UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Sobre os Lemas Tipo Brezis-Lieb e Aplicações

Marcos Raylan Pinheiro de Araújo

BELÉM-PA
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Marcos Raylan Pinheiro de Araújo

Sobre os Lemas Tipo Brezis-Lieb e Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e, defendida por Marcos Raylan Pinheiro de Araújo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

BELÉM-PA
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P654s Pinheiro de Araújo, Marcos Raylan
Sobre os Lemas Tipo Brezis-Lieb e Aplicações / Marcos Raylan Pinheiro de Araújo. — 2020.
60 f.

Orientador(a): Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. Equações Diferenciais Parciais . 2. Problemas Variacionais . 3. Teoria da Medida. 4. Lema de Fatou. 5. Lema de Brezis-Lieb. I. Título.

CDD 519

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Marcos Raylan Pinheiro de Araújo

Sobre os Lemas Tipo Brezis-Lieb e Aplicações

Dissertação apresentada ao Curso de mestrado em Matemática e Estatística UFPA, como pré-requisito para a obtenção do Titulo de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 28 de fevereiro de 2020

Resultado: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior (Orientador)
PPGME/ PDM/ UFPA

João Pablo Pinheiro da Silva
Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva
PPGME/ PDM/ UFPA

Gelson Conceição G. dos Santos
Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
PPGME/ PDM/ UFPA

Dedicatória

Aos meus pais e minha avó

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais - Doracy e Nonato - e minha avó materna Darcira, que são as pessoas mais importantes da minha vida e foram fundamentais para o meu avanço pessoal e acadêmico. De longe, foram as pessoas que mais me apoiaram e contribuíram diretamente para a realização e conclusão do mestrado.

Sou grato, também, à minha namorada Milene Gabrielle, principalmente pelo apoio no decorrer do mestrado, por acreditar em mim, por aguentar meus estresses constantes nos momentos de crise, por estar presente nas horas que mais precisei, me compreender, e com certeza, pelos momentos de felicidades para fugir da rotina de trabalho. Espero que esteja na minha vida por muito tempo, você é incrível.

Outra pessoa de suma importância foi o meu orientador, mais do que isso, meu amigo Dr. João Rodrigues. Agradeço pelas contribuições matemáticas, no sentido de me ajudar a entender e demonstrar os teoremas para a realização desse trabalho. Com certeza, é o professor que mais influenciou e influencia no meu amadurecimento matemático. Espero continuar trabalhando contigo para desenvolver uma tese e, a longo prazo, para realizações de artigos e contribuições para a análise matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesse trabalho, mostra-se que se (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis limitada em $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e $u_n \to u$ quase todo ponto $(q.t.p)$ em Ω então

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu = \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu + \int_\Omega |u|^p d\mu + o(1), \tag{1}$$

o qual é um resultado útil em problemas variacionais para provar a existência de funções maximizadoras ou minimizadoras em alguns casos, como por exemplo quando o problema envolve falta de compacidade. Resultados de convergência como em (1) foram primeiramente obtidos por Brezis e Lieb em [2]. Além disso, daremos uma discussão com aplicações de como (1) pode ser utilizado.

Por outro lado, em aplicações concretas a convergência $q.t.p.$ pode ser difícil de verificar, enquanto que a condição de convergência fraca raramente apresenta dificuldade. Assim, é natural perguntar quais possíveis análogos de (1) existem para sequências em $L^p(\Omega)$ que não necessariamente convergem em toda parte. Por essa razão, mostraremos resultados análogos de (1) (os quais podem ser encontrados em [1]) sem a hipótese de convergência quase em toda parte. Neste trabalho faremos um estudo detalhado dos artigos [2] e [1].

Palavras Chave: Equações Diferenciais Parciais Elíticas; Problema Variacional; Teoria da Medida; Lema de Fatou; Lema de Brezis-Lieb.

Abstract

In this work, it is shown that if (Ω, Σ, μ) it's a measurement space, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of measurable functions limited in $L^p(\Omega)$ with $1 \leq p < \infty$ e $u_n \to u$ pointwise almost everywhere $(a.e)$ in Ω then

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu = \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu + \int_\Omega |u|^p d\mu + o(1), \tag{2}$$

or what is a useful result in miscellaneous problems proving the existence of maximizing or minimizing functions in some cases, such as when the problem involves lack of compression. Convergence results as in (1) were detected by Brezis and Lieb in [2]

On the other hand, In concrete applications convergence a.e. might be hard to verify, while the weak convergence condition rarely presents a difficulty. Thus, it is natural to ask what possible analogues of (2) exist for sequences in $L^p(\Omega)$ that don't necessarily converge everywhere. For this reason, we will show analogous results from (1) (which can be found in [1]) without the hypothesis of convergence almost everywhere. In this paper we will make a detailed study of the articles [2] and [1].

Key Words: Elitic Partial Differential Equations; Variational Problem; Measure theory; Fatou's lemma; Brezis-Lieb lemma.

Conteúdo

Introdução

O cálculo variacional é um ramo da matemática que estuda, entre outras coisas, problemas de minimização, os quais surgem por exemplo na geometria e na Física. Já na Grécia antiga se sabia que entre todas as curvas com perímetro fixado, o círculo tem a maior área. Essa propriedade é expressa através da desigualdade isoperimétrica clássica:

$$L^2 \geq 4\pi A$$

onde L é o comprimento da curva e A é a área da curva. Em 1662, Fermat deduziu as leis de refração da luz a partir do postulado de que os raios luminosos seguem sempre o caminho que minimiza o tempo de percurso. Neste caso, foram fundamentais as ideias do cálculo para a resolução do problema. Em 1696, Johann Bernoulli propôs o famoso problema da braquistócrona e apresentou sua solução, que marcou o desenvolvimento do cálculo das variações. Em 1744, Euler deduziu a equação diferencial correspondente a um problema de minimização no caso unidimensional. Em outros termos, relacionado ao problema de minimização do funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), u'(x))dx$$

também conhecido como funcional de energia correspondente a equação de Euler

$$F_{u(x)}(x, u(x), u'(x)) - DF_{u'(x)}(x, u(x), u'(x)) = 0$$

modernamente denominada equação de Euler-Lagrange. O método direto do cálculo variacional consiste em obter a existência de solução para a equação de Euler-Lagrange através da demonstração da existência de uma função que minimiza o funcional de energia associado. Em 1856, Dirichlet utilizou uma ideia atualmente conhecida como princípio de Dirichlet. De acordo com esse princípio, ao resolver o problema de minimização do funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

conhecida como integral de Dirichlet, obtemos uma solução da equação diferencial de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & = 0, \qquad em \;\; \Omega \\ \quad u(x) & = \phi(x) \quad\; em \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

que é uma das mais importantes equações diferenciais da matemática e de suas aplicações às outras ciências. Apesar do sucesso desse princípio na resolução de vários problemas, o resultado de Dirichlet não foi demonstrado com o devido rigor exigido na época. De fato, em 1895, Weierstrass questionou a ideia de Dirichlet (que o funcional I sempre atinge o ínfimo) ao propor um problema onde a sequência minimizante u_n convergia para uma função v que não pertencia a classe de funções em questão, isto é, $I(v) = C = \inf_{u \in E} I(u)$ mas v não pertencia ao espaço E. Entretanto, o próprio Weierstrass juntamente com outros matemáticos proporcionaram uma base teórica mais sólida para o Cálculo Variacional através de resultados importantes da Análise Funcional e a criação dos espaços de Sobolev (ver [4]). Analisando a dificuldade presente no problema de Weierstrass, reconhecemos o que é atualmente chamado de ausência de compacidade. Todavia, assim como no exemplo de Weierstrass, existem muitos outros problemas em que a compacidade falha.

O resultado crucial para o desenvolvimento desse trabalho é o lema de Brezis-Lieb que é uma melhoria do lema de Fatou que avalia o intervalo entre a integral de uma sequência funcional e a integral do seu limite pontual e desempenha um papel importante na análise de equações diferenciais parciais e é realmente útil em problemas variacionais para provar a existência de funções maximizadoras (minimizadora) em alguns casos que não temos compacidade.

Este resultado diz que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ para algum $p \in [1, \infty)$ e $u_n \to u$ $q.t.p$ (quase todo ponto) em Ω então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{\Omega} |u_n|^p - \int_{\Omega} |u_n - u|^p \right) = \int_{\Omega} |u|^p$$

este resultado também é generalizado no Teorema 1.1.1 para alguns funcionais diferente da norma do $L^p(\Omega, \mu)$, a saber

$$\int_{\Omega} |\Phi(u + v_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)|\, d\mu \to 0$$

para adequada função $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e para uma adequada sequência (u_n). Deste modo, estabelecemos o primeiro resultado como consequência do caso mais geral.

