UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

ALGUNS RESULTADOS SOBRE HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM FORMAS ESPACIAIS

Júlio Victor de Souza Flor

BELÉM

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Júlio Victor de Souza Flor

ALGUNS RESULTADOS SOBRE HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM FORMAS ESPACIAIS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e, defendida por Júlio Victor de Souza Flor como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva.

BELÉM

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F632a Flor, Júlio Victor de Souza
Alguns resultados sobre Hipersuperfícies compactas com curvatura média constante em Formas Espaciais / Júlio Victor de Souza Flor. — 2020.
53 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. Hipersuperfícies. 2. Imersões mínimas. 3. Imersões CMC. 4. Formas Espaciais. I. Título.

CDD 516.373

Júlio Victor de Souza Flor

ALGUNS RESULTADOS SOBRE HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM FORMAS ESPACIAIS

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

Belém 07, de Abril de 2020

Resultado: APROVADO

Adam Oliveira da Silva

Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva - Orientador (PPGME/PDM/UFPA)

José Antônio M. Villhena

Prof. Dr. José Antônio Moraes Villhena (PPGME/UFPA) - Membro interno

Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso (PPGCIMES/UFPA) - Membro externo

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho primeiramente à Deus e a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste. Em especial, Reginaldo Pereira Flor pelo zelo, apoio e incentivo paterno durante minha trajetória, Núbia Lima de Souza pelo amor e cuidado materno durante meu desenvolvimento e Luana de Nazaré Lima Fontes por ser minha companheira e estar comigo em todos os momentos me dando força, amor e carinho.

Ao prof. Dr. Adam Oliveira da Silva por me guiar nesse caminho da matemática, pelos conselhos e todo esforço, sem o qual seria bem mais tortuosa minha jornada.

Aos professores José Miguel M. Veloso e José Antônio M. Vilhena pela disposição em avaliar este trabalho, contribuindo com suas sugestões para que o mesmo se torne boa fonte de consulta para a comunidade acadêmica.

À todos os professores que passaram pela minha caminhada nos quais me inspiro a ser um profissional melhor e aos colegas pelo companheirismo e as oportunidades que tivemos para estudar e discutir assuntos que nos enriqueceram de conhecimento.

A busca pelas respostas das perguntas que nós mesmos formulamos é o que move nosso espírito e por esse motivo e tantos outros que não posso contar, meus mais profundos agradecimentos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, vamos analisar alguns teoremas sobre hipersuperfícies com curvatura média constante nas formas espaciais $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ e $\mathbb{H}^{n+1}$.

No caso em que $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}(1)$ e a hipersuperfície M^n possui curvatura média nula (mínima), resultados devido à Simons [20], Chern, do Carmo, Kobayashi [11] e Lawson [16] mostraram que uma condição sobre a norma do operador de forma garante que M^n é totalmente geodésica ou um toro de Clifford.

O próximo passo para estender essa noção é analisar hipersuperficies com curvatura média constante e perceber que temos um 2-tensor de Codazzi $\mathring{h}$ definido por meio da segunda forma fundamental $h(X,Y) = \langle AX, Y\rangle$, onde A é o operador de forma, X, Y são campos tangentes a M, e h a segunda forma fundamental. Neste caso, $\mathring{h}$ obedece a equação de Codazzi,

$$\nabla_X \mathring{h}(Y,Z) = \nabla_Y \mathring{h}(X,Z).$$

Em seguida, veremos que uma condição sobre a norma de $\mathring{h}$ classifica as hipersuperfícies M^n com curvatura média constante imersas em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Tal resultado se deve a H. Alencar e M. do Carmo (ver [1]). Posteriormente, vamos tratar de um caso mais geral que é quando M^n está imersa numa forma espacial com curvatura constante c denotada por $\mathbb{F}^{n+1}(c)$ e satisfaz uma desigualdade integral ótima sobre $\mathring{h}$, obtido por Catino [8].

Palavras-Chave: Hipersuperfícies, Curvatura média constante, Forma espacial.

Abstract

In this dissertation, we will analyze some theorems about hypersurfaces with constant mean curvature in the space forms $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ and $\mathbb{H}^{n+1}$.

In the case $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1}(1)$ and the hypersurface M^n has zero (minimum) mean curvature, results due to Simons [20], Chern, do Carmo, Kobayashi [11] and Lawson [16] showed that a condition on the form operator norm ensures that M^n is totally geodesic or a Clifford Torus.

The next step to extend this notion is to analyze hypersurfaces with constant mean curvature and realize that we have a Codazzi 2-tensor $\mathring{h}$ defined by the second fundamental form $h(X,Y) = \langle A.X, Y\rangle$ where A is the form operator, X, Y are vector fields on M and h is the second fundamental form. In this case, $\mathring{h}$ satisfies the Codazzi equation,

$$\nabla_X \mathring{h}(Y,Z) = \nabla_Y \mathring{h}(X,Z)$$

Next, we will to see that a condition on the norm of h classifies the hypersurfaces M^n with constant mean curvature immersed in $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. This result is due to H. Alencar and M. do Carmo (see [1]). Later, we will deal with a more general case, which is when M^n is immersed in a space form with constant curvature c denoted by $\mathbb{F}^{n+1}(c)$ and satisfies a optimal integral inequality on $\mathring{h}$, obtained by Catino [8].

Key-words: Hypersurfaces, Constant mean curvature, Space Form.

Sumário

Introdução

No estudo da caracterização de hipersuperfícies com curvatura média constante imersas em formas espaciais de curvatura constante c, podemos observar muitos avanços ao longo do tempo. Primeiramente, citamos um interessante resultado obtido por Delauney [13] em 1841, o qual caracteriza toda superfície de revolução com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$.

Teorema (Charles Delauney). *A curva plana descrita por um dos focos de uma cônica quando esta rola sobre uma reta, sem deslizar, gera uma superfície de revolução de curvatura média constante. Além disso, toda superfície de revolução com curvatura média constante é obtida desta maneira.*

Um famoso questionamento levantado por H. Hopf foi: *as esferas redondas são as únicas superfícies compactas de curvatura média constante em* $\mathbb{R}^3$? Somente em 1985, Went [22] obteve um contra-exemplo para o questionamento levantado por H. Hopf, fornecendo exemplos de superfícies compactas de curvatura média constante imersas em $\mathbb{R}^3$ homeomorfas à toros.

Seguindo nesta direção, S.S. Chern [12] obetve um famoso teorema, o qual, de maneira mais geral, caracteriza hipersuperfícies CMC (curvatura média constante) de uma forma espacial $\mathbb{F}^3(c)$ com curvatura constante c.

Teorema (Hopf-Chern [12]). *Seja M^2 uma superfície compacta com curvatura média constante em uma forma espacial $\mathbb{F}^3(c)$ de curvatura constante c. Então, ou M^2 é totalmente umbílica ou, $\mathcal{X}(M^2) \leq 0$. Em particular, toda esfera bidimensional com curvatura média constante imersa em uma forma espacial $\mathbb{F}^3(c)$ é totalmente umbílica.*

No caso particular de hipersuperfícies mínimas, em 1968, J. Simons [20], caracterizou as hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com a condição $|A|^2 \leq n$, onde A é o operador de forma. Observando que, nessas condições, $|A|^2$ só pode obter os valores 0 ou n. Seguindo a mesma linha, Lawson [16], obteve de maneira independente a S.S. Chern, Do Carmo e Kobayashi [11] uma caracterização de tais hipersuperfícies M^n para o caso $|A|^2 = n$. Tal condição é equivalente a M^n ser (localmente) um Toro de Clifford em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$.

Já no ano de 1994, com o intuito de mostrar uma generalização dos resultados de Simons, Lawson e Chern et. al. para hipersuperfícies CMC de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, H. Alencar e Do Carmo [1], introduziram o polinômio

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx - n(H^2+1),$$

e mostraram que se $|\mathring{h}|^2 \leq B_H$, onde B_H é o quadrado da raiz positiva de $P_H(x)$ e $\mathring{h} = Hg - h$ com h sendo a segunda forma fundamental da imersão, então ou M^n é totalmente umbílica ou, acontece um dos casos:

a) $H = 0$ e M é um toro de clifford em $\mathbb{S}^{n+1}$.

b) $H \neq 0$, $n \geq 3$ e M é um $H(r)$- toro com $r^2 < \dfrac{n-1}{n}$.

c) $H \neq 0$, $n = 2$ e M é um $H(r)$- toro com $r^2 \neq \dfrac{n-1}{n}$.

De acordo com os resultados obtidos por Simons [20], Chern, Do Carmo e Kobayashi [11], Lawson [16] e Alencar e Do Carmo [1], poderíamos levantar a seguinte questão: Considerando uma hipersuperfície CMC em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ de modo que $|\mathring{h}|$ é constante, então o conjunto de valores que $|\mathring{h}|$ pode assumir é discreto? Tal indagação é comumente chamada de Conjectura de Chern. Das contribuições para a resolução deste, podemos citar o trabalho de Peng e Terng [19] o qual para o caso $n = 3$ e $H = 0$ mostrou que se $3 < |\mathring{h}| \leq 6$ e $|\mathring{h}| = cte$, então $|\mathring{h}| = 6$.. Posteriormente podemos citar o trabalho de Almeida e Brito [2] que estenderam este resultado para $H = cte$.

Mais recentemente, em 2016, o italiano G. Catino [8] estendeu os resultados de H. Alencar e Do Carmo para hipersuperfícies CMC de uma forma espacial $\mathbb{F}^{n+1}(c)$ de curvatura constante c, satisfazendo uma certa desigualdade integral. Além disso, em dimensão $n = 2$, tal resultado recupera o Teorema de Hopf-Chern citado acima.

Para seguirmos adiante, apresentamos alguns preliminares necessários para estudar os resultados mais gerais propostos nessa dissertação.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Curvatura

Neste capítulo, vamos tratar de definições e alguns resultados que nos ajudarão a compreender os posteriores no que diz respeito a curvatura de uma variedade riemanniana (M^n, g) com conexão de Levi-Civita ∇. Além disso, denotemos por $\mathcal{C}^\infty(M)$ e $\mathcal{X}(M)$ o espaços das funções e Campos diferenciáveis sobre M, respectivamente. Para maiores detalhes o leitor pode consultar [4], [6] e [21].

Definição 1.1. *Dada uma variedade riemanniana (M^n, g), o tensor de curvatura é a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo X, Y e $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Em $\mathbb{R}^n$, lembrando que dados campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ a conexão compatível com a métrica usual de $\mathbb{R}^n$ é tal que $(\nabla_X Y) = DY(X)$, temos $\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z = (DZ)(Y \circ X) - (DZ)(X \circ Y) = (DZ)(Y \circ X - X \circ Y) = (DZ)([Y, X])$. Portanto $R(X,Y)Z = 0$ em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.1. *O tensor endorfismo curvatura, ou simplesmente o tensor curvatura, possui as seguintes propriedades:*

a) $R(X_1 + fX_2, Y)Z = R(X_1, Y)Z + fR(X_2, Y)Z$;

b) $R(X, Y_1 + fY_2)Z = R(X, Y_1)Z + fR(X, Y_2)Z$;

c) $R(X, Y)(Z_1 + fZ_2) = R(X, Y)Z_1 + fR(X, Y)Z_2$.

