo 4

Aplicação do Teorema Global de Rabinowitz

Neste capítulo, aplicaremos a versão global do teorema de Rabinowitz para estudar a bifurcação de $-\Delta$ que parte de um autovalor de multiplicidade ímpar, assim como a existência e estrutura das soluções positivas do problema (2.1). Consideremos, durante este capítulo, que Ω é um aberto, conexo e limitado em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1 *Se $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfzendo as hipóteses em (2.2) e λ_k um autovalor de multiplicidade ímpar de $-\Delta$. Então de $(\lambda_k, 0)$ bifurca um contínuo de soluções não triviais do problema (2.1) que é ilimitado ou que contém outro ponto $(\mu, 0)$, onde $\mu \neq \lambda_k$ é outro autovalor de $-\Delta$.*

Demonstração: De fato, suponhamos que $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ seja como no problema (2.1), ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x, u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

e considere sobre f as mesmas hipóteses que em (2.2), isto é,

$$f(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \to 0} \frac{f(x, s)}{s} = 0. \tag{2.2}$$

Denotemos $E := C_0(\overline{\Omega})$ e $L = (-\Delta)^{-1}$. Em [12] prova-se que L é um operador linear compacto. Da equação (2.1) e lembrando que $f(u)$ está definida como

$f(u)(x) = f(x, u(x))$, podemos escrever

$$u = \lambda L u + L(f(u))$$

Definindo $h(\lambda, u) = L(f(u))$, temos

$$u = \lambda L u + h(\lambda, u).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\|h(\lambda,u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} &= \frac{\|L(f(u))\|_\infty}{\|u\|_\infty} &\leq& \quad C\frac{\|f(u)\|_r}{\|u\|_\infty} \\
&\leq C \cdot \frac{\left\{\int_\Omega |f(u)|^r\right\}^{1/r}}{\|u\|_\infty} &\leq& \quad C \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}} \frac{\max\limits_{\Omega} |f(u)|}{\|u\|_\infty} \\
&\leq K \cdot \frac{\max\limits_{\Omega} |f(x,u(x))|}{\|u\|_\infty} &\leq& \quad K \cdot \frac{\max\limits_{|t|\leq\|u\|_\infty} |f(x,t)|}{\|u\|_\infty}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\|h(\lambda,u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leq K \cdot \max_{|t|\leq\|u\|_\infty} \frac{|f(x,t)|}{t}$$

Como $u \to 0 \Longrightarrow \|u\|_\infty \to 0 \Longrightarrow t \to 0$, então das hipóteses em (2.2), temos

$$\lim_{u\to 0} \frac{\|h(\lambda,u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 0.$$

Portanto, $\|h(\lambda, u)\|_\infty = o(\|u\|_\infty)$ e as hipóteses do teorema de Rabinowitz são satisfeitas. Finalmente, aplicamos o teorema de Rabinowitz para obter o conexo maximal $\Sigma \ni (\lambda_k, 0)$ como no teorema, isto é, ilimitado ou passando por outro ponto $(\mu, 0)$, onde $\mu \neq \lambda_k$ também é autovalor de L. $\square$

A partir de agora, vamos considerar a aplicação do teorema para o autovalor λ_1, já que este é um autovalor simples.

A equação (2.1) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + f(u), \quad \Omega \\ \quad u &= 0, \quad\quad\quad\quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Pelo teorema de Crandall-Rabinowitz, (4.1) possui uma curva de soluções $(\lambda(s), u(s))$ em $B_\rho(\lambda_1, 0)$, de modo que

$$u(s) = s\varphi_1 + s\psi(s), \text{ para } s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

com $(\lambda(0), u(0)) = (\lambda_1, 0)$. Denotemos por $\mathcal{C}_{1,\rho}$ essa curva. Então $\mathcal{C}_{1,\rho} \setminus \{(\lambda_1, 0)\}$ possui duas componentes conexas, uma obtida quando $s > 0$ e outra quando $s < 0$. Como $\varphi_1 > 0$ (ver [24]) e $\lim_{s\to 0} \psi(s) = 0$, então tomando ρ e ε suficientemente pequenos, teremos

$$\begin{cases} u(s) > 0, & \text{para } s > 0 \\ u(s) < 0, & \text{para } s < 0. \end{cases}$$

Denotaremos por $\mathcal{C}_{1,\rho}^+$ a componente conexa de $\mathcal{C}_{1,\rho} \setminus \{(\lambda_1, 0)\}$ formada pelas soluções positivas e, $\mathcal{C}_{1,\rho}^-$ formada pelas soluções negativas. Seja $\mathcal{C}_1$ a componente conexa de Σ que contém $(\lambda_1, 0)$. Chamaremos $\mathcal{C}_1$ de contínuo de soluções do problema (4.1). Então $\mathcal{C}_{1,\rho} \subset \mathcal{C}_1$. Seja também $\mathcal{C}_1^+$ a componente conexa de $\mathcal{C}_1 \setminus \{(\lambda_1, 0)\}$ que contém $\mathcal{C}_{1,\rho}^+$, e, $\mathcal{C}_1^-$ a componente conexa que contém $\mathcal{C}_{1,\rho}^-$.

Definindo $P^+ = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega});\, u > 0\}$ e $P^- = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega});\, u < 0\}$, vamos provar que $\mathcal{C}_1^+ \subset P^+$, $\mathcal{C}_1^- \subset P^-$, e ambas as componentes $\mathcal{C}_1^+, \mathcal{C}_1^-$ são ilimitadas.