O problema que motivou o lema de Brezis-Lieb foi a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev HLS em $L^p(\mathbb{R}^n)$ que afirma

$$\left| \iint u(x)|x - y|^{-\lambda} v(y) dx dy \right| \leq N_{p,\lambda,n} ||u||_{L^p} ||v||_{L^t} \tag{HLS}$$

para quaisquer $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^t(\mathbb{R}^n)$, $1 < p,\ t < \infty$, $1/p + 1/t + \lambda/n = 2$ e $0 < \lambda < n$. Por definição $N_{p,\lambda,n}$ é a melhor constante na desigualdade acima. O problema no caso é mostrar que existe o par u, v tal que vale a igualdade na desigualdade HLS (ver [9]).

Em aplicações concretas, a convergência $q.t.p$ pode ser difícil de verificar, enquanto a condição de convergência fraca raramente apresenta dificuldades, uma vez que $L^p(\Omega, \mu)$ com $p \in (1, \infty)$ é reflexivo e qualquer subsequência limitada nesse espaço tem uma subsequência fracamente convergente. Assim é natural perguntar quais os possíveis análogos do Teorema 1.2.1 podem existir para sequências em $L^p(\Omega, \mu)$ que não necessariamente convergem $q.t.p.$

Esta situação surge em aplicações para equações diferencias parciais quasilineares quando os termos u_n são funções a valores vetoriais da forma $\nabla u_n \in L^p(\Omega, \mu)$ e não podem confiar na compactação das coberturas locais de Sobolev que produzem convergência $q.t.p$ de (u_n) mas não de seus gradientes.

No Capítulo 2, são provados alguns resultados análogos do lema de Brezis-Lieb (Teorema 1.2.1) sem a convergência $q.t.p.$ Embora somente a convergência fraca como hipótese não nos forneça estimativas conclusivas, um limite inferior para a lacuna é encontrado em $L^p(\Omega, \mu), p \geq 3$ sob a hipótese de convergência fraca e convergência fraca em termos de mapeamento de dualidade. É provado que a restrição de p é necessária e também são provados algumas desigualdades relacionadas com a convergência fraca.

Notações

$\blacksquare$: fim de uma demonstração

$\to$: convergência forte

$\rightharpoonup$: convergência fraca

$|\Omega|$: medida do conjunto Ω

$L^P(\Omega) = L^p(\Omega,\mu) = L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$

$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$

$\int_\Omega u$: denota $\int_\Omega u d\mu$

$u_n = v_n + o(1)$: denota $\lim(u_n - v_n) = 0$

$u_n \leq v_n + o(1)$: denota $\limsup(u_n - v_n) \leq 0$

$q.t.p$: denota convergência em quase todo ponto

Capítulo 1

O lema de Brezis-Lieb

Neste capitulo, será enunciado e demonstrado o lema de Brezis-Lieb. Antes discutiremos a versão mais geral (para uma função diferente da norma do $L^p(\Omega, \mu)$) desse resultado. Posto isso, mostra-se a utilidade do teorema 1.2.1 em problemas de maximização e minimização.

1.1 Caso geral

Teorema 1.1.1 *Seja $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função continua que satisfaz as seguintes hipóteses:*

(a) $\Phi(0) = 0$,

(b) *Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existem duas funções φ_ε e ψ_ε continuas, não-negativas tais que,*

$$|\Phi(a + b) - \Phi(a)| \leq \varepsilon \varphi_\varepsilon(a) + \psi_\varepsilon(b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Considere $u_n = u + v_n$ uma sequência de funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{C}$ tal que

i) $v_n \to 0$ *q.t.p em* Ω

ii) $\Phi(u) \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$

iii) $\displaystyle\int_\Omega \varphi_\varepsilon(v_n(x)) d\mu(x) \leq d < \infty$

iv) $\displaystyle\int_\Omega \psi_\varepsilon(u(x))d\mu(x) < \infty, \qquad \forall \varepsilon > 0,$

quando $n \to \infty$ *vale*

$$\int_\Omega |\Phi(u + v_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)|\, d\mu \to 0$$

Demonstração 1 *Fixemos* $\varepsilon > 0$ *e definimos uma sequência de pontos*

$$W_{\varepsilon,n}(x) = [|\Phi(u_n(x)) - \Phi(v_n(x)) - \Phi(u(x))| - \varepsilon\varphi_\varepsilon(v_n(x))]^+$$

onde $u^+ = max\,\{u, 0\}$. *Observe que quando* $n \to \infty$, $W_{\varepsilon,n}(x) \to 0$ *q.t.p em* Ω *pois*

$$v_n \to 0 \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega \quad \Leftrightarrow \quad u_n - u \to 0 \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega \quad \Leftrightarrow \quad u_n \to u \quad q.t.p \ \ em \ \ \Omega$$

além disso,

$$\begin{aligned}\lim W_{\epsilon,n}(x) &= \lim\,[max(0, |\Phi(u_n(x)) - \Phi(v_n(x)) - \Phi(u(x))| - \varepsilon\varphi_\varepsilon(v_n(x)))] \\ &= max(0, |\Phi(u(x)) - \Phi(0) - \Phi(u(x))| - \varepsilon\varphi_\varepsilon(0))\end{aligned}$$

logo

$$\lim W_{\epsilon,n}(x) = max(0, -\varepsilon\varphi_\varepsilon(0)) = 0 \qquad q.t.p \ \ em \ \ \Omega$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}|\Phi(u_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)| &= |\Phi(u_n) - \Phi(v_n) + (-\Phi(u))| \\ &\le |\Phi(u_n) - \Phi(v_n)| + |-\Phi(u)|\end{aligned}$$

então teremos

$$\begin{aligned}|\Phi(u_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)| &\le |\Phi(u_n) - \Phi(v_n)| + |\Phi(u)| \\ &\le |\Phi(u + v_n) - \Phi(v_n)| + |\Phi(u)| \qquad (1.1)\end{aligned}$$

pela hipótese (b), tem-se

$$|\Phi(u + v_n) - \Phi(v_n)| + \le \varepsilon\varphi_\varepsilon(v_n) + \psi_\varepsilon(u) \qquad (1.2)$$

de (1.1) e (1.2) obtemos

$$|\Phi(u_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)| \leq \varepsilon\varphi_\varepsilon(v_n) + \psi_\varepsilon(u) + |\Phi(u)|$$

assim sendo,

$$|\Phi(u_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)| - \varepsilon\varphi_\varepsilon(v_n) \leq \psi_\varepsilon(u) + |\Phi(u)|$$

ou ainda,

$$W_{\varepsilon,n}(x) \leq \psi_\in(u) + |\Phi(u)|$$

por consequência da hipótese, $\psi_\epsilon(u) \in L^1(\Omega, \mu)$ *e* $\Phi(u) \in L^1(\Omega, \mu)$*, como* $L^1(\Omega, \mu)$ *é um espaço vetorial segue* $\psi_\varepsilon(u)+\Phi(u) \in L^1(\Omega, \mu)$*. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue tem-se*

$$\int_\Omega W_{\varepsilon,n} d\mu \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty$$

contudo, observe que

$$|\Phi(u_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)| \leq W_{\varepsilon,n} + \varepsilon\varphi_\varepsilon(v_n)$$

e, portanto

$$I_n \equiv \int_\Omega |\Phi(u_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)| d\mu \leq \int_\Omega [W_{\varepsilon,n} + \varepsilon\varphi_\varepsilon(v_n)] d\mu$$

ou seja

$$I_n \leq \int_\Omega W_{\varepsilon,n} d\mu + \varepsilon \int_\Omega \varphi_\varepsilon(v_n) d\mu$$

segue

$$\limsup I_n \leq \limsup \int_\Omega W_{\varepsilon,n} d\mu + \varepsilon \limsup \int_\Omega \varphi_\varepsilon(v_n) d\mu$$

i.é, $\limsup I_n \leq \varepsilon c$*. Fazendo* $\varepsilon \to 0$ *obtemos*

$$\limsup I_n = 0 \tag{1.3}$$

por outro lado, sabemos que

$$0 \leq |\Phi(u_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)|$$

logo

$$0 \leq \int_\Omega |\Phi(u_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)| d\mu \equiv I_n$$

então

$$\liminf I_n = 0 \tag{1.4}$$

de (1,3) e (1.4) obtemos $\lim I_n = 0$.

$$\therefore \int_\Omega |\Phi(u + v_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)|\, d\mu \to 0$$

■

Em outras palavras, o Teorema 1.1.1 diz o seguinte: se escrevermos $u_n = u + v_n$ com $v_n \to 0$ q.t.p em Ω, então para n grande $\int_\Omega \Phi(u + v_n) d\mu$ se decompõem em duas partes, a saber $\int_\Omega \Phi(u) d\mu$ e $\int_\Omega \Phi(v_n) d\mu$. Não se assume que $\Phi(u_n)$ ou $\Phi(v_n)$ estão separadamente em $L^1(\Omega, \mu)$. Vale ressaltar que a constante d na hipótese (iii) independe de ε e n.