Demonstração. Segue da definição de R e das propriedades de uma conexão riemanniana. Para mais detalhes veja [6]. □

Definição 1.2. *(Convenção de Einstein) Na linguagem tensorial, índices que se repetem estão se somando. Por exemplo, em vez de escrevermos* $X = \sum_i X^i \partial_i$ *escrevemos simplesmente* $X^i \partial_i$

Em um sistema de coordenadas locais, o tensor de curvatura se escreve,

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l.$$

Observe que dados $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \partial_j$ e $Z = Z^k \partial_k$ em $\mathcal{X}(M)$ temos

$$R(X, Y)Z = R^l_{ijk} X^i Y^j Z^k \partial_l,$$

ou seja, R depende apenas dos valores dos campos X, Y, Z em $p \in M$ e dos valores das funções R^l_{ijk} em p.

Proposição 1.2. *Identidade de Bianchi*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Demonstração. Segue da definição de R e da simetria da conexão de Levi-Civita que

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z \\
&+ \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]}X \\
&+ \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) + \nabla_{[Y,Z]}X \\
&+ \nabla_Y(\nabla_X Z - \nabla_Z X) + \nabla_{[Z,X]}Y \\
&+ \nabla_Z(\nabla_Y X - \nabla_X Y) + \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X[Z,Y] - \nabla_{[Z,Y]}X + \nabla_Y[X,Z] - \nabla_{[X,Z]}Y \\
&+ \nabla_Z[Y,X] - \nabla_{[Y,X]}Z \\
&= [X,[Z,Y]] + [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] = 0,
\end{aligned}$$

pela identidade de Jacobi para o colchete de Lie. □

A partir deste tensor, podemos definir um 4-tensor R_m dado por

$$R_m(X,Y,Z,T) = \langle R(X,Y)Z, T\rangle,$$

onde X, Y, Z, T são campos tangentes a M. Assim, em coordenadas,

$$R_{ijkl} = \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\rangle.$$

Naturalmente,

$$R_{ijkl} = \langle R^s_{ijk}\partial_s, \partial_l\rangle = R^s_{ijk} g_{sl}.$$

O 4-tensor Rm satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 1.3. *Em coordenadas locais, temos:*

a) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$. **(Identidade de Bianchi)**

b) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$.

c) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.

d) $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Demonstração. Ver [6]. □

Agora, vejamos alguns resultados importantes sobre curvatura seccional.

Definição 1.3. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana e $p \in M$. Considere o subspaço σ gerado por dois vetores linearmente independentes x, y de T_pM. Definimos a curvatura seccional $K(x, y)$ em p sobre o plano σ por*

$$K(x, y) = \frac{R_m(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}.$$

Tal resultado não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$. Para uma verificação disto veja [6]. Então $K(x, y) = K(\sigma)$ é chamado curvatura seccional de σ em p. Um fato interessante é que se conhecemos $K(\sigma)$ para todo $\sigma \subset T_pM$ então conheceremos R_m para todo $p \in M$. Isto se traduz no seguinte Lema

Lema 1.1. *Suponha que exista $R' : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo as mesmas propriedades do tensor R. Se*

$$K(\sigma) = \frac{R_m(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} = \frac{R'_m(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} = K'(\sigma),$$

para todo $\sigma \subset T_pM$, então $R = R'$.

Demonstração. Basta usar as simetrias do tensor curvatura para mostrar que $R_m(x, y, z, t) = R'_m(x, y, z, t)$ para todos $x, y, z, t \in T_pM$. Para mais detalhes ver [6]. □

Um Lema extremamente útil para este trabalho é o seguinte.

Lema 1.2. *Sejam M^n uma variedade riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle R'(X, Y)W, Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle.$$

para todos $X, Y, Z, W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante k_0 se e somente se, $R = k_0R'$, onde R é a curvatura de M.

Demonstração. Primeiramente, observe que a volta é imediata pois se $R = k_0R'$, então, para quaisquer $X, Y \in T_pM$, temos

$$R(X,Y,X,Y) = k_0(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2),$$

ou seja,

$$\frac{R(X,Y,X,Y)}{|X \wedge Y|^2} = k_0.$$

Reciprocamente, suponha que M tem curvatura seccional constante k_0, ou seja,

$$\frac{R(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = k_0,$$

isto é,

$$R(X,Y,X,Y) = k_0(|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2) = k_0R'(X,Y,X,Y),$$

para todo σ gerado por X, Y. Pelo Lema 1.1, temos que $R = k_0R'$ como queríamos. □

Corolário 1.1. *Seja M uma variedade riemanniana e $p \in M$ um ponto de M. Tomemos uma base ortonormal $\{e_i\}$, $i = 1, .., n$, de T_pM. Então, M tem curvatura seccional constante k_0 em p, se só se,*

$$R_{ijkl} = k_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

onde $\delta_{ij} = g_{ij}$ considerando a base ortonormal.

1.2 Curvatura de Ricci e Curvatura escalar

A seguir, iremos introduzir outras noções de curvatura sobre uma variedade riemanniana (M^n, g).

Definição 1.4. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana. O* **tensor de Ricci** *é a aplicação $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ dada por*

$$Ric(X,Y) = tr(Z \mapsto R(X,Z)Y).$$

Em coordenadas locais, temos

$$R_{ik} = Ric(\partial_i, \partial_k) = R^j_{ijk} = \sum_{j,l} \delta^j_l R^l_{ijk} = \sum_{j,l,p} g^{jp} g_{pl} R^l_{ijk} = \sum_{j,p} g^{jp} R_{ijkp},$$

isto é, utilizando a convenção de Einstein, temos

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}.$$

Definição 1.5. *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana. Definimos a curvatura escalar R como*

$$R = g^{ij} R_{ij},$$

onde R_{ij} são as componentes do tensor de Ricci. No que segue daqui em diante uma variedade riemanniana será simplesmente representada pelo par (M^n, g).

1.3 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Definição 1.6. *Considere uma variedade riemanniana (M^n, g) e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O* **Gradiente** *de f é o campo ∇f em M dado por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in TM$.

Segue-se facilmente desta definição o seguinte:

1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

2) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$

Tomando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ temos

$$\langle \nabla f, e_i \rangle = e_i(f)\langle e_i, e_i \rangle = \langle e_i(f)e_i, e_i \rangle.$$

Daí, podemos concluir que $\nabla f = e_i(f)e_i$.

Proposição 1.4. *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, consideremos uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então,*

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$

Demonstração. Ver [4]. □

Corolário 1.2. *Se $f : M \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funcões diferenciáveis, então para todo $p \in M$*

$$\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f.$$

Demonstração. Da proposição anterior, considerando $v \in T_pM$ e uma curva γ satisfazendo as mesmas condições, teremos

$$\langle \nabla(\phi \circ f), v \rangle = \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = \phi'(f(\gamma(0)))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = \phi'(f)\langle \nabla f, v \rangle,$$

no ponto p. □

Definição 1.7. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Um ponto $p \in M$ se chama ponto crítico de f se $\nabla f(p) = 0$. Em particular segue que todo ponto de máximo ou mínimo local de f é ponto crítico.*

Proposição 1.5. *Seja M^n uma variedade conexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\nabla f = 0$ em M então f é constante em M.*

Demonstração. Ver [4]. □

Definição 1.8. *Seja X um campo tangente diferenciável sobre M. O* **Divergente** *de X é a função diferenciável $divX : M^n \to \mathbb{R}$, dada para $p \in M$ por*

$$divX(p) = tr(v \mapsto (\nabla_v X)(p)),$$

onde $v \in T_pM$.

Tomando um referêncial ortonormal $\{e_i\}$ e $X = \sum_i a^i e_i \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$div(X) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_i e_i \langle X, e_i \rangle - \sum_i \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle = \sum_i e_i(a_i) - \sum_i \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle.$$

Utilizando a convenção de Einstein, teremos

$$div(X) = \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle = e_i(a_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle.$$

O divergente de um campo sobre M^n satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 1.6. *Dados X, Y campos diferenciáveis em M e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, temos*

a) $div(X + Y) = divX + divY$

b) $div(fX) = fdivX + \langle \nabla f, X \rangle$

Demonstração. O item $a)$ é imediato. Para provar $b)$, pela definição temos

$$\begin{aligned} div(fX) = \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle &= \langle f \nabla_{e_i} X + e_i(f) X, e_i \rangle = f \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \langle e_i(f) e_i, X \rangle \\ &= fdivX + \langle \nabla f, X \rangle. \end{aligned}$$

□

Definição 1.9. *Seja (M^n, g) e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O* **Laplaciano de f** *é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f(p) = div(\nabla f)(p).$$

Segue da definição de divergente para um referencial ortonormal e de $\nabla f = e_i(f)e_i$ que,

$$\Delta f = e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle = e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f.$$

Quando tomamos um referencial geodésico $\{e_i\}$ em p, temos que $\nabla_{e_i} e_i(p) = 0$ e portanto, para tal referencial

$$\Delta f(p) = e_i(e_i(f))(p).$$

Proposição 1.7. *Dadas funções $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ temos*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Demonstração. Basta utilizar as propriedades do Divergente. Para mais detalhes veja [4]. □

Em particular

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

1.4 Imersões isométricas

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão, onde M é uma variedade diferenciável e $\overline{M}$ uma variedade riemanniana. Então podemos definir uma métrica em M que torna f uma isometria. Tome $p \in M$. Dados $u, v \in T_pM$ definimos

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p u, df_p v \rangle_{f(p)}.$$

Como f é uma imersão, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de tal modo que f restrita a U é um mergulho. Assim, podemos "identificar "U com $f(U)$ e cada $v \in T_pM$, $p \in U$, com $df_p v \in T_{f(p)}\overline{M}$. Para cada $p \in M$ temos que $df_p(T_pM) \cong T_pM$ é um subespaço vetorial de $T_{f(p)}\overline{M}$. Da álgebra linear, temos

$$T_{f(p)}\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp.$$

Daí, para cada $v \in T_p\overline{M}$ podemos o decompor de maneira única, como

$$v = v^\top + v^\perp,$$

onde $v^\top \in T_pM$ é chamada a componente tangencial e $v^\perp \in (T_pM)^\perp$ a componente normal.

Denotando $\overline{\nabla}$ a conexão de $\overline{M}$ prova-se que dados X, Y campos tangentes a M e $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões locais a $\overline{M}$, a conexão definida por $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top$ é uma conexão compatível com a métrica de M. Segue da unicidade da conexão de Levi-Civita que $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top$.

Definimos a segunda forma fundamental vetorial h, dada por

$$h(X,Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, \tag{1.1}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. É fácil mostrar que h é bilinear e simétrica (ver [6]).

Para cada $\eta \in (T_pM)^\perp$ podemos definir a segunda forma fundamental de f em p na direção do vetor normal η como a aplicação $h_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_\eta(X,Y) = \langle h(X,Y), \eta \rangle.$$

De acordo com a Equação (1.1), é fácil mostrar que h_η é uma forma bilinear e simétrica.