Teorema 4.2 *Seja $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo as hipóteses em (2.2). Além disso, se $f \geq 0$, e $\mathcal{C}_1$ é o contínuo de soluções do problema (2.1) passando por $(\lambda_1, 0)$, então*

a) O conjunto $\mathcal{C}_1 \setminus \{(\lambda_1, 0)\}$ é constituído de exatamente duas componentes conexas $\mathcal{C}_1^+ \subset P^+$ e $\mathcal{C}_1^- \subset P^-$.

b) Cada uma das componentes conexas $\mathcal{C}_1^+$ e $\mathcal{C}_1^-$ são ilimitadas.

Demonstração: Para isto, definimos

$$D_1^+ = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C}_1^+ \,;\, u \in P^+\}$$

de modo que $\mathcal{C}_1^+ \subset P^+ \Leftrightarrow D_1^+ = \mathcal{C}_1^+$

Primeiro vamos mostrar que D_1^+ é aberto em $\mathcal{C}_1^+$. Para isto, basta observar que, tomando $(\lambda_0, u_0) \in D_1^+$ e uma sequência $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}_1^+$ com $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_0, u_0)$, como $u_0 > 0$, então teremos $u_n > 0$ para n suficientemente grande e consequentemente $(\lambda_n, u_n) \in D_1^+$, provando assim que D_1^+ é aberto em $\mathcal{C}_1^+$.

Para provar que D_1^+ é fechado em $\mathcal{C}_1^+$, tomemos $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C}_1^+$ (em particular, $(\lambda_0, u_0) \neq (\lambda_1, 0)$), e uma sequência $(\lambda_n, u_n) \in D_1^+$, com $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_0, u_0)$.

Como $u_n > 0$, então $u_0 \geq 0$. Sendo u_0 solução da equação (4.1), temos

$$\begin{cases} -\Delta u_0 &= \lambda_0 u_0 + f(u_0), & \Omega \\ u_0 &= 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

Como $f(u) \geq 0$, então existe $K > 0$ tal que

$$-\Delta u_0 + K u_0 = (K + \lambda_0) u_0 + f(u_0) \geq 0$$

e consequentemente pelo princípio do máximo forte, temos $u_0 = 0$ ou $u_0 > 0$. Suponhamos, para chegar numa contradição, que $u_0 = 0$. Como $u_n > 0$, então podemos fazer $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_\infty}$. Sendo (λ_n, u_n) também solução de (4.1), podemos escrever

$$\begin{cases} -\Delta v_n &= \lambda_n v_n + \dfrac{f(u_n)}{\|u_n\|_\infty}, & \Omega \\ v_n &= 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

Então, fazendo $n \to \infty$, seque da hipótese em (2.2) e da compacidade de L, que $v_n \to v_0$ (tomando subsequência, se necessário), com $\|v_0\|_\infty = 1$, $v_0 > 0$ e $-\Delta v_0 = \lambda_0 v_0$. Mas isto implicaria que λ_0 é um autovalor de autofunção positiva, o que é um absurdo, pois λ_1 é o único autovalor com esta propriedade (ver [24]). Portanto, devemos ter $u_0 > 0$, e consequetemente $(\lambda_0, u_0) \in D_1^+$, provando assim que D_1^+ é fechado em $\mathcal{C}_1^+$.

Finalmente, como D_1^+ é aberto e fechado em $\mathcal{C}_1^+$, então $D_1^+ = \mathcal{C}_1^+$ e portanto $\mathcal{C}_1^+ \subset P^+$. O caso $\mathcal{C}_1^- \subset P^-$ faz-se de modo análogo.

Agora, provaremos que as duas componentes conexas $\mathcal{C}_1^+$ e $\mathcal{C}_1^-$ são ilimitadas. De fato, pelo teorema de Rabinowitz, Σ deve ser ilimitada ou conter um ponto $(\mu, 0)$, onde μ é um autovalor diferente de λ_1. Como vimos acima, $(\mu, 0) \notin \mathcal{C}_1$ quando $\mu \neq \lambda_1$, portanto o segundo caso não ocorre e Σ é necessariamente ilimitada. Assim,

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_1^- \cup \{(\lambda_1, 0)\}$$

Ao menos uma das componentes $\mathcal{C}_1^-$ ou $\mathcal{C}_1^+$ é ilimitada. Suponhamos que $\mathcal{C}_1^+$ seja limitada e $\mathcal{C}_1^-$ ilimitada. Neste caso, tomemos o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + g(u), & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde

$$g(u)(x) = \begin{cases} f(x, u(x)) & , \quad \text{para } u \geq 0 \\ -f(x, -u(x)), & \quad \text{para } u < 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Para esta equação, temos o contínuo de soluções dado por

$$\widehat{\mathcal{C}}_1 = \widehat{\mathcal{C}}_1^+ \cup \widehat{\mathcal{C}}_1^- \cup \{(\lambda_1, 0)\}.$$

Pela definição de g, as soluções positivas de (4.2) são também soluções de (2.1). Além disso, para $u > 0$, temos as equivalências

$$\begin{aligned} -\Delta u = \lambda u + g(x,u) \quad &\Leftrightarrow \quad -\Delta u = \lambda u + f(x,u) \\ &\Leftrightarrow \quad -\Delta(-u) = \lambda(-u) - f(x, -(-u)) \\ &\Leftrightarrow \quad -\Delta(-u) = \lambda(-u) + g(x, -u) \end{aligned}$$