Lema 1.1.1 *Seja* $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *convexa e* $k > 1$ *então*

$$|\Phi(a + b) - \Phi(a)| \leq \varepsilon\, (\Phi(ka) - k\Phi(a)) + |\Phi(C_\varepsilon b)| + |\Phi(-C_\varepsilon b)|$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$, $0 < \varepsilon < 1/k$ *e* $1/C_\varepsilon = \varepsilon(k - 1)$.

Demonstração 2 *Seja* $\alpha = 1 - k\varepsilon$, $\beta = \varepsilon$ *e* $\gamma = (k - 1)\varepsilon$. *Então*

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 - k\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon k - \epsilon = 1$$

note que

$$a + b = \alpha a + \beta ka + \gamma C_\varepsilon b \tag{1.5}$$

pois

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta ka + \gamma C_\varepsilon b &= (1 - k\varepsilon)a + \varepsilon ka + (k - 1)\varepsilon C_\varepsilon b \\ &= a - k\varepsilon a + \varepsilon ka + \frac{1}{C_\varepsilon} C_\epsilon b \end{aligned}$$

temos $\alpha a + \beta k a + \gamma C_\varepsilon b = a + b$. *De (1.5) segue*

$$\Phi(a+b) = \Phi(\alpha a + \beta k a + \gamma C_\varepsilon b)$$

por convexidade da Φ, *vem:*

$$\begin{aligned}\Phi(a+b) &\leq \alpha\Phi(a) + \beta\Phi(ka) + \gamma\Phi(C_\varepsilon b)\\ &\leq (1-k\varepsilon)\Phi(a) + \varepsilon\Phi(ka) + \gamma\Phi(C_\varepsilon b)\end{aligned}$$

isto é,

$$\Phi(a+b) \leq \Phi(a) - \varepsilon k\Phi(a) + \varepsilon\Phi(ka) + \frac{1}{C_\varepsilon}\Phi(C_\varepsilon b)$$

logo

$$\Phi(a+b) - \Phi(a) \leq \varepsilon\left[\Phi(ka) - k\Phi(a)\right] + \frac{1}{C_\varepsilon}\Phi(C_\varepsilon b) \tag{1.6}$$

observe que $1/C_\varepsilon \in (0,1)$ *vem*

$$\frac{1}{C_\varepsilon}\Phi(C_\varepsilon b) \leq \Phi(C_\varepsilon b) \leq |\Phi(C_\varepsilon b)| \tag{1.7}$$

de (1.6) e (1.7) obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(a+b) - \Phi(a) &\leq \varepsilon\left[\Phi(ka) - k\Phi(a)\right] + |\Phi(C_\varepsilon b)|\\ &\leq \varepsilon\left[\Phi(ka) - k\Phi(a)\right] + |\Phi(C_\varepsilon b)| + |\Phi(-C_\varepsilon b)| \qquad (1.8)\end{aligned}$$

de forma análoga, sejam

$$\alpha = \frac{1}{1+k\varepsilon} \qquad \beta = \frac{\varepsilon}{1+k\varepsilon} \qquad \gamma = \frac{\varepsilon(k-1)}{1+k\varepsilon}$$

então

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1+\varepsilon+\varepsilon(k-1)}{1+k\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon+k\varepsilon-\varepsilon}{1+k\varepsilon} = \frac{1+k\varepsilon}{1+k\varepsilon} = 1$$

vale que

$$a = \alpha(a+b) + \beta k a + \gamma(-C_\varepsilon b). \tag{1.9}$$

De fato,

$$\alpha(a+b) + \beta k a + \gamma(-C_\varepsilon b) = \frac{a+b+\varepsilon k a + \varepsilon(k-1)(-C_\varepsilon b)}{1+k\varepsilon}$$

logo

$$= \frac{a+b+\varepsilon ka + \frac{1}{C_\varepsilon}(-C_\varepsilon b)}{1+k\varepsilon} = \frac{a+b+\varepsilon ka - b}{1+k\varepsilon}$$

e então

$$\alpha(a+b) + \beta ka + \gamma(-C_\varepsilon b) = \frac{a+\varepsilon ka}{1+k\varepsilon} = \frac{a(1+\varepsilon k)}{1+\varepsilon k} = a$$

de (1.9) e pela convexidade de Φ *segue:*

$$\begin{aligned}\Phi(a) &= \Phi\left(\alpha(a+b) + \beta ka + \gamma(-C_\varepsilon b)\right)\\ &\leq \alpha\Phi(a+b) + \beta\Phi(ka) + \gamma\phi(-C_\varepsilon)\end{aligned}$$

donde vem

$$\Phi(a) \leq \frac{\Phi(a+b) + \varepsilon\Phi(ka) + \varepsilon(k-1)\Phi(-C_\varepsilon b)}{1+k\varepsilon} \tag{1.10}$$

multiplicando por $(1+k\varepsilon)$ *ambos os membros da desigualdade (1.10) obtemos*

$$(1+k\varepsilon)\Phi(a) \leq \Phi(a+b) + \varepsilon\Phi(ka) + \varepsilon(k-1)(-C_\varepsilon b)$$

desenvolvendo

$$\begin{aligned}\Phi(a) - \Phi(a+b) &\leq \varepsilon\Phi(ka) - \varepsilon k\Phi(a) + \frac{1}{C_\varepsilon}\Phi(-C_\varepsilon b)\\ &\leq \varepsilon\left[\Phi(ka) - k\Phi(a)\right] + \frac{1}{C_\varepsilon}\Phi(-C_\varepsilon b)\end{aligned}$$

pelo mesmo argumento para obter a inequação (1.8) tem-se

$$\Phi(a) - \Phi(a+b) \leq \varepsilon\left[\Phi(ka) - k\Phi(a)\right] + |\Phi(-C_\varepsilon b)| + |\Phi(C_\varepsilon b)| \tag{1.11}$$

portanto, de (1.8) e (1.11), temos:

$$|\Phi(a+b) - \Phi(a)| \leq \varepsilon\left[\Phi(ka) - k\Phi(a)\right] + |\Phi(-C_\varepsilon b)| + |\Phi(C_\varepsilon b)|$$

■

Tendo em vista o Lema 1.1.1 acima, então podemos concluir o seguinte: supondo que Φ definida em $\mathbb{C}$ com valores em $\mathbb{R}$ seja continua e convexa com

$\Phi(0) = 0$ e escolhendo um número $k > 1$ então vale a hipótese (b) do teorema 1.1.1 para $\varepsilon k < 1$ com $\varphi_\varepsilon(t) = \Phi(kt) - k\Phi(t)$ e $\psi_\varepsilon(t) = |\Phi(C_\varepsilon t)| + |\Phi(-C_\varepsilon t)|$ onde $1/C_\varepsilon = \varepsilon(k-1)$.

Portanto as hipóteses do Teorema 1.1.1 estão satisfeitas se houver algum $k > 1$ fixo tal que $(\Phi(kg_n) - k\Phi(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ seja uniformemente limitada em $L^1(\Omega,\mu)$ e se $\Phi(Mf) \in L^1(\Omega,\mu)$ para cada número real M. Importante ressaltar que a condição de $(\Phi(kg_n) - k\Phi(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ser uniformemente limitada em $L^1(\Omega,\mu)$ é essencial não apenas para as hipóteses do Teorema 1.1.1 mas para a conclusão também.

Exemplo 1.1.1 *Seja* $\Omega = [0,1]$, $\Phi(t) = e^{|t|} - 1$, $d\mu = dx$, $u(x) = 1$ *e* $v_n(x) = \ln(1+n)$ *se* $0 < x < \dfrac{1}{n}$ *e* $v_n(x) = 0$ *caso contrário. Então*

$$\int_\Omega \Phi(u_n)d\mu = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(e^{|u+v_n|} - 1\right) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(e^{|u|} - 1\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} e^{1+\ln(1+n)} dx - \int_0^{\frac{1}{n}} dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 e dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 dx$$

ou seja

$$\int_\Omega \Phi(u_n)d\mu = e(1+n)\frac{1}{n} + e - e\frac{1}{n} - 1 = 2e - 1$$

logo $\Phi(u_n) \in L^1(\Omega,\mu)$. *Agora,*

$$\int_\Omega \Phi(v_n)d\mu = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(e^{|\ln(1+n)|} - 1\right) dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(e^0 - 1\right) dx$$

$$= (1+n)\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 1$$

o que nos diz que $\Phi(v_n)$ *é limitada em* $L^1(\Omega,\mu)$. *De*

$$\int_\Omega \Phi(u)d\mu = \int_0^1 \left(e^{|u|} - 1\right) dx = \int_0^1 (e-1)\, dx = e - 1$$