Podemos associar a segunda forma fundamental a uma aplicação linear $A_\eta : T_pM \to T_pM$, tal que para todos $X, Y \in T_pM$, temos

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = h_\eta(X,Y).$$

Como h_η é simétrica, segue que $\langle A_\eta X, Y \rangle = h_\eta(X,Y) = h_\eta(Y,X) = \langle A_\eta Y, X \rangle$, ou seja, A_η é auto-adjunta. Da álgebra linear, sabemos que existe uma base ortonomal $\{e_i\}$ de T_pM que diagonaliza A_η em p, a saber, $A_\eta e_i = k_i e_i$ para todo $i =, .., n$. Chamamos os k_i's, as **curvaturas principais** de M em p.

Proposição 1.8. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$, $\eta \in (T_pM)^\perp$ e extensões locais X e N de x e η*

respectivamente. Então, em p

$$A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_X N\right)^\top.$$

Demonstração. Tomando $y \in T_pM$ e Y uma extensão local a M observe que $\langle N, Y\rangle = 0$. Logo

$$\langle A_\eta X, Y\rangle = \langle h(X,Y), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle.$$

Mas, $0 = X\langle N, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, Y\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X, Y\rangle$ e daí,

$$\langle A_\eta X, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle = \langle -\overline{\nabla}_X N, Y\rangle = \langle -(\overline{\nabla}_X N)^\top, Y\rangle.$$

□

Definição 1.10. *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica e considere um referencial ortonormal adaptado $\{E_i\}_{i=1,..k}$ a um aberto $U \subseteq M$ e $A_i = A_{E_i}$. Definimos o vetor curvatura média H de M por,*

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{n+k}(tr(A_i))E_i = \Big(\frac{1}{n}tr(A_{E_{n+1}}), ..., \frac{1}{n}tr(A_{E_{n+k}})\Big).$$

Observação 1.1. *Quando a codimensão é igual a 1, temos $tr(A) = nH$.*

Quando o vetor $H = 0$, dizemos que f é uma imersão mínima. Um caso interessante surge quando estudamos hipersuperfícies, a qual passamos a definir.

Definição 1.11. *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Chamamos M^n uma hipersuperfície. Quando $H = 0$, dizemos que M^n é uma hipersuperfície mínima.*

No caso de hipersuperfícies, como $\dim(T_pM)^\perp = 1$, h_η será representada por h, já que não há perigo de confusão. Pretendemos agora, relacionar as curvaturas seccionais de M^n e sua "variedade ambiente" $\overline{M}^{n+k}$.

Teorema 1.1. *Sejam M^n e $\overline{M}^{n+k}$ variedades riemannianas com conexões ∇, $\overline{\nabla}$ e curvaturas seccionais K e $\overline{K}$, respectivamente. Então, dados x, y vetores ortonormais em T_pM, temos*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle h(x,x), h(y,y)\rangle - |h(x,y)|^2.$$

Demonstração. Denotando ∇, K e X conexão, curvatura seccional e campo em M e apenas colocando uma barra superior para indicar que diz respeito a $\overline{M}$, tomando X um campo em M tal que $X_p = x$ e Y de maneira análoga para y com $Y_p = y$, temos

$$\begin{aligned}
K(x,y) - \overline{K}(x,y) &= R(X,Y,X,Y) - \overline{R}(\overline{X},\overline{Y},\overline{X},\overline{Y}) \\
&= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_{[X,Y]} X, Y \rangle \\
&- \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X} - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X}, \overline{Y} \rangle \\
&= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X} + \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}, Y \rangle \\
&+ \langle \nabla_{[X,Y]} X - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X}, Y \rangle,
\end{aligned}$$

pois em M, $Y = \overline{Y}$. Observe que a última parcela se anula pois é igual a

$$-\langle h([X,Y],Y),Y \rangle,$$

ou seja, é o produto interno de um vetor normal a M com um vetor tangente a M. Tomando uma referencial ortonormal $\{E_j\}$, $j = n+1,...,n+k$, para $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ temos que

$$h(X,Y) = \sum_j \beta_j E_j.$$

Note que $h_{E_r}(X,Y) = \langle h(X,Y), E_r \rangle = \beta_r$. Portanto, podemos escrever

$$h(X,Y) = \sum_j h_j(X,Y) E_j,$$

onde $h_j = h_{E_j}$. Assim, para cada $p \in M$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X} &= \overline{\nabla}_{\overline{Y}} (h(X,X) + \nabla_X X) = \overline{\nabla}_{\overline{Y}} (\sum_j h_j(X,X) E_j) + \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \nabla_X X \\
&= \sum_j \big(h_j(X,X) \overline{\nabla}_{\overline{Y}} E_j + \overline{Y} h_j(X,X) E_j \big) + \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \nabla_X X.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.8, temos que $\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} E_j, Y \rangle = \langle -A_{E_i} Y, Y \rangle = -h_i(Y,,Y)$. Além disso,

$\overline{Y}(h_j(X,X))E_j$ é um vetor normal e portanto seu produto interno com Y é nulo. Concluímos que

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{X}, Y\rangle = -\sum_j h_j(X,X)h_j(Y,Y) + \langle \nabla_Y\nabla_X X, Y\rangle.$$

Analogamente,

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}, Y\rangle = -\sum_j h_j(X,Y)h_j(X,Y) + \langle \nabla_X\nabla_Y X, Y\rangle.$$

Finalmente,

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \sum_j h_j(X,X)h_j(Y,Y) - \sum_j h_j(X,Y)h_j(X,Y)$$

$$= \langle h(x,x), h(y,y)\rangle - |h(x,y)|^2.$$

□

Para hipersuperfícies, tomando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ em $p \in M^n$ que diagonaliza h, teremos

$$K(e_i,e_j) - \overline{K}(e_i,e_j) = k_i k_j.$$

Definição 1.12. *Uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é geodésica em $p \in M$, se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental h_η é identicamente nula. Dizemos também que f é totalmente geodésica, se é geodésica para todo p em M.*

Veremos mais adiante que um exemplo importante de imersão totalmente geodésica é considerar a aplicação $f : S^n(1) \to S^{n+1}(1)$ que se apresenta como primeiro exemplo de imersão mínima em $S^{n+1}(1)$.

Definição 1.13. *Seja $(\overline{M}^{n+1}, g)$ uma variedade riemanniana e $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Dizemos que a imersão f é totalmente umbílica se para todo $p \in M^n$, a segunda forma fundamental h satisfaz*

$$h(X,Y) = \lambda(p)\langle X, Y\rangle,$$

para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

1.5 Equações fundamentais de uma imersão isométrica

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, temos o seguinte:

$$\overline{\nabla}_X \eta = (\overline{\nabla}_X \eta)^\top + (\overline{\nabla}_X \eta)^\perp = -A_\eta X + (\overline{\nabla}_X \eta)^\perp.$$

Denotando $(\overline{\nabla}_X \eta)^\perp = \nabla^\perp_X \eta$ temos uma conexão da imersão que chamamos de **conexão normal** $\nabla^\perp$. Verifica-se facilmente que $\nabla^\perp$ possui as propriedades usuais de uma conexão. Como a conexão ambiente se divide na componente tangente (que é a conexão de M) e a componente normal, a conexão normal é um campo (de $\overline{M}$) normal a M, ou seja, uma seção do fibrado normal sobre M. Assim, de maneira natural, surge uma noção de curvatura normal, que nada mais é que a fórmula de curvatura para a conexão normal.

Definição 1.14. *Dados* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. *Definimos a curvatura normal* $R^\perp$ *como*

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \eta - \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \eta + \nabla^\perp_{[X,Y]} \eta. \tag{1.2}$$

Vamos agora utilizar tal conceito para ter uma relação entre a curvatura de M e a curvatura de sua variedade ambiente $\overline{M}$ e relacionar a curvatura normal com a curvatura da variedade ambiente apenas conhecendo a segunda forma fundamental.

Proposição 1.9. *Seja* $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ *uma imersão e* $\nabla, \overline{\nabla}$ *as conexões de* M *e* $\overline{M}$ *respectivamente. Então,*

a) (Equação de Gauss)

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, T\rangle = \langle R(X, Y)Z, T\rangle - \langle h(Y, T), h(X, Z)\rangle + \langle h(X, T), h(Y, Z)\rangle.$$

b) (Equação de Ricci)

$$\langle \overline{R}(X, Y)\eta, \zeta\rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta\rangle = \langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y\rangle.$$

Demonstração. a) Primeiramente, por definição

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$

e

$$\overline{\nabla}_X \eta = (\overline{\nabla}_X \eta)^\top + \nabla^\perp_X \eta.$$

Usando tais propriedades temos,

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&= \overline{\nabla}_Y (\nabla_X Z + h(X,Z)) - \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z + h(Y,Z)) + \nabla_{[X,Y]} Z + h([X,Y],Z) \\
&= \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z + \overline{\nabla}_Y h(X,Z) - \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z - \overline{\nabla}_X h(Y,Z) + \nabla_{[X,Y]} Z + h([X,Y],Z) \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z + h(Y, \nabla_X Z) - A_{h(X,Z)} Y + \nabla^\perp_Y h(X,Z) - \nabla_X \nabla_Y Z + h(X, \nabla_Y Z) \\
&+ \ A_{h(Y,Z)} X - \nabla^\perp_X h(X,Z) + \nabla_{[X,Y]} Z + h([X,Y],Z).
\end{aligned}$$

Agrupando convenientemente e observando que fazendo produto interno com T os termos normais se anulam, obtemos o desejado.