Ou seja, $u > 0$ é uma solução de (4.2) se, e somente se, $-u$ também for uma solução de (4.2). Desse modo, temos $\widehat{\mathcal{C}}_1^- = -\widehat{\mathcal{C}}_1^+$. Isto significa que ambas as componentes $\widehat{\mathcal{C}}_1^+$ e $\widehat{\mathcal{C}}_1^-$ são ilimitadas, e portanto, $\widehat{\mathcal{C}}_1$ é ilimitado. Além disso, como os elementos do conexo $\widehat{\mathcal{C}}_1^+$ são soluções positivas de (2.1), então $\widehat{\mathcal{C}}_1^+ \subset \mathcal{C}_1 \subset \Sigma$, e para ρ suficientemente pequeno, temos $\mathcal{C}_{1,\rho}^+ \subset \widehat{\mathcal{C}}_1^+$. Como $\widehat{\mathcal{C}}_1^+$ é um conexo em $\mathcal{C}_1$ que contém $\mathcal{C}_{1,\rho}^+$, então $\widehat{\mathcal{C}}_1^+ \subset \mathcal{C}_1^+$. E como $\widehat{\mathcal{C}}_1^+$ é ilimitado, isto contradiz a hipótese de que $\mathcal{C}_1^+$ é limitado. $\square$

Apêndice A

Cálculo em espaços de Banach

Faremos uma pequena introdução ao cálculo diferencial em espaços de Banach, mostrando alguns conceitos e teoremas importantes usados de forma explícita neste trabalho. Para mais detalhes, consultar [1], [3], [8], [14] e [19].

Sejam E e F espaços de Banach e U um aberto em E. Diremos que uma função $f : U \to F$ é Fréchet-diferenciável no ponto $x_0 \in U$ quando existir um operador linear contínuo $A : E \to F$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

Isto significa que ao escrever

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + R_f(h),$$

teremos $R_f(h) = o(\|h\|)$, onde esta notação significa que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|R_f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso, A chama-se a derivada de Fréchet de f em x_0, e denotamos $A = f'(x_0)$. Dizemos simplesmente que f é Frechét-diferenciável quando existe a derivada de Frechét de f em todos os pontos de U.

Se $f : U \subset E \to F$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$, então para todo $h \in E$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0)}{\varepsilon} - f'(x_0)h \right\| &= \left\| \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0) - f'(x_0)\varepsilon h}{\varepsilon} \right\| \\ &= \frac{\|f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0) - f'(x_0)\varepsilon h\|}{\|\varepsilon h\|} \|h\| \end{aligned}$$

de modo que o lado direito da igualdade acima converge para zero quando $\varepsilon \to 0$. Portanto
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon h) - f(x_0)}{\varepsilon} = f'(x_0)h.$$
Assim, quando f é Fréchet-diferenciável, podemos usar a igualdade acima para calcular $f'(x_0)h$. Observe que o limite acima pode existir mesmo que f não seja Fréchet-diferenciável. Quando tal limite existe e é igual a um operador linear aplicado em h, dizemos que f é Gâtaux-diferenciável.

Quando a aplicação derivada
$$\begin{array}{rcl} f' : U & \to & L(E, F) \\ u & \mapsto & f'(u) \end{array}$$
é contínua, dizemos que f é de classe C^1 e escrevemos $f \in C^1$. Indutivamente, dizemos que f é de classe C^k e escrevemos $f \in C^k$, onde $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, quando $f' \in C^{k-1}$. Finalmente, $f \in C^\infty$ quando $f \in C^k$ para todo $k \geq 1$.

Teorema A.1 *Sejam E e F espaços de Banach e $U \subset E$ aberto. Se $f, g : U \to F$ são Frechét-diferenciáveis em x_0 e $\theta \in \mathbb{R}$, então*

a) A derivada de Frechét de f em x_0 é única e f é contínua em x_0.

b) A função $f + \theta g$ é Frechét-diferenciável em x_0 e
$$(f + cg)'(x_0) = f'(x_0) + \theta g'(x_0).$$

Demonstração:

a) Se f é Frechét-diferenciável em x_0, então
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_f(h)$$
com $R_f(h) = o(\|h\|)$. A continuidade de f segue do fato de que $f'(x_0)h$ e $R_f(h) = \|h\| \cdot (R_f(h)/\|h\|)$ convergem para zero quando $\|h\| \to 0$. Suponhamos agora, para chegar numa contradição, que existe outro operador linear contínuo $A : E \to F$ tal que
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r_f(h)$$

com $r_f(h) = o(\|h\|)$ e $A \neq f'(x_0)$, então existe $h^* \in E \setminus \{0\}$ tal que $a := \|Ah^* - f'(x_0)h^*\| > 0$. Por um lado, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|A(th^*) - f'(x_0)(th^*)\|}{\|th^*\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\|r_f(th^*) - R_f(th^*)\|}{\|th^*\|} = 0,$$

por outro lado,

$$\frac{\|A(th^*) - f'(x_0)(th^*)\|}{\|th^*\|} = \frac{\|Ah^* - f'(x_0)h^*\|}{\|h^*\|} = \frac{\|Ah^* - f'(x_0)h^*\|}{\|h^*\|} = \frac{a}{\|h^*\|} > 0$$

é uma constante > 0, assim chegamos numa ontradição, como queríamos.

b) Basta observar que

$$\begin{aligned} (f+\theta g)(x_0+h) &= f(x_0+h) + \theta g(x_0+h) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + R_f(h) + \theta(g(x_0) + g'(x_0)h + R_g(h)) \\ &= (f+\theta g)(x_0) + (f'(x_0) + \theta g'(x_0))h + (R_f(h) + R_g(h)) \end{aligned}$$

com

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R_f(h) + R_g(h)\|}{\|h\|} \leq \lim_{h\to 0} \left(\frac{\|R_f(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|r_f(h)\|}{\|h\|} \right) = 0.$$