concluímos que $\Phi(u) \in L^1(\Omega,\mu)$. *Note que*

$$\lim \left[\int_\Omega \Phi(u_n) - \int_\Omega \Phi(v_n)\right] = \lim\,[2e - 1 - 1] = 2e - 2 \neq \int \Phi(u)$$

isto é, a tese do Teorema 1.1.1 não se mantém. Isto acontece pois, apesar de $\Phi(v_n)$ ser uniformemente limitada em $L^1(\Omega,\mu)$ e $\Phi(Mu) \in L^1(\Omega,\mu)$ $\forall M \in \mathbb{R}$, observe que para esta sequência (v_n), $\Phi(kv_n)$ não é uniformemente limitada em $L^1(\Omega,\mu)$ quando $k > 1$. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(kv_n)d\mu &= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(e^{|k\ln(1+n)|} - 1\right) dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(e^0 - 1\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(e^{\ln(1+n)^k} - 1\right) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \left((1+n)^k - 1\right) dx
\end{aligned}
$$

portanto

$$
\int_\Omega \Phi(kv_n)d\mu = \frac{(n+1)^k - 1}{n} \tag{1.12}
$$

ou seja, quando $n \to \infty$ tem-se que a expressão em (1.12) tende para ∞. No entanto, desde que Φ seja convexa a condição acima nos diz que a conclusão do teorema 1.1.1 seria válida para qualquer outra sequência (u_n) tal que $\Phi(ku_n)$ seja uniformemente limitada em $L^1(\Omega,\mu)$ para algum $k > 1$.

1.2 Caso em $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$

Teorema 1.2.1 *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Suponha que $u_n \to u$ q.t.p em Ω e $||u_n||_{L^p(\Omega)} \leq C < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e para algum $1 \leq p < \infty$. Então*

$$
\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |u_n|^p - \int_\Omega |u_n - u|^p \right) = \int_\Omega |u|^p
$$

Demonstração 3 *Seja a função*

$$
\begin{aligned}
\Phi : \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\
t &\to \Phi(t) = |t|^p
\end{aligned}
$$

para algum $1 \leq p < \infty$. Vamos verificar que Φ satisfaz as hipóteses (a) e (b) do teorema 1.1.1. Para (a), $\Phi(0) = |0|^p = 0$. para (b), note que Φ é convexa. Com *efeito, observe que*

$$\Phi'(t) = p|t|^{p-1} = \begin{cases} pt^{p-1}, & t \geq 0 \\ -p(-t)^{p-1}, & t < 0 \end{cases}$$

Segue então

$$\Phi''(t) = p(p-1)|t|^{p-2} = \begin{cases} p(p-1)t^{p-2}, & t \geq 0 \\ -p(p-1)(-t)^{p-2}, & t < 0 \end{cases}$$

isto é, $\Phi''(t) = p(p-1)|t|^{p-2} \geq 0$ *portanto* Φ *é convexa. Tomemos* $0 < \varepsilon < 1/k$, $k > 1$, $\dfrac{1}{C_\varepsilon} = (k-1)\varepsilon$ *e as funções*

$$\varphi_\varepsilon(t) = |kt|^p - k|t|^p = \Phi(kt) - k\Phi(t)$$

e

$$\psi_\varepsilon(t) = |C_\varepsilon|^p + |-C_\varepsilon|^p = |\Phi(C_\varepsilon t)| + |\Phi(-C_\varepsilon t)|$$

logo, pelo Lema 1.1.1, $\forall a, b \in \mathbb{C}$ *vale que*

$$|\Phi(a+b) - \Phi(a)| \leq \varepsilon\left(\Phi(ka) - k\Phi(a)\right) + |\Phi(C_\varepsilon b)| + |\Phi(-C_\varepsilon b)|$$

ou seja,

$$|\Phi(a+b) - \Phi(a)| \leq \varepsilon\varphi_\varepsilon(a) + \psi_\varepsilon(b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

agora vamos verificar se $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *satisfaz as hipóteses (i)-(iv) do Teorema 1.1.1. Segue que*

$$u_n = u + v_n \Rightarrow v_n = u_n - u$$

como $u_n \to u$ *q.t.p em* Ω *então* $v_n \to 0$ *q.t.p em* Ω*. Logo vale (i). Para verificar (ii), tem-se*

$$\int_\Omega \Phi(u)d\mu = \int_\Omega |u|^p\, d\mu = \int_\Omega |\lim u_n|^p\, d\mu = \int_\Omega \lim |u_n|^p\, d\mu = \int_\Omega \liminf |u_n|^p\, d\mu$$

pelo lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi(u)d\mu \leq \liminf \int_\Omega |u_n|^p d\mu = \liminf ||u_n||^p_{L^p(\Omega)} \leq \liminf C^p = C^p < \infty$$

portanto $\Phi(u) \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. *Agora, temos*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_\varepsilon(v_n(x))d\mu(x) &= \int_\Omega \left(|kv_n|^p - k|v_n|^p\right)d\mu \\ &= \int_\Omega |kv_n|^p d\mu - k\int_\Omega |v_n|^p d\mu \\ &= k^p \int_\Omega |v_n|^p d\mu - k\int_\Omega |v_n|^p d\mu\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_\varepsilon(v_n(x))d\mu(x) &= (k^p - k)\,||v_n||^p_{L^p(\Omega)} \\ &= (k^p - k)\,||u_n - f||^p_{L^p(\Omega)} \\ &= (k^p - k)\left(||u_n - u||_{L^p(\Omega)}\right)^p\end{aligned}$$

pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_\varepsilon(v_n(x))d\mu(x) &\leq (k^p - k)\left(||u_n||_{L^p(\Omega)} + ||u||_{L^p(\Omega)}\right)^p \\ &\leq (k^p - k)\left(C^p + ||u||_{L^p(\Omega)}\right)^p < \infty\end{aligned}$$

finalmente, tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_\varepsilon(u(x))d\mu(x) &= \int_\Omega \left(|C_\varepsilon u|^p + |-C_\varepsilon u|^p\right)d\mu \\ &= \int_\Omega |C_\varepsilon u|^p d\mu + \int_\Omega |-C_\varepsilon u|^p d\mu\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_\varepsilon(u(x))d\mu(x) &= C_\varepsilon^p \int_\Omega |u|^p d\mu + |-C_\varepsilon|^p \int_\Omega |u|^p d\mu \\ &= \left(C_\varepsilon^p + |-C_\varepsilon|^p\right)||u||^p_{L^p(\Omega)} < \infty\end{aligned}$$

portanto estamos nas hipóteses do Teorema 1.1.1, então

$$\int_\Omega |\Phi(u + v_n) - \Phi(v_n) - \Phi(u)|\,d\mu \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty$$

ou seja

$$\int_\Omega |\Phi(u_n) - \Phi(u_n - u) - \Phi(u)|\,d\mu \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty$$

isto é

$$\lim \left[\int_\Omega |u_n|^p d\mu - \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu - \int_\Omega |u|^p d\mu \right] = 0$$

portanto

$$\lim \left[\int_\Omega |u_n|^p d\mu - \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu \right] = \int_\Omega |u|^p d\mu.$$

■

O Teorema 1.2.1 não é apenas um corolário do Teorema 1.1.1, mas é realmente útil em problemas variacionais para provar a existência de funções maximizadoras (minimizadoras) em alguns casos que a não há compacidade.

As hipóteses do Teorema 1.2.1 e o teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki, passando a uma subsequência se necessário implicam que (u_n) converge fracamente para u em $L^p(\Omega, \mu)$. No entanto, a convergência fraca em $L^p(\Omega, \mu)$ é insuficiente para concluir que a tese do Teorema 1.2.1 seja verdadeira exceto no caso $p = 2$. De fato, sabemos que $L^2(\Omega, \mu)$ é um espaço de Hilbert e note que vale a relação fundamental

$$||u_n||^2_{L^2(\Omega)} = ||u_n - u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)} - 2 \langle u_n - u, u \rangle$$

desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(\Omega, \mu)$ então $u_n - u \rightharpoonup 0$ em $L^2(\Omega, \mu)$. Como o dual do $L^2(\Omega, \mu)$ é o $L^2(\Omega, \mu)$ e $u \in L^2(\Omega, \mu)$ segue que

$$\langle u_n - u, u \rangle = \int_\Omega (u_n - u) u d\mu \to 0$$

portanto podemos escrever

$$||u_n||^2_{L^2(\Omega)} = ||u_n - u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)} + o(1)$$

1.3 Aplicações

Consideramos o seguinte problema: se k é a melhor constante na desigualdade

$$||Au||_{L^q(\Omega)} \leq K ||u||_{L^p(\Omega)}$$

onde $A : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é um operador linear limitado. Pode-se encontrar u tal que a igualdade vale? para responder esta pergunta consideramos a seguinte proposição