Para o item b), a demonstração da equação de Ricci segue as mesmas ideias da demonstração da equação de Gauss. Para mais detalhes veja [6]. □

Podemos escrever a segunda forma fundamental como um tensor $h : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \to C^\infty(M)$ dado por

$$h(X,Y,\eta) = \langle h(X,Y), \eta \rangle.$$

A diferencial covariante de um k-tensor $T : \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é o $(k+1)$-tensor (∇T) dado por

$$\nabla_{X_{k+1}} T(X_1,..,X_k) = \nabla T(X_1,...,X_k,X_{k+1}) = X_{k+1}(T(X_1,...,X_k))$$

$$-\sum_i T(X_1,..,\nabla_{X_{k+1}} X_i,...,X_k).$$

Com estas ideias postas, podemos enunciar o seguinte:

Proposição 1.10. *(Equação de Codazzi): Seja* $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ *uma imersão. Para* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ *temos*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, \eta\rangle = \overline{\nabla}_Y h(X,Z,\eta) - \overline{\nabla}_X h(Y.Z,\eta).$$

Demonstração. Temos pelas definições anteriores que

$$\overline{\nabla}_X h(Y,Z,\eta) = X\langle h(Y,Z),\eta\rangle - \langle h(\nabla_X Y, Z),\eta\rangle - \langle h(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle - \langle h(Y,Z), \nabla^{\perp}_X \eta\rangle$$

$$\langle \nabla^{\perp}_X h(Y,Z),\eta\rangle - \langle h(\nabla_X Y, Z),\eta\rangle - \langle h(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle.$$

Na demonstração da equação de Gauss, reveja que

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + h(Y,\nabla_X Z) + \nabla^{\perp}_Y h(X,Z) - A_{h(X,Z)}Y - h(X,\nabla_Y Z) - \nabla^{\perp}_X h(Y,Z)$$

$$+A_{h(Y,Z)}X + h([X,Y],Z).$$

Fazendo produto interno com η os termos tangentes se anulam e obtemos

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = \langle h(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle + \langle \nabla^{\perp}_Y h(X,Z),\eta\rangle - \langle h(X,\nabla_Y Z),\eta\rangle - \langle \nabla^{\perp}_X h(Y,Z),\eta\rangle$$

$$+\langle h([X,Y],Z),\eta\rangle.$$

Como $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, obtemos

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = \Big[\langle \nabla^{\perp}_Y h(X,Z),\eta\rangle - \langle h(\nabla_Y X, Z),\eta\rangle - \langle h(X,\nabla_Y Z),\eta\rangle\Big]$$

$$-\Big[\langle \nabla^{\perp}_X h(Y,Z),\eta\rangle - \langle h(\nabla_X Y, Z),\eta\rangle - \langle h(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle\Big] = \overline{\nabla}_Y h(X,Z,\eta) - \overline{\nabla}_X h(Y,Z,\eta).$$

□

No nosso contexto, vamos trabalhar em variedades ambientes com curvatura seccional constante. Assim sendo $k_0 = \overline{R}(X,Y,X,Y)$ segue do Lema (1.2) que

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = k_0(\langle X,Z\rangle\langle Y,\eta\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,\eta\rangle) = 0.$$

A equação de Codazzi para este caso se reduz a

$$\overline{\nabla}_X h(Y,Z,\eta) = \overline{\nabla}_Y h(X,Z,\eta).$$

De maneira equivalente, para a forma algébrica da segunda forma fundamental h, temos

$$\overline{\nabla}_X h(Y,Z) = \overline{\nabla}_Y h(X,Z).$$

1.6 Tensores de Codazzi com traço constante

Seja M^n uma variedade riemanniana. Um 2-tensor $T : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é dito de Codazzi se é simétrico e satisfaz

$$\nabla_X T(Y,Z) = \nabla_Y T(X,Z).$$

Seja T um tensor de Codazzi. Em particular, vamos assumir que o traço de T seja constante. Podemos definir um tensor $\mathring{T} = T - \frac{1}{n}tr(T)g$ com traço nulo, chamado *traceless* de T, o qual é novamente um tensor de Codazzi. Em coordenadas locais, temos

$$\nabla_k \mathring{T}_{ij} = \nabla_k \mathring{T}_{ji} = \nabla_j \mathring{T}_{ki} = \nabla_j \mathring{T}_{ik}. \tag{1.3}$$

Assim, derivando com relação a k a Eq. (1.3) e tomando o traço com relação a k, obtemos

$$\Delta \mathring{T}_{ij} = \nabla_k\nabla_k \mathring{T}_{ij} = \nabla_k\nabla_j \mathring{T}_{ik}. \tag{1.4}$$

Usando a identidade de Ricci para a comutação de derivadas covariantes (ver [21]), segue de (1.4),

$$\Delta \mathring{T}_{ij} = \nabla_k \nabla_j \mathring{T}_{ik} = \nabla_j \nabla_k \mathring{T}_{ik} - R_{ikjl}\mathring{T}_{kl} + R_{jk}\mathring{T}_{ik}.$$

Segue do fato de $tr(\mathring{T}) = 0$ que

$$\Delta \mathring{T}_{ij} = -R_{ikjl}\mathring{T}_{kl} + R_{jk}\mathring{T}_{ik}. \tag{1.5}$$

Agora, pela fórmula de Weitzenbock (ver [3]), temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathring{T}|^2 = |\nabla \mathring{T}|^2 + \Delta \mathring{T}_{ij}.\mathring{T}_{ij}. \tag{1.6}$$

Segue de (1.5) e (1.6)

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathring{T}|^2 = |\nabla \mathring{T}|^2 - R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl} + R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik}. \tag{1.7}$$

Vamos ao seguinte lema técnico que será útil em demonstrações futuras.

Lema 1.3 (Desigualdade de Okumura [18])**.** *Sejam $\mu_i, i = 1, ..., n$ números reais tais que $\sum_i \mu_i = 0$ e $\sum_i \mu_i^2 = \beta^2$, onde β é uma constante não-negativa. Então,*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_i \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3.$$

e a igualdade no lado direito (esquerdo) ocorre se, e somente se, apenas $(n-1)$ dos números $\mu_i' s$ são não-positivos (não-negativos) e iguais.

Demonstração. Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções, onde U é aberto, dadas por $f(\mu) = \sum_i \mu_i^2$ e $g(\mu) = \sum_i \mu_i$. Seja também $\phi : U \to \mathbb{R}$; $\phi(\mu) = \sum_i \mu_i^3$. Queremos encontrar os pontos críticos de ϕ restrita a M onde

$$M = \{\mu \in U; \sum_i \mu_i^2 = \beta^2; \sum_i \mu_i = 0\} = f^{-1}(\beta^2) \cap g^{-1}(0).$$

Note que β^2 e 0 são valores regulares de f e g respectivamente. Assim, para $\mu \in M$

ponto crítico devemos ter

$$grad(\phi(\mu)) = \lambda_1 grad(f(\mu)) + \lambda_2 grad(g(\mu)).$$

Logo, para μ ponto crítico de $\phi\big|_M$, devemos ter

$$\mu_i^2 - \lambda\mu_i - \alpha = 0 \tag{1.8}$$

Somando em i, temos que $\alpha \geq 0$. Se $\alpha = 0$ segue imediatamente que $\beta = 0$. Multiplicando (1.8) por μ_i, concluímos que $\sum_i \mu_i^3 = 0$. Se $\alpha > 0$, então (1.8) tem duas raízes a e $-b$ com $a, b > 0$. Supondo que os p primeiros μ_i sejam a e os $(n-p)$ restantes sejam $-b$, temos

$$\mu_1 = ... = \mu_p = a; \mu_{p+1} = ... = \mu_n = -b.$$

Então,

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \sum_i \mu_i^2 = pa^2 + (n-p)b^2 \\ 0 &= \sum_i \mu_i = pa - (n-p)b \\ \phi &= \sum_i \mu_i^3 = pa^3 - (n-p)b^3. \end{aligned}$$

Daí

$$b = \frac{p}{n-p}a \Rightarrow \beta^2 = pa^2 + (n-p)\frac{p^2}{(n-p)^2}a^2 = pa^2 + \frac{p^2}{n-p}a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{n-p}{np}\beta^2.$$

De maneira análoga,

$$b^2 = \frac{p}{n(n-p)}\beta^2.$$

Também,

$$\phi = pa^2 a - (n-p)b^2 b = \frac{p(n-p)}{np}\beta^2 a - (n-p)\frac{p}{n-p}\beta^2 b = \frac{n-p}{p}\beta^2 a - \frac{p}{n}\beta^2 b.$$

Assim, como β^2, a, b são positivos temos que a medida que p cresce, ϕ descresce. Portanto,

ϕ atinge o máximo para $p = 1$ e o mínimo para $p = n - 1$, donde por um cálculo direto segue o resultado. $\square$

Citaremos agora um teorema que nos auxiliará em resultados futuros. Para mais detalhes veja [5].

Teorema 1.2 (do Carmo e M. Dajczer)**.** *Seja* $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$ *uma hipersuperfície arbitrária. Suponha que as curvaturas principais* $k_1, ..., k_n$ *de* f *satisfazem* $k_1 = k_2 = ... = k_{n-1} = \lambda \neq 0$, $k_n = -\mu = -\mu(\lambda)$ *e* $\lambda - \mu \neq 0$. *Então* $f(M^n)$ *está contida em uma hipersuperficie de rotação.*

Capítulo 2

Hipersuperfícies com curvatura média constante em esferas

Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ uma imersão isométrica onde M^n é uma variedade diferenciável orientável. Nosso objetivo neste capítulo é tratar de uma extensão dos resultados obtidos por Simons [20], Chern, do Carmo e Kobayashi [11] e Lawson [16], o qual trata de imersões mínimas em esferas. Iremos mostrar como podemos generalizá-los para hipersuperfícies com curvatura média constante em esferas, resultado obtido por Alencar e do Carmo em [1]. Existem dois casos conhecidos de variedades mínimas de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, a saber, o grande círculo e o toro de clifford. Vamos mostrar esse fato nos exemplos a seguir.

2.1 Grande Círculo

Seja $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ um vetor unitário e $c \in \mathbb{R}$ com $|c| < 1$. Definimos,

$$\mathbb{S}^n(v, c) = \{x \in S^{n+1}(1); \langle x, v\rangle = c\}.$$

Geometricamente, $\mathbb{S}^n(v, c)$ é a esfera obtida pela interseção de $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ com um plano cujo vetor normal é v e cuja distância à origem de $\mathbb{R}^{n+2}$ é c. Claramente, $\mathbb{S}^n(v, c)$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^{n+1}$. Vamos calcular a segunda forma fundamental para obter alguma informação sobre $\mathbb{S}^n(v,c)$.

Seja $\nu : \mathbb{S}^n(v,c) \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ dada por,

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(v - cx).$$

Temos que $|\nu(x)| = 1$ e ν é normal ao longo de $\mathbb{S}^n(v,c)$. Então, para todo $x \in \mathbb{S}^n(v,c)$, o operador de forma é dado por

$$A_x = -d\nu_x = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} I,$$

onde I é a aplicação identidade e $A_x = A_{\nu(x)}$. Isto mostra que $\mathbb{S}^n(v,c)$ é totalmente umbílica cujas curvaturas principais são dadas por

$$k_1 = ... = k_n = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Além disso temos $H = \dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ e $|A_x|^2 = \dfrac{nc^2}{1-c^2}$. Note que $\mathbb{S}^n(v,c)$ é totalmente geodésica se, e somente se, $c = 0$, isto é, se e somente se, $\mathbb{S}^n(v,c)$ é um grande círculo.

2.2 Toro de Clifford

Denotemos por $M^k = \mathbb{S}^n(r_1) \times \mathbb{S}^m(r_2)$ um produto de esferas como hipersuperfície de $\mathbb{S}^{k+1}(1)$. Vamos mostrar que tal hipersuperfície tem curvatura média constante e, além disso, com um valor específico para r_1 e r_2, M^k, torna-se mínima. Consideremos as imersões $f : \mathbb{S}^n(r_1) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $g : \mathbb{S}^m(r_2) \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $f \times g : \mathbb{S}^n(r_1) \times \mathbb{S}^m(r_2) \to \mathbb{R}^{k+2}$ onde $k = n + m$ e r_1, r_2 são tais que $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Note que, dado $x \in \mathbb{S}^n(r_1)$ e $y \in \mathbb{S}^m(r_2)$, temos

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)) = (x_1.., x_{n+1}, y_1, ..., y_{m+1}),$$

onde $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r_1^2$ e $\sum_{i=1}^{m+1} y_i^2 = r_2^2$.