Portanto $f + \theta g$ é Fréchet-diferenciável e

$$(f+cg)'(x_0) = f'(x_0) + \theta g'(x_0).$$

□

Teorema A.2 (Regra da Cadeia) *Sejam E, F e G espaços de Banach, $f : U \subset E \to F$, $g : V \subset F \to G$, com U e V abertos e $f(U) \subset V$. Se f é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$ e g é Fréchet-diferenciável em $f(x_0)$, então a aplicação $g \circ f : U \to G$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

Demonstração: Como f é Fréchet-diferenciável em x_0, então para algum $\delta > 0$, temos

$$\|h\| < \delta \Longrightarrow \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{\|h\|} < 1$$

Portanto, para $\|h\| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|f(x_0+h) - f(x_0)\| &\leq \|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| + \|f'(x_0)h\| \\ &\leq \|h\| + \|f'(x_0)\| \, \|h\| \\ &\leq C\|h\| \end{aligned}$$

onde $C = 1 + \|f'(x_0)\|$.

Como g é Fréchet-diferenciável em $f(x_0)$, então

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0) &= g'(f(x_0))(f(x_0+h)-f(x_0))+R_g(f(x_0+h)-f(x_0))\\ &= g'(f(x_0))(f'(x_0)h+R_f(h))+R_g(f(x_0+h)-f(x_0))\\ &= g'(f(x_0))f'(x_0)h+g'(f(x_0))R_f(h)+R_g(f(x_0+h)-f(x_0))\end{aligned}$$

com $R_f(h) = o(\|h\|)$ e $R_g(f(x_0+h)-f(x_0)) = o(f(x_0+h)-f(x_0))$.

Para $\|h\| < \delta$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\|g'(f(x_0))R_f(h)+R_g(f(x_0+h)-f(x_0))\|}{\|h\|} &\leq \frac{\|g'(f(x_0))R_f(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|R_g(f(x_0+h)-f(x_0)\|}{\|h\|}\\ &\leq \|g'(f(x_0))\|\frac{\|R_f(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)\|}{\|h\|}\frac{\|R_g(f(x_0+h)-f(x_0))\|}{\|f(x_0+h)-f(x_0)\|}\\ &\leq \|g'(f(x_0))\|\frac{\|R_f(h)\|}{\|h\|}+C\frac{\|R_g(f(x_0+h)-f(x_0))\|}{\|f(x_0+h)-f(x_0)\|}\end{aligned}.$$

O lado direito da desigualdade acima converge para zero quando $\|h\| \to 0$. Então

$$g'(f(x_0))R_f(h)+R_g(f(x_0+h)-f(x_0)) = o(\|h\|).$$

Portanto $g \circ f$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\circ f'(x_0).$$

$\square$

Teorema A.3 (Desigualdade do Valor Médio) *Sejam E e F espaços de Banach, $U \subset E$ aberto e $f : U \to F$ uma aplicação Frechét-diferenciável. Se $u, v \in U$ são tais que o segmento $[u, v] := \{tv + (1-t)u;\ 0 \leq t \leq 1\}$ está contido em U, então*

$$\|f(u)-f(v)\| \leq \sup_{w\in[u,v]} \|f'(w)\|\cdot\|u-v\|.$$

Demonstração: O caso $f(u) = f(v)$ é imediado, então suponhamos que $f(u) \neq f(v)$. Pelo corolário do Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear limitado $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e

$$\varphi(f(u)-f(v)) = \|f(u)-f(v)\|.$$

Definindo $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \varphi(f(tu + (1-t)v)),$$

obtemos

$$h'(t) = \varphi(f'(tu + (1-t)v)(u-v)).$$

Pelo teorema do valor médio para funções em $\mathbb{R}$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\theta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|f(u) - f(v)\| &= \varphi(f(u) - f(v)) = \varphi(f(u)) - \varphi(f(v)) \\
&= h(1) - h(0) = h'(\theta) \\
&= \varphi(f'(\theta u + (1-\theta)v)(u-v)) \\
&\leq \|\varphi\| \|f'(\theta u + (1-\theta)v)\| \|u-v\| \\
&= \|f'(\theta u + (1-\theta)v)\| \|u-v\| \\
&\leq \sup_{w\in[u,v]} \|f'(w)\| \cdot \|u-v\|.
\end{aligned}$$

Como queríamos. □

Agora considerem E, F e G espaços de Banach, U um subconjunto aberto de $E \times F$, $(\lambda_0, u_0) \in U$, e uma aplicação $f : U \to G$. Dizemos que f é diferenciável com respeito à λ em (λ_0, u_0) quando existe um operador linear contínuo $A : E \to G$ tal que

$$f(\lambda_0 + h, u_0) = f(\lambda_0, u_0) + Ah + o(\|h\|).$$

Neste caso, A é unicamente determinada e chama-se derivada parcial de f em (λ_0, u_0) com respeito a λ (que representa a primeira coordenada) e denotamos $A = f_\lambda(x_0, y_0)$. De modo análogo, definimos a derivada parcial de f em (λ_0, u_0) com respeito a u (que representa a segunda coordenada) como sendo um operador linear contínuo $B : F \to G$ tal que

$$f(\lambda_0, u_0 + h) = f(\lambda_0, u_0) + Bh + o(\|h\|).$$

e denotamos $B = f_u(\lambda_0, u_0)$.

Se f é diferenciável em (λ_0, u_0), então f tem as derivadas parciais com respeito a λ e u em (λ_0, u_0), com

$$f_\lambda(\lambda_0, u_0)(h) = f'(\lambda_0, u_0)(h, 0) \ \text{ e } \ f_u(\lambda_0, u_0)(k) = f'(\lambda_0, u_0)(0, k)$$

Podemos pensar nas derivadas parciais $f_\lambda(\lambda_0, u_0)$ e $f_u(\lambda_0, u_0)$ como sendo as derivadas de Frechét das aplicações $\lambda \mapsto f(\lambda, u_0)$ e $u \mapsto f(\lambda_0, u)$. Desse modo, podemos aplicar os teoremas para derivadas de Frechét fazendo as devidas adaptações.