Proposição 1.3.1 *Sejam* (Ω, Σ, μ) *um espaço de medida e* $A : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ *um operador linear limitado com* $1 \leq p \leq q < \infty$. *Para* $u \in L^p(\Omega), u \neq 0$ *considere*

$$R(u) = \frac{||Au||_q}{||u||_p} \qquad e \qquad K = \sup R(u)$$

seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* $L^p(\Omega)$ *tal que*

I $R(u_n) \to k$

II $u_n \to u \neq 0 \quad$ *q.t.p em* Ω

III $Au_n \to Au \quad$ *q.t.p em* Ω

então $R(u) = K$, *isto é,* u *é uma função maximizadora.*

Demonstração 4 *Pelo Teorema 1.2.1, quando* $n \to \infty$ *temos*

$$||u_n||^p_{L^p(\Omega)} - ||u_n - f||^p_{L^p(\Omega)} \to ||u||^p_{L^p(\Omega)}$$

ou seja,

$$||u_n||^p_{L^p(\Omega)} = ||u_n - u||^p_{L^p(\Omega)} + ||u||^p_{L^p(\Omega)} + o(1)^p$$

onde $o(1) \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *De forma análoga,*

$$||Au_n||^q_{L^q(\Omega)} = ||Au_n - Au||^q_{L^q(\Omega)} + ||Au||^q_{L^q(\Omega)} + o_1(1)^q$$

onde $o_1(1) \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Observe que se* $a, b, c \geq 0$ *e* $t \leq 1$, *então*

$$(a + b + c)^t \leq a^t + b^t + c^t \tag{1.13}$$

portanto,

$$R(u_n)^p = \left(\frac{||Au_n||_{L^q(\Omega)}}{||u||_{L^p(\Omega)}}\right)^p = \frac{\left(||Au_n||^q_{L^q(\Omega)}\right)^{\frac{p}{q}}}{||u||^p_{L^p(\Omega)}}$$

ou ainda,

$$R(u_n)^p = \frac{\left(||Au_n - Au||^q_{L^q(\Omega)} + ||Au||^q_{L^q(\Omega)} + o_1(1)^q\right)^{\frac{p}{q}}}{||u_n - u||^p_{L^p(\Omega)} + ||u||^p_{L^p(\Omega)} + o(1)^p}$$

como $p/q \leq 1$, pela desigualdade (1.13), temos:

$$R(u_n)^p \leq \frac{||A(u_n-u)||^p_{L^q(\Omega)} + ||Au||^p_{L^q(\Omega)} + o_1(1)^p}{||u_n-u||^p_{L^p(\Omega)} + ||u||^p_{L^p(\Omega)} + o(1)^p} \tag{1.14}$$

note que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\frac{||A(u_n-u)||_{L^q(\Omega)}}{||u_n-u||_{L^p(\Omega)}} \leq K$$

então

$$||A(u_n-u)||_{L^q(\Omega)} \leq K||u_n-u||_{L^p(\Omega)}$$

segue

$$||A(u_n-u)||^p_{L^q(\Omega)} \leq K^p||u_n-u||^p_{L^p(\Omega)} \tag{1.15}$$

de (1.14) e (1.15) vem:

$$R(u_n)^p \leq \frac{K^p||u_n-u||^p_{L^p(\Omega)} + ||Au||^p_{L^q(\Omega)} + o_1(1)^p}{||u_n-u||^p_{L^p(\Omega)} + ||u||^p_{L^p(\Omega)} + o(1)^p} \tag{1.16}$$

note que, pela desigualdade de Minkowski, temos

$$||u_n-u||_{L^p(\Omega)} \leq ||u_n||_{L^p(\Omega)} + ||u||_{L^p(\Omega)} \leq C + ||u||_{L^p(\Omega)}$$

e como $u \in L^p$ então $\left(||u_n-u||_{L^p(\Omega)}\right)_n$ é limitada, então, a menos de uma subsequência vale que $||u_n-u||_{L^p(\Omega)} \to t_* \geq 0$ e como $o_1(1) \to 0$, $o(1) \to 0$ e $R(u_n)^p \to K^p$ quando $n \to \infty$. Portanto, fazendo $n \to \infty$ em (1.16) obtemos:

$$K^p \leq \frac{||Au||^p_{L^q(\Omega)} + k^p t_*^p}{||u||^p_{L^p(\Omega)} + t_*^p}$$

então

$$\left(||u||^p_{L^p(\Omega)} + t_*^p\right) K^p \leq ||Au||^p_{L^q(\Omega)} + k^p t_*^p$$

segue

$$||u||^p_{L^p(\Omega)} k^p + t_*^p k^p \leq ||Au||^p_{L^q(\Omega)} + k^p t_*^p$$

isto é,

$$||u||^p_{L^p(\Omega)} k^p \leq ||Au||^p_{L^q(\Omega)}$$

ou ainda

$$R(u) = \frac{||Au||_{L^q(\Omega)}}{||u||_{L^p(\Omega)}} \geq K$$

portanto $R(u) = K$. *Isto é,* $||Au||_{L^q(\Omega)} = K||u||_{L^p(\Omega)}$.

$\blacksquare$

Vamos considerar outro problema, porém dessa vez de minimização. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $\lambda \geq 0$ e

$$R_\lambda(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2}{||u||^2_{L^p(\Omega)}} \quad com \quad p = 2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad p \geq 2$$

o problema é mostrar que $K_\lambda = \inf \{R_\lambda(u)/u \in H^1_0(\Omega), u \neq 0\}$ é alcançado. A proposição abaixo resolve este problema de minimização.

Proposição 1.3.2 *Se* $K_\lambda < K_0$ *então* K_λ *é alcançado, onde*

$$K_0 = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{||u||^2_{L^p(\Omega)}} / u \in H^1_0(\Omega), u \neq 0 \right\}$$

Demonstração 5 *Seja* (u_n) *uma sequência minimizante com* $||u_n||_{L^p(\Omega)} = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Como* $R_\lambda(u_n) \to K_\lambda$ *então* $(R_\lambda(u_n))_n$ *é limitada, logo existe* $M > 0$ *tal que* $|R_\lambda(u_n)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *então vale que*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 \leq \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

logo

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq M + \lambda \int_\Omega |u_n|^2 \tag{1.17}$$

note que $|u_n|^2 \in L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$ *pois*

$$\int_\Omega \left||u_n|^2\right|^{\frac{p}{2}} = \int_\Omega |u_n|^p = ||u_n||^p_{L^p(\Omega)} = 1$$

além disso, $v = 1 \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$, $\dfrac{2}{p} + \dfrac{p-2}{p} = 1$. *Pela desigualdade de Hölder, obtemos*

$$\int_\Omega |u_n|^2 = \int_\Omega |u_n|^2 v \leq \left(\int_\Omega |u_n|^p\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_\Omega |v|^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}$$

ou ainda

$$\int_\Omega |u_n|^2 \leq ||u_n||^2_{L^p(\Omega)} |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} < \infty$$

com isso, de (1.17) concluímos que (u_n) *é limitada em* $H^1_0(\Omega)$ *então podemos obter uma subsequência (ainda denotada por* u_n*) tal que*

(I) $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H^1_0(\Omega)$

(II) $u_n \to u$ *em* $L^2(\Omega)$

(III) $u_n \to u$ *q.t.p em* Ω

sendo $H^1_0(\Omega)$ *espaço de Banach reflexivo e pelo Teorema de Kakutani temos (I). Como a imersão* $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *é compacta, então vale (II). Finalmente, pelo Teorema de Vainberg obtemos (III). Temos*

$$R(u_n) = K_\lambda + o(1)$$

i.é,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 = K_\lambda + o(1)^2$$

pela definição de K_0 *temos*

$$K_0 \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2}{||u_n||^2_{L^p(\Omega)}}$$

segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \geq K_0 ||u_n||^2_{L^p(\Omega)} = K_0$$

logo temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - K_\lambda \geq K_0 - K_\lambda$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \lambda \int_\Omega |u_n|^2 + o(1)^2 \geq K_0 - K_\lambda$$

fazendo $n \to \infty$, temos

$$\lambda \int_\Omega |u|^2 \geq K_0 - K_\lambda > 0$$

assim sendo $u \neq 0$. Por outro lado, seja $v_n = u_n - u$, tem-se

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 = K_\lambda ||u_n||^2_{L^p(\Omega)} + 0(1)^2 \tag{1.18}$$

observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 = \int_\Omega |\nabla (u_n - u)|^2 &= \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 \\ &= \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - 2\nabla u_n \nabla u + |\nabla u|^2\right) \\ &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + \int_\Omega |\nabla u|^2\end{aligned}$$

e desde que $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1_0(\Omega)$, i.é, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1_0(\Omega)$, então podemos escrever:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 + o(1) \\ &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2 + o(1)\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \int_\Omega |\nabla v_n|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 + o(1) \tag{1.19}$$