Logo

$$|(f(x), g(y))|^2 = r_1^2 + r_2^2 = 1,$$

e, portanto, podemos escrever $f \times g : \mathbb{S}^n(r_1) \times \mathbb{S}^m(r_2) \to \mathbb{S}^{k+1}(1)$.

Seja $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{S}^n(r_1) \times \mathbb{S}^m(r_2)$. Então, um campo normal a $M^k = \mathbb{S}^n(r_1) \times \mathbb{S}^m(r_2)$ pode ser dado por

$$N(p_1, p_2) = \left(\frac{-r_2}{r_1} p_1, \frac{r_1}{r_2} p_2 \right).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle p, N(p) \rangle &= \left\langle (p_1, p_2), \left(\frac{-r_2}{r_1} p_1, \frac{r_1}{r_2} p_2 \right) \right\rangle = \left\langle p_1, \frac{-r_2}{r_1} p_1 \right\rangle + \left\langle p_2, \frac{r_1}{r_2}, p_2 \right\rangle \\ &= \frac{-r_2}{r_1} |p_1|^2 + \frac{r_1}{r_2} |p_2|^2 = -r_2 r_1 + r_1 r_2 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $N \in T_p\mathbb{S}^{k+1}$, pois p é normal a $\mathbb{S}^{k+1}$. Desde que $T_p\mathbb{S}^{k+1} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$, mostraremos que $\langle N, v \rangle = 0$ onde $v \in T_pM$ para concluir que $N \in T_pM^{\perp}$. Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p = (p_1, p_2)$ e $\alpha'(0) = v = (v_1, v_2)$, $v_1 \in T_{p_1}\mathbb{S}^n$ e $v_2 \in T_{p_2}\mathbb{S}^m$. Como $\alpha(t) \in M$, existem curvas $\alpha_1 : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^n$ e $\alpha_2 : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^m$ tais que $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. Daí,

$$\langle \alpha_1(t), \alpha_1(t) \rangle = |\alpha_1(t)|^2 = r_1^2 \text{ e } \langle \alpha_2(t), \alpha_2(t) \rangle = |\alpha_2(t)|^2 = r_2^2.$$

Derivando ambas equações anteriores com relação a t, obtemos

$$\langle \alpha_1'(t), \alpha_1(t) \rangle = \langle \alpha_2'(t), \alpha_2(t) \rangle = 0.$$

Em particular $\langle v_1, p_1 \rangle = \langle v_2, p_2 \rangle = 0$. Logo,

$$\langle N, v \rangle = \left\langle \left(\frac{-r_2}{r_1} p_1, \frac{r_1}{r_2} p_2 \right), (v_1, v_2) \right\rangle = \frac{-r_2}{r_1} \langle p_1, v_1 \rangle + \frac{r_1}{r_2} \langle p_2, v_2 \rangle = 0.$$

Logo $N \in T_pM^{\perp}$. Note que o operador de forma A_N da imersão $f \times g$ é tal que

$$A_N X = -\overline{\nabla}_X N,$$

onde $X \in T_pM$ e $\overline{\nabla}$ é a conexão de $\mathbb{S}^{k+1}(1)$ induzida pela conexão euclidiana.

Tomando $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X_p$, temos $(\overline{\nabla}_X N)_p = \dfrac{\partial}{\partial t} N \circ \alpha(t)\big|_{t=0}$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} N \circ \alpha(t)\big|_{t=0} = \left(\frac{-r_2}{r_1}\alpha_1'(0), \frac{r_1}{r_2}\alpha_2'(0)\right).$$

Portanto, $(A_N X)_p = \left(\dfrac{r_2}{r_1}\alpha_1'(0), \dfrac{-r_1}{r_2}\alpha_2'(0)\right)$ onde $X_p = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0))$.

Note que $T_pM = T_{p_1}S^n \times T_{p_2}S^m$ podendo ser tomada uma base do tipo $\{(e_1, 0), ..., (e_n, 0), (0, f_1), ..., (0, f_m)\}$ onde $\{e_1, .., e_n\}$ e $\{f_1, ..., f_m\}$ são bases para $T_{p_1}S^n$ e $T_{p_2}S^m$ respectivamente, de maneira que diagonalize A_N. Observemos que para $v = (x, 0)$ com $x \in T_{p_1}S^n$ temos, $A_N v = \dfrac{r_2}{r_1} v$. Com tal argumento, podemos dizer que a matriz que representa o operador A_N é dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{r_2}{r_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{r_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{r_2}{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-r_1}{r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{-r_1}{r_2} \end{bmatrix}$$

onde $\dfrac{r_2}{r_1}$ se repete n vezes e $\dfrac{-r_1}{r_2}$ se repete m vezes. Para que $f \times g$ seja mínima, devemos ter $n\dfrac{r_2}{r_1} - m\dfrac{r_1}{r_2} = 0$, o que resulta em $r_1 = \sqrt{\dfrac{n}{n+m}}$ e $r_2 = \sqrt{\dfrac{m}{n+m}}$. Com tais raios, $f \times g$ é chamada **Toro de Clifford**.

Definição 2.1. *Um H(r)-toro em* $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ *é o produto* $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ *imerso em* $\mathbb{R}^{n+2}$ *onde consideramos a imersão canônica de* $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ *em* $\mathbb{R}^2$.

Para o teorema da seção a seguir, veremos que uma condição especial sobre a norma do operador de forma, garante que quando uma imersão em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ é mínima, então a variedade M^n é um grande círculo ou um **Toro de Clifford**.

2.3 Classificação de Hipersuperfícies com curvatura média constante em esferas

Vamos enunciar um teorema cujo item i) é devido a Simons (ver [20]) e o item ii) foi obtido de maneira independente por Lawson (ver[16]) e S.S. Chern, Do Carmo e Kobayashi, (ver[11]).

Teorema 2.1. *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta e $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície mínima. Suponha que a segunda forma fundamental h, seja tal que $|h|^2 \leq n$, para todo $p \in M$. Então*

i) *ou $|h|^2 = 0$, e M é totalmente geodésica, ou $|h|^2 = n$;*

ii) *$|h|^2 = n$ se e somente se M^n é um **Toro de Clifford** em $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Vamos agora apresentar alguns resultados que serão úteis na demonstração de um teorema que é uma generalização do Teorema 2.1, no sentido de que pretende classificar hipersuperfícies com curvatura média constante imersas em esferas, com a condição de que a norma de um dado operador é menor do que ou igual a uma constante.

Seja M^n uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ e h a segunda forma fundamental. Desde que o operador de forma A é simétrico, podemos considerar uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1,..,n}$ de T_pM que diagonaliza A, isto é, $A(e_i) = k_i e_i$, $i = 1, ..., n$.

Consideremos o 2-tensor $\mathring{h}$ dado por

$$\mathring{h} = Hg - h,$$

onde H é a curvatura média da imersão. É fácil ver que $tr(\mathring{h}) = 0$ e, além disso,

$$|\mathring{h}|^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j}(k_i - k_j)^2, \qquad i, j = 1, ..., n,$$

onde $k_i = h(e_i, e_i)$. De fato, fazendo $\mu_i = \mathring{h}(e_i, e_i)$, para cada i teremos

$$\mu_i = H - k_i.$$

Assim,

$$|\mathring{h}|^2 = \sum_i \mu_i^2 = \sum_i (H - k_i)^2 = \sum_i (k_i^2 - Hk_i),$$

pois $\sum_i (H^2 - Hk_i) = 0$. Portanto,

$$|\mathring{h}|^2 = \sum_i (k_i^2 - Hk_i) = \frac{1}{2n}\sum_i (2nk_i^2 - 2nHk_i) = \frac{1}{2n}\sum_i nk_i^2 + \frac{1}{2n}\sum_i nk_i^2 - 2(\sum_i k_i)(\sum_j k_j).$$

Note que como i, j são variáveis mudas, $\sum_i nk_i^2 = \sum_{i,j} k_i^2 = \sum_{i,j} k_j^2$. Daí,

$$|\mathring{h}|^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j}(k_i^2 - 2k_ik_j + k_j^2) = \frac{1}{2n}\sum_{i,j}(k_i - k_j)^2, \tag{2.1}$$

como queríamos. Vamos a um resultado devido a Cheng e Yau.

Teorema 2.2 (S. Cheng e S. Yau [10])**.** *Seja (M^n, g) e $\mathring{h} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ um 2-tensor simétrico de Codazzi. Então,*

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathring{h}|^2 = |\nabla\mathring{h}|^2 + \sum_i \mu_i(tr(\mathring{h}))_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2,$$

onde R_{ijij} é a curvatura seccional do plano $[e_i, e_j]$.

A seguir, mostraremos um lema que será utilizado no trabalho.

Lema 2.1. *Seja $\mathring{h} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear e simétrica tal que $tr\mathring{h} = 0$.*

Se $\mu_1, ..., \mu_n$ são autovalores de $\mathring{h}$, então

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(1+\mu_i.\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 = n\sum_i \mu_i^2 - \Big(\sum_i \mu_i^2\Big)^2.$$

Demonstração. Calculando o lado esquerdo da igualdade acima, obtemos,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(1+\mu_i\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 &= \sum_{i,j}\mu_i^2 - 2\sum_{i,j}\mu_i.\mu_j + \sum_{i,j}\mu_j^2 + \sum_{i,j}\mu_i^3\mu_j \\ &- 2\sum_{i,j}\mu_i^2\mu_j^2 + \sum_{i,j}\mu_i\mu_j^3.\end{aligned}$$

Note que os somatórios que tem como fator $\sum_i \mu_i$ se anulam pois $tr(\mathring{h}) = 0$, por exemplo, $\sum_{i,j}\mu_i^3.\mu_j = (\sum_j \mu_j).(\sum_i \mu_i^3) = 0$. Logo,

$$\sum_{i,j}(1+\mu_i\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 = \sum_{i,j}(\mu_i^2+\mu_j^2) - 2\sum_{i,j}\mu_i^2\mu_j^2 = 2n\sum_i \mu_i^2 - 2(\sum_i \mu_i^2)^2.$$

pois i, j são variáveis mudas. □

Vamos usar também um resultado devido a Nomizu e Smyth (ver [17]), que utiliza as mesmas ideias do lema anterior.

Lema 2.2. *Se $tr\mathring{h} = 0$ onde $\mathring{h} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é simétrico com auto-valores $\mu_1, ..., \mu_n$, então*

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 = n\sum_i \mu_i^3.$$

Com isto, podemos enunciar e demonstrar o principal teorema deste capítulo, o qual foi obtido por H. Alencar e M. do Carmo em [1].

Teorema 2.3. *Seja M^n uma variedade compacta, orientável e $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ uma imersão com curvatura média constante H. Considere o polinômio*

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx - n(H^2+1).$$

e seja B_H o quadrado da raiz positiva de $P_H(x) = 0$. Suponha que $|\mathring{h}|^2 \leq B_H$ para todo

$p \in M^n$. *Então:*

i) *ou* $|\mathring{h}|^2 = 0$, *e* M *é totalmente umbílica, ou* $|\mathring{h}|^2 = B_H$.

ii) $|\mathring{h}|^2 = B_H$ *se, e somente se,*

a) $H = 0$ *e* M *é um toro de clifford em* $\mathbb{S}^{n+1}$.

b) $H \neq 0$, $n \geq 3$ *e* M *é um* $H(r)$*- toro com* $r^2 < \dfrac{n-1}{n}$.

c) $H \neq 0$, $n = 2$ *e* M *é um* $H(r)$*- toro com* $r^2 \neq \dfrac{n-1}{n}$.