As aplicações $f_\lambda : U \to L(E,G)$ e $f_u : U \to L(F,G)$ também podem possuir derivadas parciais, e quando possuem, denotamos

$$f_{\lambda u}(\lambda_0, u_0) = (f_\lambda)_u(\lambda_0, u_0).$$

As vezes escreveremos $f_{\lambda u}(\lambda_0, u_0)[s,t]$ no lugar de $f_{\lambda u}(\lambda_0, u_0)(s)(t)$, e as vezes escreveremos $f_{\lambda u}(\lambda_0, u_0)s^2$ no lugar de $f_{\lambda u}(\lambda_0, u_0)[s,s]$ para tornar mais simples a notação em algumas contas.

A seguir usaremos dois fatos importantes para demonstrar o teorema da função implítica: o primeiro é o teorema do ponto fixo para contrações (ou teorema do ponto fixo de Banach) e o segundo é o fato de que o conjunto dos operadores lineares contínuos e invertíveis de E em F é um subconjunto aberto de $L(E,F)$. As demonstrações foram omitidas para não prolongar o texto e por não terem sido citados explicitamente durante o trabalho, mas as demonstrações podem ser encontradas em [8] e [19].

Teorema A.4 (Teorema da Função Implícita) *Sejam E, F e G espaços de Banach, um aberto $U \subset E \times F$ e $f : U \to G$ uma aplicação contínua tal que*

a) $f(\lambda_0, u_0) = 0$ para algum $(\lambda_0, u_0) \in U$.

b) f_u é contínua em torno de (λ_0, u_0);

c) $f_u(\lambda_0, u_0)$ é contínua e bijetiva.

Então existem abertos $\Theta \subset E$ em torno de λ_0 , $V \subset F$ em torno de u_0 e uma aplicação contínua

$$u : \Theta \to V$$

tal que

$$f(\lambda, u(\lambda)) = 0 \text{ para todo } \lambda \in \Theta,$$

e se $f(\lambda, v) = 0$ com $(\lambda, v) \in \Theta \times V$, então $v = u(\lambda)$ (em particular, $u(\lambda_0) = u_0$). Além disso, se $f \in C^k$, $k \geq 1$, então $u \in C^k$ e

$$u'(\lambda) = -[f_u(p)]^{-1} \circ f_\lambda(p), \text{ onde } p = (\lambda, u(\lambda)) \text{ e } \lambda \in \Theta.$$

Demonstração: Primeiro observe que podemos assumir, sem perder a generalidade, que $F = G$, $(\lambda_0, u_0) = (0, 0)$ e $f_u(\lambda_0, u_0) = I_F$. De fato, definindo

$$g(\lambda, u) = [f_u(\lambda_0, u_0)]^{-1} \circ f(\lambda_0 + \lambda, u_0 + u),$$

vemos que g é contínua e satisfaz todas as hipóteses do teorema com $F = G$, $\lambda_0 = 0$, $u_0 = 0$ e $g_u(0, 0) = I_F$. Além disso, a tese do teorema vale para g se, e só se, vale também para f.

Portanto, a partir de agora, vamos assumir que $F = G$, $(\lambda_0, u_0) = (0, 0)$ e $f_u(\lambda_0, u_0) = I_F$. Agora, definimos uma aplicação $R : U \to F$ tal que

$$R(\lambda, u) = u - f(\lambda, u).$$

Assim,

$$R_u(0, 0) = I_F - f_u(0, 0) = 0.$$

A continuidade de f_u em torno de $(0, 0)$ implica também na continuidade de R_u em torno de $(0, 0)$. Portanto, existem $r, r_1 > 0$ tais que

$$\|R_u(\lambda, u)\| \leq \frac{1}{2} \text{ para todo } (\lambda, u) \in B_r \times \overline{B_{r_1}}$$

onde $B_r = \{\lambda \in X \ ; \ \|\lambda\| < r\}$ e $B_{r_1} = \{u \in Y \ ; \ \|u\| < r_1\}$. Usando o teorema do valor médio para a aplicação $R(\lambda, \cdot)$ e a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, u_1) - R(\lambda, u_2)\| &\leq \sup_{w \in [u_1, u_2]} \|R_u(\lambda, w)\| \, \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

para todos $(\lambda, u_1), (\lambda, u_2) \in B_r \times \overline{B_{r_1}}$. Assim, para todo $\lambda \in B_r$, temos

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, u)\| &\leq \|R(\lambda, u) - R(\lambda, 0)\| + \|R(\lambda, 0)\| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|u\| + \|f(\lambda, 0)\|. \end{aligned}$$

Tomando $r > 0$ pequeno suficiente para

$$\|f(\lambda, 0)\| < \frac{1}{2} r_1, \quad \text{para todo } \lambda \in B_r$$

obtemos

$$\|R(\lambda, u)\| < r_1 \text{ para todo } (\lambda, u) \in B_r \times \overline{B_{r_1}}.$$

Assim, para todo $\lambda \in B_r$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} R(\lambda,\cdot): \overline{B_{r_1}} & \to & \overline{B_{r_1}} \\ u & \mapsto & R(\lambda,u) \end{array}$$