logo de (1.18) e (1.19) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 = K_\lambda ||u_n||^2_{L^p(\Omega)} + o(1)^2 \tag{1.20}$$

como

$$K_0 \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v_n|^2}{||v_n||^2_{L^p(\Omega)}}$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \geq K_0||v_n||^2_{L^p(\Omega)} \tag{1.21}$$

de (1.20) e (1.21), vem

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + K_0||v_n||^2_{L^p(\Omega)} - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 \leq K_\lambda ||u_n||^2_{L^p(\Omega)} + o(1)^2 \tag{1.22}$$

pelo Teorema 1.2.1, obtemos

$$||u_n||^p_{L^p(\Omega)} = ||u||^p_{L^p(\Omega)} + ||v_n||^p_{L^p(\Omega)} + o(1)^p$$

desde que $p \geq 2$, temos $p/2 \leq 1$, segue da desigualdade (1.13) que

$$\begin{aligned}\Big(||u_n||^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{2}{p}} &= \Big(||u||^p_{L^p(\Omega)} + ||v_n||^p_{L^p(\Omega)} + o(1)^2\Big)^{\frac{2}{p}} \\ &\leq \Big(||u||^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{2}{p}} + \big(||v_n||_{L^p(\Omega)}\big)^{\frac{2}{p}} + \big(o(1)^2\big)^{\frac{2}{p}}\end{aligned}$$

logo

$$||u_n||^2_{L^p(\Omega)} \leq ||u||^2_{L^p(\Omega)} + ||v_n||^2_{L^p(\Omega)} + o(1)^2. \tag{1.23}$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)} \tag{1.24}$$

esta afirmação conclui a prova da proposição. Consideramos dois casos:

(1) $K_\lambda > 0$

(2) $K_\lambda \leq 0$

para o caso (1), de (1.23), temos

$$K_\lambda ||u_n||^2_{L^p(\Omega)} \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)} + K_\lambda ||v_n||^2_{L^p(\Omega)} + o(1)^2 \tag{1.25}$$

combinando (1.22) e (1.25), obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + K_0||v_n||^2_{L^p(\Omega)} - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)} + K_\lambda ||v_n||^2_{L^p(\Omega)} + o(1)^2$$

fazendo $n \to \infty$ *teremos* $||v_n||^2_{L^p(\Omega)} = ||u_n - u||^2_{L^p(\Omega)} \to t_*^2$ *e então*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + K_0 t_*^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)} + K_\lambda t_*^2$$

logo

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)} + (K_\lambda - K_0)\, t_*^2 \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)}$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)}$$

para o caso (2), pelo lema de Fatou temos $||u||_p \leq 1 = ||u_n||_{L^p(\Omega)}$ *segue* $||u||^2_{L^p(\Omega)} \leq ||u_n||^2_{L^p(\Omega)}$ *logo*

$$K_\lambda ||u_n||^p_{L^p(\Omega)} \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)} \tag{1.26}$$

de (1.22) e (1.26) vem

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)} + o(1)^2$$

fazendo $n \to \infty$*, obtemos*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 \leq K_\lambda ||u||^2_{L^p(\Omega)}$$

portanto em qualquer caso vale (1.24). Então

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2}{||u||^2_{L^p(\Omega)}} \leq K_\lambda$$

ou seja, pela definição de K_λ *segue* $K_\lambda \leq R_\lambda(u) \leq K_\lambda$*. Portanto* $R_\lambda(u) = K_\lambda$*.*

$\blacksquare$

Capítulo 2

O lema de Brezis-Lieb sem a convergência pontual

Em aplicações concretas, a convergência $q.t.p$ pode ser difícil de verificar, enquanto a condição de convergência fraca raramente apresenta dificuldades, uma vez que $L^p(\Omega, \mu)$ com $p \in (1, \infty)$ é reflexivo e qualquer subsequência limitada nesse espaço tem uma subsequência fracamente convergente. Assim é natural perguntar quais os possíveis análogos do Teorema 1.2.1 podem existir para sequências em $L^p(\Omega, \mu)$ que não necessariamente convergem $q.t.p$.

Com essa motivação, este capitulo apresenta alguns resultados análogos do lema de Brezis-Lieb sem a hipótese de convergência quase em todo ponto. Na Seção 2, mostre-se a importância da restrição de $p \geq 3$ no teorema 2.1.1.

2.1 Preliminares

Um análogo imediato é dado pela fraca semicontinuidade da norma, a saber se $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$ então

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq \liminf ||u_n||_{L^p(\Omega)}$$

segue que

$$\liminf ||u||^p_{L^p(\Omega)} \leq \liminf ||u_n||^p_{L^p(\Omega)}$$

isto é

$$\liminf \left(||u||^p_{L^p(\Omega)} - ||u_n||^p_{L^p(\Omega)} \right) \leq 0$$

ou ainda

$$\limsup\left(||u_n||^p_{L^p(\Omega)} - ||u||^p_{L^p(\Omega)}\right) \geq 0$$

que podemos escrever como

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu \geq \int_\Omega |u|^p d\mu + o(1)$$

mas essa desigualdade não diz muito já que ela não leva em conta a norma do restante $u_n - u$. Por outro lado existem alguns casos em que o Teorema 1.2.1 se sustenta apenas sob a hipótese de convergência fraca. Uma é quando Ω é um conjunto enumerável munido com a medida da contagem, porque neste caso convergência pontual segue da convergência fraca. Outro é o caso $p = 2$ quando a conclusão do Teorema 1.2.1 se mantém mesmo se a convergência $q.t.p$ não é assumido. Isso decorre de uma relação elementar do espaço de Hilbert que de $u_n \rightharpoonup u$ implica em

$$\begin{aligned} ||u_n||^2_{L^2(\Omega)} &= ||u_n - u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)} - 2\langle u_n - u, u\rangle \\ &= ||u_n - u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)} + o(1) \end{aligned}$$

já que ambos os exemplos a norma satisfaz a condição Opial. Seria tentador conjecturar que a condição de convergência $q.t.p$ pode ser eliminada sempre que a condição Opial se mantiver, ou no caso de espaço de Banach estritamente convexo Ω com mapa de dualidade de valor único, sempre que a seguinte condição: $u_n \rightharpoonup 0$ em $\Omega \implies u_n^* \rightharpoonup 0$ o que implica a condição Opial (ver [12]). No entanto, como é mostrado no corolário abaixo, (a saber, corolário (2.2.2)) abaixo a condição $p \geq 3$, a qual não tem nada a ver com a condição Opial ou mapeamento de dualidade, não pode ser ignorada. A condição $|u_n - u|^{p-2}(u_n - u) \rightharpoonup 0$ no Teorema 2.1.1 não é arbitrária, mas é uma suposição de convergência fraca de mapeamento de dualidade que pode ser equivalente a $(u_n - u)^* \rightharpoonup 0$. Para provarmos o Teorema 2.1.1 precisamos do seguinte lema.

Lema 2.1.1 *Vale a seguinte desigualdade*

$$(1+t)^p \geq 1 + |t|^p + p|t|^{p-2}t + pt \tag{2.1}$$

Demonstração 6 *Esta desigualdade é equivalente às desigualdades*

$$f_+(t) = (1+t)^p - 1 - t^p - pt^{p-1} - pt \geq 0, \qquad t \geq 0 \tag{2.2}$$

e, assumindo sem qualquer restrição (tendo em vista a simetria da fórmula) que $|t| \leq 1$

$$f_-(t) = (1-t)^p - 1 - t^p + pt^{p-1} + pt \geq 0 \qquad t \in [0,1] \tag{2.3}$$

para provar (2.1) basta provar as desigualdades (2.2) e (2.3). Para prová-las, note que ambas as funções se anulam em $t = 0$*, então é suficiente mostrar que suas derivadas não são negativas. Segue:*

$$f'_+(t) = p(1+t)^{p-1} - pt^{p-1} - p(p-1)t^{p-2} - p$$

ou seja,

$$\frac{1}{p} f'_+(t) = (1+t)^{p-1} - t^{p-1} - (p-1)t^{p-2} - 1$$

que também se anula em $t = 0$*, logo é suficiente mostrar que sua derivada é não-negativa. Ou seja,*

$$\frac{1}{p} f''_+(t) = (p-1)(1+t)^{p-2} - (p-1)t^{p-2} - (p-1)(p-2)t^{p-3} \geq 0$$

ou ainda,

$$\frac{1}{p(p-1)} f''_+(t) = (1+t)^{p-2} - t^{p-2} - (p-2)t^{p-3} \geq 0$$

ponhamos $s = t^{-1}$ *e* $q = p - 2$*. Então*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(p-1)} f''_+(s^{-1}) &= (1+s^{-1})^q - (s^{-1})^q - q(s^{-1})^{q-1} \\
&= \left(\frac{s+1}{s}\right)^q - \frac{1}{s^q} - q\frac{1}{s^{q-1}} \\
&= \frac{(s+1)^q s^{-1} - s^{-1} - q}{s^{q-1}}
\end{aligned}$$