Demonstração. Em tudo que segue, vamos tomar uma orientação para M^n de modo que $H > 0$. Para o item i), tomando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ que diagonaliza h, pelo Teorema 2.2, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathring{h}|^2 = |\nabla\mathring{h}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2.$$

Primeiramente, vamos calcular o termo $\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2$. Pela fórmula de Gauss para a curvatura seccional, temos para $X, Y \in T_pM$,

$$K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) = \langle h(X,X), h(Y,Y)\rangle - |h(X,Y)|^2.$$

Contudo, em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ temos, $\overline{K}(X,Y) = 1$, para todo $X, Y \in T_p\mathbb{S}^{n+1}(1)$ com X, Y linearmente independentes. Para $\{e_i, e_j\}$, teremos

$$R_{ijij} = K(e_i, e_j) = 1 + \langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j)\rangle + |h(e_i, e_j)|^2.$$

Mas, $\langle h(e_i, e_j), \eta\rangle = \langle Ae_i, e_j\rangle = k_i\langle e_i, e_j\rangle$. Porém, $i \neq j$ pois $[e_i, e_j]$ tem dimensão 2. Portanto, $|h(e_i, e_j)|^2 = 0$. De maneira equivalente

$$\langle h(e_i, e_i), \eta\rangle = k_i.$$

Logo, $h(e_i, e_i) = k_i\eta$. Então,

$$\langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j)\rangle = k_i k_j \langle \eta, \eta\rangle = k_i.k_j.$$

Assim, temos o seguinte:

$$R_{ijij} = 1 + k_i k_j. \tag{2.2}$$

Desde que $k_i = H - \mu_i$, segue da Equação (2.2) que

$$R_{ijij} = 1 + H^2 - H(\mu_i + \mu_j) + \mu_i.\mu_j.$$

De (2.1) temos $\sum_{i,j}(\mu_i - \mu_j)^2 = 2n|\mathring{h}|^2$. Portanto, segue-se dos Lemas (2.1) e (2.2) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}[1 + \mu_i\mu_j - H(\mu_i + \mu_j) + H^2](\mu_i - \mu_j)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(1 + \mu_i\mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 - \frac{H}{2}\sum_{i,j}(\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 \\
&+ \frac{nH^2}{2n}\sum_{i,j}(\mu_i - \mu_j)^2 \\
&= n\sum_i \mu_i^2 - \Big(\sum_i \mu_i^2\Big)^2 - nH\sum_i \mu_i^3 + nH^2|\mathring{h}|^2 \\
&= n|\mathring{h}|^2 - |\mathring{h}|^4 - nH\sum_i \mu_i^3 + nH^2|\mathring{h}|^2.
\end{aligned}$$

Com isso, pelo Teorema 2.2 obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathring{h}|^2 = |\nabla\mathring{h}|^2 - |\mathring{h}|^4 + n|\mathring{h}|^2 + nH^2|\mathring{h}|^2 - nH\sum_i \mu_i^3. \tag{2.3}$$

Vamos agora utilizar o Lema 1.3 (Okumura) para estimar o valor de $\sum_i \mu_i^3$. Segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\mathring{h}|^2 &\geq |\nabla\mathring{h}|^2 - |\mathring{h}|^4 + n(H^2+1)|\mathring{h}|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\mathring{h}|^3 \\
&= |\nabla\mathring{h}|^2 + |\mathring{h}|^2\Big(- |\mathring{h}|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\mathring{h}| + n(H^2+1)\Big)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Lembrando que

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx - n(H^2+1),$$

o termo em parênteses na última equação é $-P_H(|\mathring{h}|)$. Como $|\mathring{h}|^2 \leq B_H$, então $P_H(|\mathring{h}|) \leq 0$ pois $P_H(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para cima e seu termo independente é negativo. Isto implica que possui necessariamente uma raiz positiva e uma negativa. Assim, como $\sqrt{B_H}$ é uma raiz e sendo k a raiz negativa, temos $k < 0 \leq |\mathring{h}| \leq \sqrt{B_H}$, o que implica $-P_H(|\mathring{h}|) \geq 0$. Daí,

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathring{h}|^2 \geq |\nabla\mathring{h}|^2 + |\mathring{h}|^2(-P_H(|\mathring{h}|)). \tag{2.5}$$

Integrando (2.5) e aplicando o teorema da Divergência obtemos

$$0 = \int_M \Delta|\mathring{h}|^2 dM \geq \int_M |\nabla\mathring{h}|^2 dM + \int_M |\mathring{h}|^2(-P_H(|\mathring{h}|)) \geq 0.$$

Portanto,

$$\int_M |\nabla\mathring{h}|^2 dM = 0 \tag{2.6}$$

e

$$\int_M |\mathring{h}|^2(-P_H(|\mathring{h}|))dM = 0. \tag{2.7}$$

Da Eq. (2.6) concluímos que $|\nabla\mathring{h}|^2 = 0$ e, pela desigualdade de Kato (ver,[15]) $|\nabla|\mathring{h}|| \leq |\nabla\mathring{h}|$ para tensores, concluímos que $|\mathring{h}|^2 = c$, onde c é uma constante, a priori, desconhecida. Agora, pela integral (2.7) temos $|\mathring{h}|^2(-P_H(|\mathring{h}|)) = 0$. Portanto, devemos ter, ou $|\mathring{h}| = 0$, ou $|\mathring{h}|^2 = B_H$, provando a parte *i*) do teorema.

Para o item ii), consideremos $|\mathring{h}|^2 = B_H$. Se $H = 0$, então $B_H = n$ e pelo teorema 2.1, M^n é um toro de Clifford em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Isto garante o item a).

Agora para o caso de $H \neq 0$ e $n \geq 3$ temos que, se $|\mathring{h}|^2 = B_H$, então $\nabla\mathring{h} = 0$ pela

Equação (2.4). Note de (2.3) que,

$$nH\sum_i \mu_i^3 = |\mathring{h}|^2(-|\mathring{h}|^2 + n(H^2+1)). \tag{2.8}$$

Porém, como $P_H(|\mathring{h}|) = 0$, temos

$$|\mathring{h}|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}.H|\mathring{h}| - n(H^2+1) = 0,$$

isto é,

$$\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\mathring{h}| = -|\mathring{h}|^2 + n(H^2+1).$$

Portanto, substituindo isso na Eq. (2.8), temos

$$nH\sum_i \mu_i^3 = |\mathring{h}|^2\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\mathring{h}|,$$

donde,

$$\sum_i \mu_i^3 = \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{h}|^3.$$

Pela Desigualdade de Okumura (ver Lema 1.3), $\sum_i \mu_i^3$ atinge seu máximo. Assim, os auto-valores do operador $\mathring{h}$ são constantes tais que $\mu_1 = ... = \mu_{n-1}$ e $\mu_n \neq \mu_i$ para todo $i = 1, ..., n-1$. Como tais auto-valores estão relacionados com as curvaturas principais de M^n, conluímos que $k_1 = ... = k_{n-1}$ e $k_n \neq k_i$ para todo $i = 1, ..., n-1$. Estamos nas condições de aplicar o Teorema 1.2 devido à do Carmo e Dajczer para garantir que M^n é localmente isométrica a uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^{n+1}$ e, portanto, um $H(r)$-toro.

Para ter mais informações deste $H(r)$-toro, vamos encontrar uma estimativa para o raio r. Pelo Lema de Okumura, temos

$$\mu_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\mathring{h}|, \qquad \mu_1 = ... = \mu_{n-1} = \frac{-1}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{h}|.$$

Usando de alguns processos algébricos explicitados a seguir, vamos obter uma comparação entre as curvaturas principais k_1 e k_n. Observe que

$$k_n k_1 = (H - \mu_n)(H - \mu_1) = H^2 + \mu_1\mu_n - H(\mu_1 + \mu_n).$$

Como $\mu_1\mu_n = -\frac{|\mathring{h}|^2}{n}$ e $\mu_1 + \mu_n = \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{h}|$ temos

$$nk_1k_n = -|\mathring{h}|^2 - H|\mathring{h}|.\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} + n(H^2+1) - n = -n.$$

Desde que $P_H(|\mathring{h}|) = 0$, concluímos da igualdade anterior que $k_1k_n = -1$. Por outro lado

$$k_n = H - \mu_n = \frac{k_n + (n-1)k_1}{n} - \mu_n,$$

isto é,

$$(n-1)k_n - (n-1)k_1 = -n\mu_n.$$

Desde que $\mu_n > 0$, concluímos que $k_n < k_1$. Como $k_1k_n = -1$, devemos ter $k_n < 0$. Com isto, o $H(r)$-toro é a hipersuperfície $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, e pelo exemplo sobre o toro de Clifford, temos que as curvaturas principais são dadas por

$$k_1 = ... = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}; \qquad k_n = \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Um cálculo simples nos revela que

$$H = \frac{(n-1) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}}.$$

Como $H > 0$ segue que, $r^2 < \frac{n-1}{n}$ e isto completa a prova do caso (b) em $ii)$.

Para o caso $H \neq 0$ e $n = 2$, observe que $M^2 \subset \mathbb{S}^3(1)$ é uma superfície isoparamétrica, o qual é bem conhecido devido à Cartan [7] ser totalmente umbílica ou um $H(r)$-toro. Como $|\mathring{h}|^2 = B_H$ temos que M^2 é um $H(r)$-toro.

Como $Tr(\mathring{h}) = 0$ e $|\mathring{h}|^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$, obtemos $\mu_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathring{h}|$ e $\mu_2 = -\mu_1$. Agora, desde que

$\mu_i = H - k_i$, $i = 1, 2$ e $P_H(|\mathring{h}|) = 0$ depois de alguns cálculos mostra-se que $k_1 k_2 = -1$.

Portanto, segue que, ou $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$, ou $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$ ambos valores constantes. Então teremos, ou

$$k_1 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}; \qquad k_2 = \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}},$$

ou

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}; \qquad k_2 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Com um cálculo simples obtemos

$$H = \pm \frac{1-2r^2}{2r\sqrt{1-r^2}}$$

o qual só é positivo se $r^2 \neq \dfrac{1}{2} = \dfrac{n-1}{n}$ para $n = 2$. $\square$

Capítulo 3

Hipersuperfícies CMC imersas em $\mathbb{F}^{n+1}(c)$

Nesta seção, nosso objetivo é estudar um caso mais geral do resultado anterior devido a H. Alencar e Do Carmo [1]. Aqui consideramos nossa variedade M^n como hipersuperfície de uma forma espacial $\mathbb{F}^{n+1}(c)$ com curvatura constante c. Iremos enunciar alguns lemas que serão úteis na demonstração do teorema principal desta seção. Este primeiro resultado, faz uma comparação entre a norma da diferencial covariante de um tensor $\mathring{T}$ o qual é de Codazzi, com traço nulo, e o gradiente da norma de $\mathring{T}$.