é uma contração e portanto possui um único ponto fixo. Ou seja, para cada $\lambda \in B_r$, existe um único $u = u(\lambda) \in \overline{B_{r_1}}$ tal que $R(\lambda,u) = u$, mas esta última igualdade é equivalente a $f(\lambda,u) = 0$. Isto define uma aplicação $u : B_r \to \overline{B_{r_1}}$ de modo que $f(\lambda,u(\lambda)) = 0$ para todo $\lambda \in B_r$. Para verificar a continuidade de u, considere $\lambda, \lambda' \in B_r$, e portanto

$$\begin{array}{rcl} \|u(\lambda) - u(\lambda')\| & = & \|R(\lambda,u(\lambda)) - R(\lambda',u(\lambda')\| \\ & \leq & \|R(\lambda,u(\lambda)) - R(\lambda,u(\lambda')\| + \|R(\lambda,u(\lambda')) - R(\lambda',u(\lambda'))\| \\ & \leq & \frac{1}{2}\|u(\lambda) - u(\lambda'))\| + \|R(\lambda,u(\lambda')) - R(\lambda',u(\lambda')\|. \end{array}$$

Logo,

$$\|u(\lambda) - u(\lambda')\| \leq 2 \cdot \|R(\lambda,u(\lambda')) - R(\lambda',u(\lambda')\|$$

Pela continuidade de R, o lado direito da desigualdade acima converge para zero quando $\lambda \to \lambda'$ e consequentemente $\|u(\lambda) - u(\lambda')\| \to 0$. Isto prova a contiuidade de u. Agora, basta definirmos $V = B_{r_1}$ e $\Theta = u^{-1}(V) \subset B_r$ para obtermos a aplicação contínua

$$u : \Theta \to V$$

tal que

$$f(\lambda,u(\lambda)) = 0 \text{ para todo } \lambda \in \Theta.$$

Além disso, se $f(\lambda,v) = 0$ com $(\lambda,v) \in \Theta \times V$, então $v = u(\lambda)$ pela unicidade do ponto fixo de $R(\lambda,\cdot)$.

Finalmente, suponhamos que $f \in C^k,\ k \geq 1$. Pela desigualdade do valor médio, temos

$$\begin{array}{rcl} \|u(\lambda+h) - u(\lambda)\| & \leq & 2 \cdot \|R(\lambda+h,u(\lambda)) - R(\lambda,u(\lambda))\| \\ & \leq & 2 \cdot \sup\limits_{w \in [\lambda,\lambda+h]} \|R_\lambda(w,u(\lambda))\|\,\|h\| \\ & \leq & C\|h\|. \end{array}$$

Também,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & f(\lambda+h,u(\lambda+h)) - f(\lambda,u(\lambda)) \\ & = & [f(\lambda+h,u(\lambda+h)) - f(\lambda,u(\lambda+h))] + [f(\lambda,u(\lambda+h)) - f(\lambda,u(\lambda))] \\ & = & [f_\lambda(\lambda,u(\lambda+h))h + o(\|h\|)] + [f_u(\lambda,u(\lambda))(u(\lambda+h) - u(\lambda)) + o(\|u(\lambda+h) - u(\lambda\|)]. \end{array}$$

Antes de continuarmos, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\|o(\|h\|)+o(\|u(\lambda+h)-u(\lambda)\|)\|}{\|h\|} &\leq \frac{\|o(\|h\|)\|}{\|h\|}+\frac{\|u(\lambda+h)-u(\lambda)\|}{\|h\|}\cdot\frac{\|o(\|u(\lambda+h)-u(\lambda)\|)\|}{\|u(\lambda+h)-u(\lambda)\|}\\
&\leq \frac{\|o(\|h\|)\|}{\|h\|}+C\cdot\frac{\|o(\|u(\lambda+h)-u(\lambda)\|)\|}{\|u(\lambda+h)-u(\lambda)\|}
\end{aligned}$$

Pela continuidade de u, o lado direito da desigualdade acima converge para zero quando $\|h\|\to 0$. Portanto

$$o(\|h\|)+o(\|u(\lambda+h)-u(\lambda)\|)=o(\|h\|)$$

Daí, segue que

$$f_\lambda(\lambda,u(\lambda+h))h+f_u(\lambda,u(\lambda))(u(\lambda+h)-u(\lambda))+o(\|h\|)=0$$

e portanto

$$\begin{aligned}
u(\lambda+h)-u(\lambda) &= -[f_u(\lambda,u(\lambda))]^{-1}f_\lambda(\lambda,u(\lambda+h))h-[f_u(\lambda,u(\lambda))]^{-1}o(\|h\|)\\
&= -[f_u(\lambda,u(\lambda))]^{-1}f_\lambda(\lambda,u(\lambda+h))h+o(\|h\|)
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos calcular

$$\begin{aligned}
&\frac{\|u(\lambda+h)-u(\lambda)+[f_u(\lambda,u(\lambda))]^{-1}f_\lambda(\lambda,u(\lambda))h\|}{\|h\|}=\\
&=\frac{\|-[f_u(\lambda,u(\lambda))]^{-1}f_\lambda(\lambda,u(\lambda+h))h+o(\|h\|)+[f_u(\lambda,u(\lambda))]^{-1}f_\lambda(\lambda,u(\lambda))h\|}{\|h\|}\\
&=\frac{\|[f_u(\lambda,u(\lambda))]^{-1}[f_\lambda(\lambda,u(\lambda+h))-f_\lambda(\lambda,u(\lambda))]h+o(\|h\|)\|}{\|h\|}\\
&\leq \|[f_u(\lambda,u(\lambda))]^{-1}\|\,\|f_\lambda(\lambda,u(\lambda+h))-f_\lambda(\lambda,u(\lambda))\|+\frac{\|o(\|h\|)\|}{\|h\|}
\end{aligned}$$