logo

$$\frac{s^{q-1}}{p(p-1)} f''_+(s^{-1}) = (s+1)^q s^{-1} - s^{-1} - q$$

que implica

$$\frac{s^{q-1}s}{p(p-1)} f''_+(s^{-1}) = (s+1)^q - 1 - qs$$

note que $j(s) = (1+s)^q$ *com* $q \geq 1$ *e* $s \geq 1$ *é convexa. De fato,* $j'(s) = q(1+s)^{q-1}$, *então* $j''(s) = q(q-1)(1+s)^{q-2} \geq 0$.*Por convexidade temos que*

$$\frac{s^{q-1}s}{p(p-1)} f''_+(s^{-1}) = (s+1)^q - 1 - qs \geq 0$$

logo $f''_+ \geq 0$ *como queríamos. Agora, considere a derivada* f_-*:*

$$\frac{1}{p} f'_-(t) = -(1-t)^{p-1} - t^{p-1} + 1 + (p-1)t^{p-2}$$

resta notar que

$$(1-t)^{p-1} + t^{p-1} \leq 1$$

portanto $f'_-(t) \geq 0$.

$\blacksquare$

Teorema 2.1.1 *Sejam* (Ω, μ) *um espaço de medida e* $3 \leq p \leq \infty$. *Suponhamos que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^p(\Omega, \mu)$ *e* $|u_n - u|^{p-2}(u_n - u) \rightharpoonup 0$ *em* $L^q(\Omega, \mu)$, $1/p + 1/q = 1$. *Então*

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu \geq \int_\Omega |u|^p d\mu + \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu + o(1). \tag{2.4}$$

Demonstração 7 *Pela Lema 2.1.1 tem-se*

$$|1+t|^p \geq 1 + |t|^p + p|t|^{p-2}t + pt \qquad |t| \leq 1 \tag{2.5}$$

pondo $t = \dfrac{u_n - u}{u}$ *para* $u \neq 0$ *segue*

$$\left|1 + \frac{u_n - u}{u}\right|^p \geq 1 + \left|\frac{u_n - u}{u}\right|^p + p\left|\frac{u_n - u}{u}\right|^{p-2}\left(\frac{u_n - u}{u}\right) + p\left(\frac{u_n - u}{u}\right)$$

então

$$\left|\frac{u_n}{u}\right|^p \geq 1 + \frac{|u_n - u|^p}{|u|^p} + p\frac{|u_n - u|^{p-2}}{|u|^{p-1}}(u_n - u) + p\frac{|u_n - u|}{|u|}$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
|u_n|^p &\geq |u|^p + |u_n - u|^p + p|u||u_n - u|^{p-2}\,(u_n - u) + p|u|^{p-1}(u_n - u) \\
&\geq |u|^p + |u_n - u|^p + p|u||u_n - u|^{p-2}\,(u_n - u) + p|u|^{p-2}|u|(u_n - u)
\end{aligned}
$$

portanto

$$
|u_n|^p \geq |u_n - u|^p + |u|^p + p|u|^{p-2}u(u_n - u) + p|u_n - u|^{p-2}(u_n - u)u \qquad (2.6)
$$

logo

$$
\int_\Omega |u_n|^p \;\; \geq \int_\Omega |u_n - u|^p + \int_\Omega |u|^p + p\int_\Omega |u|^{p-2}u(u_n - u) + p\int_\Omega |u_n - u|^{p-2}(u_n - u)u
$$

pela hipótese segue que

$$
u_n - u \rightharpoonup 0 \quad em \quad L^p(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega (u_n - u)v d\mu \to 0 \quad \forall v \in L^q(\Omega)
$$

além disso, temos:

$$
\int_\Omega |u_n - u|^{p-2}(u_n - u)w d\mu \to 0 \quad \forall w \in L^p(\Omega)
$$

posto isso, note que $u \in L^p(\Omega)$ *e vale*

$$
\int_\Omega \left||u|^{p-2}u\right|^q d\mu = \int_\Omega (|u|^{p-2}|u|)^q d\mu = \int_\Omega |u|^{(p-1)q} d\mu = \int_\Omega |u|^p d\mu < \infty
$$

portanto $|u|^{p-2}u \in L^q(\Omega)$. *Logo*

$$
\int_\Omega |u_n|^p d\mu \geq \int_\Omega |u|^p d\mu + \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu + o(1).
$$

■

Teorema 2.1.2 *Sejam* (Ω, Σ, μ) *um espaço de medida e* $3 \leq p \leq \infty$ *e* $m \in \mathbb{N}$. *Suponhamos que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^m)$ *e* $|u_n - u|^{p-2}(u_n - u) \rightharpoonup 0$ *em* $L^q(\Omega, \mu; \mathbb{R}^m)$, $1/p + 1/q = 1$. *Então*

$$
\int_\Omega |u_n|^p d\mu \geq \int_\Omega |u|^p d\mu + \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu + o(1).
$$

Demonstração 8 *Uma vez que provamos a desigualdade*

$$F(t,\theta) = |1+t^2+2t\theta|^{\frac{p}{2}} - 1 - |t|^p - p|t|^{p-2}t\theta - pt\theta \geq 0 \quad |t| \leq 1 \ |\theta| \leq 1 \quad (2.7)$$

a demonstração do teorema seguirá de forma análoga a do teorema anterior. vamos a prova da desigualdade (2.7). Primeiramente, note que para cada $t \in [-1,1]$ *a função*

$$\begin{array}{rcl} \rho : [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & F(t,\theta) \end{array}$$

é convexa em $[-1,1]$*. Com efeito,*

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \begin{cases} p(1+t^2+2t\theta)^{\frac{p-2}{2}}t - pt^{p-1} - pt, & 0 \leq t \leq 1 \\ -p(1+t^2-2t\theta)^{\frac{p-2}{2}}t + p(-t)^{p-2}t + pt & -1 \leq t < 0 \end{cases}$$

logo, vem que:

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \begin{cases} p(p-2)(1+t^2+2t\theta)^{\frac{p-4}{2}}t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ p(p-2)(1+t^2-2t\theta)^{\frac{p-4}{2}}t^2 & -1 \leq t < 0 \end{cases}$$

então temos que $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} \geq 0$*, portanto* ρ *é convexa. Observe que*

$$\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial\theta} = \begin{cases} p(1+t^2+2t\theta)^{\frac{p-2}{2}}t - pt^{p-1} - pt, & 0 \leq t \leq 1 \\ -p(1+t^2-2t\theta)^{\frac{p-2}{2}}t + p(-t)^{p-2}t + pt & -1 \leq t < 0 \end{cases}$$

isto é, $\dfrac{\partial F(t,\theta)}{\partial\theta} \neq 0$ *para todo* $t \in [-1,1]$*. Portanto* $F(t,\theta) \geq \min\{F(t,-1), F(t,1)\}$*. Como*

$$F(t,-1) = |1+t^2-2t|^{\frac{p}{2}} - 1 - |t|^p + p|t|^{p-2} + pt = F(-t,1)$$

basta mostrar que $F(t,1) \geq 0 \quad \forall \in [-1,1]$*. Ou seja,*

$$|1+t^2+2t|^{\frac{p}{2}} - 1 - |t|^p - p|t|^{p-2}t - pt \geq 0$$
$$|(t+1)^2|^{\frac{p}{2}} - 1 - |t|^p - p|t|^{p-2}t - pt \geq 0$$

isto é,

$$|t+1|^p \leq 1 + |t|^p + p|t|^{p-2}t + pt \qquad |t| \leq 1$$

que é a desigualdade provada no lema 2.1.1. Portanto vale a desigualdade (2.7), agora pondo $t = (u_n - u)/u$ e $\theta = 1$ obtemos

$$\left|1 + \left(\frac{u_n - u}{u}\right)^2 + 2\frac{u_n - u}{u}\right|^{p/2} - 1 - \left|\frac{u_n - u}{u}\right|^p - p\left|\frac{u_n - u}{u}\right|^{p-2}\frac{u_n - u}{u} - p\frac{u_n - u}{u} \geq 0$$

ou seja

$$\left|\left(\frac{u_n - u}{u} + 1\right)^2\right|^{p/2} \geq 1 + \left|\frac{u_n - u}{u}\right|^p + p\left|\frac{u_n - u}{u}\right|^{p-2}\frac{u_n - u}{u} + p\frac{u_n - u}{u}$$

isto é,

$$\left|\frac{u_n}{u}\right|^p \geq 1 + \left|\frac{u_n - u}{u}\right|^p + p\left|\frac{u_n - u}{u}\right|^{p-2}\frac{u_n - u}{u} + p\frac{u_n - u}{u}$$

assim como na demonstração 7 implica na desigualdade (2.6) e procedemos da mesma forma.