Lema 3.1. *Seja $\mathring{T}$ um tensor de Codazzi com traço nulo numa variedade riemanniana M^n e seja $\Omega_0 = \{p \in M^n; |\mathring{T}|(p) \neq 0\}$. Então, em Ω_0*

$$|\nabla\mathring{T}|^2 \geq \frac{n+2}{n}|\nabla|\mathring{T}||^2. \tag{3.1}$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [15]. □

Segue das Equações (1.7) e (3.1) que

$$\frac{1}{2}\Delta|\mathring{T}|^2 \geq \frac{n+2}{n}|\nabla|\mathring{T}||^2 - R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl} + R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik}. \tag{3.2}$$

em Ω_0. Agora, precisamos que (3.2) valha em todo M^n. Temos a seguir um resultado sobre a medida do conjunto $M^n \setminus \Omega_0$.

Lema 3.2. *Seja $\mathring{T}$ um tensor de Codazzi não-trivial com traço nulo numa variedade* *riemanniana* (M^n, g) *e seja* $\Omega_0 = \{p \in M^n; |\mathring{T}|(p) \neq 0\}$. *Então* $Vol(M^n \setminus \Omega_0) = 0$

Demonstração. ver [9]. □

Temos agora uma proposição que é de grande auxílio na demonstração do teorema principal.

Proposição 3.1 (G. Catino, 2016 [9]). *Seja* $\mathring{T}$ *um tensor de Codazzi, não trivial e com traço nulo definido numa variedade riemanniana compacta* (M^n, g). *Para* $\varepsilon > 0$, *defina* $\Omega_\varepsilon = \{p \in M^n; |\mathring{T}|(p) \geq \varepsilon\}$. *Então*

$$\int_{M^n} (-R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl} + R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik}) f_\varepsilon^{\frac{-(n+2)}{n}} dM \leq 0, \tag{3.3}$$

onde

$$f_\varepsilon = \begin{cases} |\mathring{T}|(p) & se \quad p \in \Omega_\varepsilon \\ \varepsilon & se \quad p \in M^n \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Demonstração. Multiplicando por $f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}}$ em ambos os lados da Eq. (3.2) e integrando sobre M^n, pelo teorema da divergência, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \geq & -\frac{1}{2}\int_{M^n} \Delta|\mathring{T}|^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} dM + \frac{n+2}{n}\int_{M^n} |\nabla|\mathring{T}||^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} dM \\ & + \int_{M^n} (-R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl} + R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik}) f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} dM. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora, note que da Proposição (1.6), temos

$$div(f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} \nabla|\mathring{T}|^2) = f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} div(\nabla|\mathring{T}|^2) + \langle \nabla(f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}}), \nabla|\mathring{T}|^2 \rangle. \tag{3.5}$$

Integrando (3.5) em M^n e usando o teorema da divergência obtemos

$$-\frac{1}{2}\int_{M^n} \Delta|\mathring{T}|^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} dM = -\frac{1}{2}\int_{M^n} f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} div(\nabla|\mathring{T}|^2) dM = \frac{1}{2}\int_{M^n} \langle \nabla|\mathring{T}|^2, \nabla f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} \rangle dM. \tag{3.6}$$

Além disso,

$$\frac{1}{2}\int_{M^n}\langle\nabla|\mathring{T}|^2,\nabla f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}\rangle dM=-\frac{n+2}{n}\int_{M^n}\langle\nabla|\mathring{T}|,\nabla f_\varepsilon\rangle|\mathring{T}|f_\varepsilon{}^{\frac{-2n-2}{n}}dM. \tag{3.7}$$

Substituindo as Equações (3.6) e (3.7) em (3.4), concluímos

$$\begin{aligned} 0 \quad &\geq \quad -\frac{n+2}{n}\int_{M^n}\langle\nabla|\mathring{T}|,\nabla f_\varepsilon\rangle|\mathring{T}|f_\varepsilon{}^{\frac{-2n-2}{n}}dM+\frac{n+2}{n}\int_{M^n}|\nabla|\mathring{T}||^2 f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM \\ &+ \quad \int_{M^n}(-R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl}+R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik})f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observe que, em Ω_ε temos $f_\varepsilon=|\mathring{T}|$. Logo

$$\begin{aligned} &- \quad \frac{n+2}{n}\int_{\Omega_\varepsilon}\langle\nabla|\mathring{T}|,\nabla f_\varepsilon\rangle|\mathring{T}|f_\varepsilon{}^{\frac{-2n-2}{n}}dM+\frac{n+2}{n}\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla|\mathring{T}||^2 f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM \\ &= \quad -\frac{n+2}{n}\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla f_\varepsilon|^2 f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM+\frac{n+2}{n}\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla f_\varepsilon|^2 f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM=0, \end{aligned}$$

e daí, a equação (3.8) garante a validade da Equação (3.3) em Ω_ε.

Agora, sobre $M^n\setminus\Omega_\varepsilon$, temos $\nabla f_\varepsilon=0$. Portanto

$$\begin{aligned} 0 \quad &\geq \quad -\frac{n+2}{n}\int_{M^n\setminus\Omega_\varepsilon}\langle\nabla|\mathring{T}|,\nabla f_\varepsilon\rangle|\mathring{T}|f_\varepsilon{}^{\frac{-2n-2}{n}}dM+\frac{n+2}{n}\int_{M^n\setminus\Omega_\varepsilon}|\nabla|\mathring{T}||^2 f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM \\ &+ \quad \int_{M^n\setminus\Omega_\varepsilon}(-R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl}+R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik})f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM \\ &= \quad \frac{n+2}{n}\int_{M^n\setminus\Omega_\varepsilon}|\nabla|\mathring{T}||^2 f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM+\int_{M^n\setminus\Omega_\varepsilon}(-R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl}+R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik})f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM \\ &\geq \quad \int_{M^n\setminus\Omega_\varepsilon}(-R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl}+R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik})f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM, \end{aligned}$$

pois

$$\frac{n+2}{n}\int_{M^n\setminus\Omega_\varepsilon}|\nabla|\mathring{T}||^2 f_\varepsilon{}^{-\frac{n+2}{n}}dM\geq 0.$$

Portanto, a Equação (3.3) vale em $M^n\setminus\Omega_\varepsilon$, donde vale em toda M^n.

$\square$

O teorema a seguir, classifica, do ponto de vista local, todas as hipersuperfícies com curvatura média constante (CMC), imersas em formas espaciais $\mathbb{F}^{n+1}(c)$ com curvatura constante c. Então, pode ser visto como um resultado mais geral que o Teorema 2.3 devido à H. Alencar e Do Carmo [1], pois a variedade ambiente é qualquer forma espacial, e além disso, se vale a condição $|\mathring{h}|^2 \leq B_H$, reobtemos o Teorema 2.3.

Teorema 3.1. *Seja M^n uma hipersuperfície compacta com curvatura média constante imersa numa forma espacial $\mathbb{F}^{n+1}(c)$ de curvatura constante c. Então,*

$$\int_{M^n} |\mathring{h}|^{\frac{n-2}{n}}\Big(nH^2 - |\mathring{h}|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\mathring{h}| + nc\Big)dM \leq 0,$$

onde $\mathring{h}$ é o traceless da segunda forma fundamental h e H é a curvatura média de M^n. A igualdade ocorre se, e somente se, ou M^n é totalmente umbílica, ou quando $n \geq 3$ e $H \neq 0$, ao redor de todo ponto não-umbílico, está localmente contida em uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{F}^{n+1}(c)$.

Demonstração. Para todo $p \in M$ consideramos um referencial ortonormal adaptado $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ de modo que $\{e_1, ..., e_n\}$ seja uma base ortonormal para T_pM. Pela equação de Gauss, para o caso do espaço ambiente ter curvatura constante c, temos

$$R_{ikjl} = c(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{jk}) + h_{ij}h_{kl} - h_{il}h_{jk}. \tag{3.9}$$

Tomando o traço em (3.9), temos

$$R_{ij} = g^{kl}R_{ikjl} = c(g^{kl}g_{kl}g_{ij} - g^{kl}g_{jk}g_{il}) + g^{kl}h_{kl}h_{ij} - g^{kl}h_{jk}h_{il}.$$

Daí,

$$R_{ij} = c(ng_{ij} - g_{ij}) + nHh_{ij} - (g^{kl}h_{il})h_{jk}. \tag{3.10}$$

Tomando novamente o traço na Equação (3.10) temos

$$R = g^{ij}R_{ij} = c(ng^{ij}g_{ij} - g^{ij}g_{ij}) + g^{ij}h_{ij}nH - (g^{ij}h_{il})(g^{kl}h_{jk}),$$

onde $nH = tr(h) = g^{ij}h_{ij}$. Agora, note que $(g^{ij}h_{il})(g^{kl}h_{jk}) = |h|^2$. Assim,

$$R = n(n-1)c + n^2H^2 - |h|^2. \tag{3.11}$$

Supondo que M^n não é totalmente umbílica, ou seja, $\mathring{h}$ é um 2-tensor de Codazzi não trivial, podemos aplicar a Proposição 3.1 para $\mathring{h}$ e obtermos o seguinte.

$$\int_{M^n} (-R_{ikjl}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl} + R_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik}) f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} \leq 0,$$

onde $f_\varepsilon = |\mathring{h}|(p)$ se $p \in \Omega_\varepsilon = \{p \in M^n; |\mathring{h}|(p) \geq \varepsilon\}$ e $f_\varepsilon = \varepsilon$ se $p \in M^n \setminus \Omega_\varepsilon$.