Pela continuidade de u e f_λ, o lado direito converge para zero quando $h\to 0$. Isto prova que u é diferenciável com

$$u'(\lambda)=-[f_u(p)]^{-1}\circ f_\lambda(p),\ \text{onde } p=(\lambda,u(\lambda)) \text{ e } \lambda\in\Theta.$$

Para mostrar que $u\in C^k$, usamos um argumento indutivamente, assim: como $f\in C^k,\ k\geq 1$, então f_u e f_λ são contínuas, junto com a continuidade de u e pela forma de u', vemos que u' é contínua, portanto $u\in C^1$. Novamente, se $f\in C^2$, então f_u e f_λ são de classe C^1, e como $u\in C^1$, então pela forma de u' vemos que $u'\in C^1$, portanto $u\in C^2$. Seguimos com esse argumento até obter $u\in C^k$, como queríamos. $\square$

Apêndice B

Outros resultados importantes

Agora apresentaremos alguns conceitos e teoremas necessários sobre análise funcional, equações dierenciais e o grau topológico. Este difere do apêndice anterior por não conter demonstrações para não estender o texto.

Análise Funcional

Seja E um espaço de Banach e $T : E \to E$ um operador linear. O *resolvente* de T é o conjunto

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \overline{Rg(\lambda I - T)} = E\ ,\ (\lambda I - T)^{-1} : Rg(\lambda I - T) \to E \ \text{ é limitado}\}.$$

O *espectro* de T é o complementar do resolvente $\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T)$. Obviamente, todo autovalor pertence ao espectro.

Teorema B.1 *Suponhamos que E é um espaço de Banach de dimensão infinita e $T : E \to E$ é um operador linear e compacto. Então*

a) $0 \in \sigma(T)$.

b) Todos os elementos não nulos de $\sigma(T)$ são autovalores.

c) O conjunto $\sigma(T) \setminus \{0\}$ ou é vazio, ou é finito, ou é uma sequência que converge para 0.

Um operador linear $T : E \to F$ entre espaços normados é dito compacto quando $\overline{T(B)}$ é compacto em F, onde B é a bola unitária fechada em E. Todo operador compacto é contínuo.

Teorema B.2 *Sejam E e F espaços normados. As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear $T : E \to F$.*

a) T é compacto.

b) $\overline{T(A)}$ é compacto para todo limitado A em E.

c) Para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em E, a sequência $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possu subsequência convergente em F.

Teorema B.3 *Sejam E e F espaços normados e $\mathcal{K}(E,F)$ o conjunto dos operadores compactos de E em F .Então $\mathcal{K}(E,F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E,F)$. Se F é espaço de Banach, então $\mathcal{K}(E,F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E,F)$.*

Teorema B.4 *Sejam E_0, E, F, F_0 espaços normados e $S : E_0 \to E$, $T : E \to F$ e $U : F \to F_0$ operadores lineares, onde S e U são contínuos e T é compacto. Então $U \circ T \circ S$ é compácto.*

Equações diferenciais

Considere o problema de encontrar $u \in E$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u, \ \Omega \\ u = & 0, \ \Omega \end{cases} \tag{B.1}$$

Quando existem $\lambda \in \mathbb{R}$e $u \neq 0$ satisfazendo (B.1), dizemos que λ é um autovalor e u é uma autofunção associada ao autovalor λ.

Teorema B.5

a) O problema (B.1) possui uma sequência não decrescente de autovalores $\{\lambda_k\}$ tais que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, onde λ_1 é um autovalor simples e $\lambda_k \to +\infty$. Também existe uma sequência de funções $\{\varphi_k\}$ onde cada φ_k é uma autofunção associada a λ_k e

$$\int_\Omega \varphi_i \varphi_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ se \ \ i = j \\ 0, \ se \ \ i \neq j \end{cases}$$

b) Para todo autovalor λ_k de (B.1), o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = & \lambda u + h, \quad \Omega \\ u = & 0, \quad \Omega \end{cases} \tag{B.2}$$

onde $h \in L^2(\Omega)$, possui solução se, e somente se,

$$\int_\Omega h\varphi_k = 0.$$

Teorema B.6 (Princípio do máximo forte) *Seja Ω um conexo limitado satisfazendo a condição de esfera interior, e $Lu := -\Delta u + c(x)u$, com $c(x) \in L^\infty(\Omega)$. Se $c \geq 0$ e para $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, se tem*

$$\begin{cases} Lu \geq 0, & \Omega \\ u \geq 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

Então $u = 0$ ou $u > 0$.

Grau Topológico de Brouwer

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \notin f(\partial\Omega)$. Definimos

$$\sum := \{(f, \Omega, y) \,;\, f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n),\ y \notin f(\partial\Omega)\}.$$

Ou seja, se $(f, \Omega, y) \in \sum$, então a equação $f(x) = y$ n ao tem solução em $\partial\Omega$.

Teorema B.7 *Existe uma única aplicação $d : \sum \to \mathbb{Z}$ que satisfaz as seguintes propriedades*

d1) Se $y \in \Omega$, então $d(I, \Omega, y) = 1$.

d2) Se Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos disjuntos de Ω e $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, então

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

d3) Se $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ e $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ são contínuas e $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$, então $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ não depende de $t \in [0,1]$.

Esta aplicação d chama-se *grau topológico de Brouwer* de f relativo a Ω e y.

Grau topológico de Leray-Schauder

Nesta seção trataremos de definir o grau topológico em espaços de dimensão infinita.