Pela equação de Gauss em (3.9) e pelo fato de $h = \mathring{h} + Hg$, temos

$$\begin{aligned} R_{ikjl} &= c(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{jk}) + (\mathring{h}_{ij} + Hg_{ij})(\mathring{h}_{kl} + Hg_{kl}) - (\mathring{h}_{il} + Hg_{il})(\mathring{h}_{jk} + Hg_{jk}) \\ &= c(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{jk}) + H^2(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{jk}) + (\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl} - \mathring{h}_{il}\mathring{h}_{jk}) \\ &+ H(\mathring{h}_{ij}g_{kl} + g_{ij}\mathring{h}_{kl} - \mathring{h}_{il}g_{jk} - g_{il}\mathring{h}_{jk}). \end{aligned}$$

Logo,

$$R_{ikjl} = (c+H^2)(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{jk}) + \mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl} - \mathring{h}_{il}\mathring{h}_{jk} + H(\mathring{h}_{ij}g_{kl} + g_{ij}\mathring{h}_{kl} - \mathring{h}_{il}g_{jk} - g_{il}\mathring{h}_{jk}). \tag{3.12}$$

Agora, tomando o traço em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} R_{kj} &= g^{il}R_{kijl} = -g^{il}R_{ikjl} = (c+H^2)(g^{il}g_{il}g_{jk} - g^{il}g_{ij}g_{kl}) + g^{il}\mathring{h}_{il}\mathring{h}_{jk} - g^{il}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl} \\ &+ H(g^{il}\mathring{h}_{il}g_{jk} + g^{il}g_{il}\mathring{h}_{jk} - g^{il}\mathring{h}_{ij}g_{kl} - g^{il}g_{ij}\mathring{h}_{kl}) \\ &= (c+H^2)(ng_{jk} - g_{jk}) - \mathring{h}_{jp}\mathring{h}_{kp} + H(n\mathring{h}_{kj} - 2\mathring{h}_{kj}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_{kj} = (c+H^2)(n-1)g_{jk} - \mathring{h}_{jp}\mathring{h}_{kp} + (n-2)H\mathring{h}_{jk}. \tag{3.13}$$

Em particular, pela Equação (3.12), temos

$$\begin{aligned} R_{ikjl}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl} &= (c+H^2)(g_{ij}\mathring{h}_{ij}g_{kl}\mathring{h}_{kl} - (g_{il}\mathring{h}_{ij})(g_{jk}\mathring{h}_{kl})) + \mathring{h}_{ij}^2\mathring{h}_{kl}^2 - (\mathring{h}_{il}\mathring{h}_{ij})(\mathring{h}_{jk}\mathring{h}_{kl}) \\ &+ H(\mathring{h}_{ij}^2\mathring{h}_{kl}g_{kl} + g_{ij}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl}^2 - \mathring{h}_{il}g_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl} - \mathring{h}_{jk}g_{il}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl}) \\ &= -(c+H^2)|\mathring{h}|^2 + |\mathring{h}|^4 - \mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{jk}\mathring{h}_{kl}\mathring{h}_{li} - 2H(\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{jk}\mathring{h}_{ki}). \end{aligned}$$

Além disso, da Equação (3.13), tem-se

$$R_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik} = (n-1)(c+H^2)(g_{jk}\mathring{h}_{ik})\mathring{h}_{ij} - \mathring{h}_{jp}\mathring{h}_{kp}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik} + (n-2)H\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik}\mathring{h}_{jk}.$$

Trocando p por k e k por l na expressão $\mathring{h}_{jp}\mathring{h}_{kp}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik}$ obtemos $\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl}\mathring{h}_{il}\mathring{h}_{jk}$. Assim,

$$R_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik} = (n-1)(c+H^2)|\mathring{h}|^2 - \mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl}\mathring{h}_{il}\mathring{h}_{jk} + (n-2)H\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik}\mathring{h}_{jk}.$$

E finalmente obtemos

$$-R_{ikjl}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl} + R_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik} = nH^2|\mathring{h}|^2 - |\mathring{h}|^4 + nH\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik}\mathring{h}_{jk} + nc|\mathring{h}|^2. \tag{3.14}$$

Agora, podemos notar que $\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik}\mathring{h}_{jk} = k_i g_{ij} k_i g_{ik} k_j g_{kj} = \sum_i k_i^3$ num referencial ortonormal que diagonaliza $\mathring{h}$ com autovalores k_i. Assim, queremos estimar o valor de $\sum_i k_i^3$. Para tanto, aplicamos o Lema de Okumura (1.3) para obter

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{h}|^3 \leq \mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik}\mathring{h}_{jk} \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{h}|^3. \tag{3.15}$$

Daí,

$$\begin{aligned} -R_{ikjl}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl} + R_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik} &\geq nH^2|\mathring{h}|^2 - |\mathring{h}|^4 - H\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\mathring{h}|^3 + nc|\mathring{h}|^2 \\ &= |\mathring{h}|^2\left[nH^2 - |\mathring{h}|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\mathring{h}| + nc\right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Aplicando a Proposição (3.1) na desigualdade anterior, temos

$$\int_{M^n} |\mathring{h}|^2\left(nH^2-|\mathring{h}|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\mathring{h}|+nc\right)f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} \leq \int_{M^n}(-R_{ikjl}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl}+R_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik})f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} \leq 0.$$

Mas, $|\mathring{h}|^2 = |\mathring{h}|^{\frac{n-2}{n}}|\mathring{h}|^{\frac{n+2}{n}}$. Portanto,

$$\int_{M^n} |\mathring{h}|^{\frac{n-2}{n}}\left(nH^2-|\mathring{h}|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\mathring{h}|+nc\right)|\mathring{h}|^{\frac{n+2}{n}}f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}}dM \leq 0.$$

Desde que $|\mathring{h}|^{\frac{n+2}{n}}f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} \to |\mathring{h}|^{\frac{n+2}{n}}|\mathring{h}|^{-\frac{n+2}{n}} = 1$ q.t.p. em M quando $\varepsilon \to 0$, pelo Lema 3.2 temos

$$\int_{M^n} |\mathring{h}|^{\frac{n-2}{n}}\left(nH^2-|\mathring{h}|^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\mathring{h}|+nc\right)dM \leq 0, \tag{3.17}$$

como queríamos.

Para $n \geq 3$, observe que a igualdade em (3.17) ocorre se, e somente se, em todo ponto, ou $\mathring{h}$ é nula ou, quando $H \neq 0$, em torno de pontos não umbílicos, temos que $\mathring{h}$ possui um autovalor de multiplicidade $n-1$ e outro de multiplicidade 1. De fato, suponha que valha a igualdade em (3.17). Então, para o caso não-umbílico, considere $p \in M$ tal que $|\mathring{h}|(p) > 0$. Logo, da continuidade de P_H, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $-P_H(|\mathring{h}|) > 0$, ou seja, o integrando de (3.17) tem sinal em U. Segue que $-P_H(|\mathring{h}|) = 0$ em U. Com isso, segue de (3.16) que, em U

$$-R_{ikjl}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl}+R_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik} \geq 0. \tag{3.18}$$

Novamente pelo lema (3.2) e da proposição (3.1), temos,

$$\int_{M^n}(-R_{ikjl}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{kl}+R_{jk}\mathring{T}_{ij}\mathring{T}_{ik})f_\varepsilon^{\frac{-(n+2)}{n}}dM = 0. \tag{3.19}$$

De (3.18) e (3.19), em U,

$$-R_{ikjl}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{kl}+R_{jk}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{ik} = 0. \tag{3.20}$$

Portanto, de (3.14) e (3.20) e lembrando que $P_H(|\mathring{h}|) = 0$ em U, obtemos a igualdade do

Lema de Okumura, ou seja, M possui dois auto-valores distintos, um com multiplicidade $(n-1)$ e outro com multiplicidade 1. A recíproca é inteiramente análoga. Portanto, segue-se novamente do Teorema 1.2 que toda hipersuperfície em uma forma espacial com esta propriedade está contida em uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{F}^{n+1}(c)$, caracterizando assim tais Hipersuperfícies, o que prova o teorema. $\square$

Observação 3.1. *Note que, se $H = 0$ e $c \leq 0$, a afirmação no teorema é trivial, pois neste caso, o integrando será $|\mathring{h}|^{\frac{n-2}{n}}(-|\mathring{h} + nc)$ o qual é menor do que ou igual a 0, para todo $p \in M$. Por outro lado, existem Toros de Clifford (ver seção 2.2) em $\mathbb{S}^{n+1}(c)$ com $|\mathring{h}| = nc$ que não estão contidos em uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^{n+1}(c)$. Portanto, a segunda parte do Teorema não é verdade se $H = 0$.*

Podemos ainda observar que no caso $n = 2$, se M^2 não é totalmente umbílica então vale a desigualdade integral

$$\int_{M^2} -|\mathring{h}|^2 + 2H^2 + 2c \leq 0.$$

Observando que $|\mathring{h}|^2 = |h|^2 - 2H^2$ e da Equação (3.11), segue que

$$\int_{M^2} R \leq 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Gauss-Bonnet teremos $\mathcal{X}(M^2) \leq 0$. Com isto, recupera-se o resultado de Hopf-Chern.

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, Hilário; CARMO, Manfredo Perdigão do. **Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres**, Proc. Am. Math. Soc. 120 (1994) 1223-1229

[2] ALMEIDA, Sebastião de; BRITO, Fabiano. **Closed 3-dimensional hypersurfaces with constant mean curvature and constant scalar curvature**, (1990)

[3] BOURGUIGNON, Jean Pierre. **The magic of Weitzenböck formulas**, in: Variational Methods, Paris, 1988, in: Progess in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol.IV, Birkhäuser, (1990), pp.251-271.

[4] CAMINHA, Antônio. **Notas de Geometria Diferencial**, (2010)

[5] CARMO, Manfredo Perdigão do; DAJCZER, Marcos. **Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature**, Trans. Am. Math. Soc. 277 (1983) 685-709.

[6] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. -Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (1988) -2º edição

[7] CARTAN, E. **Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante**, Annali di Mat. 17 (1938), 177-191.

[8] CATINO, Giovanni. **A remark on compact hypersurfaces with constant mean curvature in space forms**, Bull. Sci. math. 140 (2016) 901-907

[9] CATINO, Giovanni. **On conformally flat manifolds with constant positive scalar curvature**, Proc. Am. Math. Soc. 144 (2016) 2627-2634.

[10] CHENG, Shiu-Yuen; YAU, Shing-Tung. **Hypersurfaces with constant scalar curvature**, Math. Ann. 225 (1977), 195-204.

[11] CHERN, Shiing-Shen; CARMO, Manfredo Perdigão do; KOBAYASHI, Shoshichi. **Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length**, Functional Analysis and Related Fields (F. Browder, ed.), Springer-Verlag, Berlin, (1970), pp. 59-75.

[12] CHERN, Shiing-Shen. **On surfaces of constant mean curvature in a three-dimensional space of constant curvature**, Lecture Notes in Mathematics, (1983).

[13] DELAUNAY, C. **Sur la surface de Révolution dont la Courbure Moyenne est Constante**. Journal des Mathématiques Pures et Apliquées. 6(1), (1841), 309-320.

[14] HILBERT, David; COHN-VOSSEM, Stephan. **Geometry and Imagination**, Chelsea. New York, (1952)

[15] ILIAS, Said; NELLI, Barbara; SORET, Marc. **Caccioppoli's inequalities on constante mean curvature hypersurfaces in Riemannian manifolds**. - Ann. Glob. Anal. Geom. (2012), 443-471.

[16] LAWSON, Blaine. **Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces**, Ann. of Math. (2) 89 (1969), 187-197

[17] NOMIZU, Katsumi; SMYTH, Brian, **A formula of Simon's type and hypersurfaces with constant mean curvature**, J. Differential Geom. 3 (1969), 367-377.

[18] OKUMURA, Masafumi, **Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor**, (1974).

[19] PENG, Chia-Kuei; TERNG, Chuu-Lian. **Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature, Seminar on Minimal Submanifolds**

[20] SIMONS, James. **Minimal varieties in Riemannian manifolds**, Ann. of Math. (2) 88 (1968), 62- 105.

[21] VIACLOVSKY, Jeff. **Topics in Riemannian Geometry**, (2016).

[22] WENTE, Henry Christian. **A Counter-Example in 3-Space to a Conjecture of H. Hopf**, Pacific Journal of Mathematics, (1986).