Seja E um espaço de Banach real, $\Omega \subset E$ um aberto limitado, $y \in E$ e $T : \overline{\Omega} \to E$ compacto. Definimos

$$\Gamma := \{(I - T, \Omega, y)\,;\;\; T : \overline{\Omega} \to E \;\text{ compacto, e }\; y \notin (I - T)(\partial\Omega)\}.$$

Teorema B.8 *Existe uma única aplicação $d : \Gamma \to \mathbb{Z}$ que satisfaz as seguintes propriedades*

d1) *Se $y \in \Omega$, então $d(I, \Omega, y) = 1$.*

d2) *Se Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos disjuntos de Ω com*

$$y \notin (I - T)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)),$$

então

$$d(I - T, \Omega, y) = d(I - T, \Omega_1, y) + d(I - T, \Omega_2, y).$$

d3) *Se $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to E$ é contínua e compacta, e $y : [0, 1] \to E$ é contínua com $y(t) \notin I - h(t, \partial\Omega)$ para todo $t \in [0, 1]$, então $d(I - h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ não depende de $t \in [0, 1]$.*

Esta aplicação d chama-se *grau topológico de Leray-Schauder* de $I - T$ relativa a Ω e a y.

Teorema B.9 *Se $d(I - T, \Omega, y) \neq 0$, então a equação $x - Tx = y$ tem pelo menos uma solução em Ω.*

Teorema B.10 *Se $(I - T, \Omega, y) \in \Gamma$ e $\Omega_1 \subset \Omega$ é um aberto tal que $y \notin (I - T)(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, então*

$$d(I - T, \Omega, y) = d(I - T, \Omega_1, y).$$

Seja x_0 uma solução isolada da equação $(I - T)x = y$. Então para algum $r_0 > 0$ suficientemente pequeno, x_0 é a única solução em $B(x_0, r_0)$. Pelo teorema (B.10),

$$r \in (0, r_0) \Longrightarrow d(I - T, B(x_0, r), y) = d(I - T, B(x_0, r_0), y)$$

Esse valor é o índice da solução isolada x_0, e também é definido por

$$i(I - T, x_0, y) = \lim_{r \to 0} d(I - T, B(x_0, r), y).$$

Teorema B.11 *Seja T um operador compacto definido em torno da origem, diferenciável na origem e tal que $T(0) = 0$.*

a) Se 1 não é autovalor de $T'(0)$, então 0 é uma solução isolada de $(I - T)x = 0$ e

$$i(I - T, 0, 0) = (-1)^\beta$$

onde β é a soma das multiplicidades algébrias dos autovalores de $T'(0)$ que estão no intervalo $(1, +\infty)$.

b) Quando $\frac{1}{\lambda}$ não é autovalor de $T'(0)$, o índice $i(I - \lambda T, 0, 0)$ está bem definido e é multiplicado por $(-1)^{m_j}$ quando λ atravessa um inverso de um autovalor de multiplicidade m_j.

Bibliografia

[1] Ambrosetti, A. ; Prodi, G. *A primer of Nonlinear Analysis.* Cambridge Universit Press, 1993.

[2] Bartle, R. *The Elements of Integration.* University of Illinois, 1996.

[3] Botelho, G. ; Pellegrino, D. ; Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional.* Sociedade brasileira de matemática, 2012.

[4] Courant, R. ; Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics.* Wiley, 1989.

[5] Chow, S. N. ; Hale, J. K. *Methods of Bifurcation Theory.* Springer-Verlag, 1982.

[6] Crandall, M. G. ; Rabinowitz, P. H. ; Bardos, B. ; Bessis, D. *Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics.* NATO Advanced Study Institute, 1979.

[7] Crandall, M. G. ; Rabinowitz, P. H. *Bifurcation From Simple Eigenvalues.* Journal of Functional Analysis 8, 1971.

[8] Deimling, K. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer Verlag, Berlim, 1985.

[9] Feckan, M. *Topological Degree Approach to Bifurcation Problems.* Springer, 2008.

[10] Fernández, A. S. *Métodos topológicos para ecuaciones elipticas (parte II).* Notas de aula, Universidade Federal do Pará, 2014.

[11] Furtado, M. *Notas de EDP2(versão 1.2).* Universidade de Brasília, 2012.

[12] Gabert, R. F. *Teoria do grau topológico e sua aplicação em um problema elíptico ressonante superlinear.* Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2015.

[13] Gilbarg, D. ; Trudinger, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, 2001.

[14] Gómez, J. L. *Spectral theory and nonlinear functional analysis.* Chapman & Hall CRC, 2001.

[15] Iório Jr, R. ; Iório, V. M. *Equações diferenciais parciais: uma introdução.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[16] Kielhöfer, H. *Bifurcation theory an introduction with application.* Springer, 2003

[17] Ma, T. ; Wang, S. *Bifurcation theory and applications.* World Scientific, 2005

[18] Meira, A. M. *Primeiro autovalor do Laplaciano: aspectos analíticos e geométricos.* Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.

[19] Mukherjea, K. *Differential Calculus in Normed Linear Spaces.* Hindustan Book Agency, India, 2007.

[20] Poincaré, H. *Sur L'Équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.* Paris, 1885.

[21] Rabinowit, P. H. *Applications of bifurcation theory.* Academic Press, 1977.

[22] Rabinowitz, P. H. *Méthodes topologiques et problémes aux limites non lineares.* Paris, 1975.

[23] Rabinowitz, P. H. *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems.* Journal of Functional Analysis 7, University of Wisconsin, 1971.

[24] Rodney, J. B. *Autovalores do Laplaciano.* Notas de aula, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.

[25] Salvadori, L. *Bifurcation theory and applications.* Springer-Verlag, 1984.

[26] Villena, D. Y. R. *Teoria de bifurcação e aplicações.* Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2017.