$\blacksquare$

Escrevendo o enunciado do teorema 2.1.2 em termos de gradientes de funções e observado que $|\nabla u_n - \nabla u|^{p-2}(\nabla u_n - \nabla u) \rightharpoonup 0$ em $L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$ pode ser reescrito em termos de Δ_p como $-\Delta_p(u_n - u) \rightharpoonup 0$ no sentido de distribuições. Temos:

Corolário 2.1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, $N \in \mathbb{N}$ e $3 \leq p < \infty$. Suponha que $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ em $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ e $-\Delta_p(u_n - u) \rightharpoonup 0$ no sentido das distribuições. Então*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p dx + o(1).$$

2.2 Convergência fraca de composições

Seja $p \in (1, \infty)$. É possível construir uma sequência $u_n \rightharpoonup 0$ em $L^p([0,1])$ tal que $|u_n|^{q-1}u_n$ tem limite fraco diferente de zero em $L^{p/q}([0,1])$ para qualquer $q \in (1, p]$. Consideramos aqui um caso mais geral, comparando limites fracos de sequências da forma $\varphi(u_n)$ com diferentes funções ímpares φ.

Nos concentramos aqui apenas no espaço de medida $[0,1]$ munido com a medida de Lebesgue, mas o argumento pode ser facilmente adaptado para domínios em $\mathbb{R}^N$. Seja $T_n u(x) = u(nx)$ para $x \in [0,1/n]$, $n \in \mathbb{N}$ estendendo periodicamente para o resto do intervalo $[0,1]$.

Lema 2.2.1 *Se $u \in L^p([0,1])$, $1 < p < \infty$, então $T_n u \rightharpoonup \int_{[0,1]} u dx$ em $L^p([0,1])$.*

Demonstração 9 *Primeiramente, observe que*

$$||T_n u||_p^p = \int_{[0,1]} |T_n u|^p dx = \int_{[0,1]} |u|^p dx = ||u||_p^p$$

e portanto $||T_n u||_p = ||u||_p$. Além disso, como o espaço vetorial S das funções escadas é denso em $L^q([0,1])$, onde $1/p + 1/q = 1$ (ver Proposição 1.0.1, Apêndice A) é suficiente mostrar que

$$\int_{[0,1]} T_n u \psi dx \to \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} u dx \psi dx \qquad \forall \psi \in S$$

ou ainda,

$$\int_{[0,1]} T_n u \psi dx \to \int_{[0,1]} u dx \int_{[0,1]} \psi dx \qquad \forall \psi \in S$$

isso, no entanto, segue do caso particular $\psi = 1$ que por sua vez pode ser tratado aplicando periodicamente e reescalonando a variável de integração.

$\blacksquare$

O lema anterior diz que sequências oscilatórias T_n sempre convergem fraco para funções constantes.

Lema 2.2.2 *Seja $1 < q \leq p < \infty$. Se φ é uma função com valores em $\mathbb{R}$ tal que para algum $C > 0$, $|\varphi(t)| \leq C(1 + |t|^q)$ e $u \in L^p([0,1])$ então $\varphi(T_n u) = T_n \varphi(u) \rightharpoonup \int_{[0,1]} \varphi(u(s)) ds$ em $L^{\frac{p}{q}}([0,1])$.*

Demonstração 10 *Seja u uma função escada com valores t_i em intervalos de comprimentos m_i com $i = 1, \cdots, M$. Observe que*

$$\int_{[0,1]} |\varphi(u)|^p dx \leq \int_{[0,1]} [C(1 + |u|^q)]^p dx = ||C(1 + |u|^q)||_p^p$$

segue que

$$||\varphi(u)||_p \leq ||C + C||u||^q||_p \leq ||C||_p + C\,\||u|^q\|_p \leq C + C\,\||u|^q\|_p < \infty$$

o que nos diz que $\varphi(u) \in L^P([0,1])$. *Pelo Lema 2.2.1, temos*

$$\varphi(T_n u) = T_n\varphi(u) \rightharpoonup \int_{[0,1]} \varphi(u)dx \qquad em \quad L^r([0,1]), \quad \forall r \in [1,\infty)$$

como

$$\int_{[0,1]} \varphi(u)dx = \sum_{i=1}^{\infty} m_i\varphi(t_i) = 0$$

então $\varphi(T_n u) \rightharpoonup 0$. *O resultado segue então, da densidade das funções escadas em* $L^{p/q}$ *(ver Proposição 1.0.1, Apêndice A).*

■

Teorema 2.2.1 *Seja* $\varphi_i, i = 1, \cdots, M$, *funções continuas* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *impar para cada* $i \neq M$, *e suponha que para algum* $q \geq 1$, $C > 0$, $|\varphi_i(t)| \leq C(1 + |t|^p)$, $i = 1, \cdots, M$. *Se para cada sequência* $u_n \in L^\infty([0,1])$, *tal que* $\varphi_i(u_n) \rightharpoonup 0$ *em* $L^1([0,1])$, $i = 1, \cdots, M-1$ *e também* $\varphi_M(u_n) \rightharpoonup 0$ *em* $L^1([0,1])$, *então as funções* $\{\varphi_i\}_{i=1,\cdots,M}$ *são linearmente dependentes.*

Demonstração 11 *Seja* $\psi \geq 1$ *uma função continua de lipschitz em* $[-a,a] \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *e seja* u *a solução da equação*

$$v'(t) = \frac{\gamma}{\psi(u(t))}, \quad u(0) = -a$$

com o valor de $\gamma = \gamma(\psi) > 0$ *definido para satisfazer* $u(1) = a$. *Tal* γ *sempre existe, desde que* $u'(t) \leq \gamma$ *e portanto* $u(1) \leq -a + \gamma$ *e por outro lado,*

$$u(1) \geq -a + \frac{1}{\varphi(-a) + L(v(1) + a)}$$

onde L *é a constante de lipschitz para* ψ *e portanto* $v(1)$ *é uma função continua de* $\gamma \in (0,\infty)$ *com intervalo* $(-a, +\infty)$. *Pelo lema 2.2.2, temos*

$$\varphi_i(T_k u) \rightharpoonup \int_{[0,1]} \varphi_i(u(s))ds = \gamma^{-1}\int_{[-a,a]} \varphi_i(t)\psi(t)dt \tag{2.8}$$

com convergência fraca em $L^p([0,1])$ para qualquer $p \geq 1$. Consideramos agora o fecho de Y em $L^2([-a,a])$ do intervalo de todas as funções continuas limitadas positivas ψ em $[-a,a]$, tal que $\langle \varphi_i, \varphi \rangle_{L^2([-a,a])} = 0$, $i = 1, \cdots, M-1$. Note que Y contém todas as funções positivas e, portanto, não é trivial. Além disso, Y é o complemento ortogonal de $\{\varphi\}_{i=1,\cdots,M-1}$ em L^2. De fato, qualquer função pode ser aproximado por uma função limitada neste comportamento ortogonal e adicionar uma grande constante a esta ultima faz dela uma função positiva ortogonal a $\{\varphi\}_{i=1,\cdots,M-1}$. Por suposição segue de (2.8) que $\varphi_M \perp Y$ e consequentemente pertence ao intervalo de $\varphi_1, \cdots, \varphi_{M-1}$ como funções em $[-a,a]$. Como o valor de $a > 0$ é arbitrário, podemos concluir (assumindo sem perda de generalidade que $\varphi_1, \cdots, \varphi_{M-1}$ são linearmente independentes, de modo os coeficientes na expansão de φ_M como combinação linear de $\varphi_1, \cdots, \varphi_{M-1}$ são únicos). As funções $\varphi_1, \cdots, \varphi_M$ são linearmente dependente como funções em $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Corolário 2.2.1 *Seja φ_i, $i = 1.\cdots, M$ funções continuas, não-nulas, linearmente independentes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impar para cada $i \neq M$, e suponha que para algum $q \geq 1$, $C > 0$, $|\varphi_i(t)| \leq C\,(1 + |t|^q)$, $i = 1, \cdots, M$. Existe uma sequência $v_n \in L^\infty([0,1])$, tal que $\varphi_i(v_n) \rightharpoonup 0$ em $L^1([0,1])$, $i = 1, \cdots, M-1$ enquanto houver $\alpha \neq 0$ tal que $\varphi_M(v_n) \rightharpoonup \alpha$. Se as funções φ_i, $i = 1, \cdots, M$, são C^1 por partes e linearmente independentes em qualquer intervalo, e φ_M muda de sinal, a sequência v_n pode ser escolhida de modo que $\alpha < 0$.*

Demonstração 12 *A primeira afirmação segue do Teorema 2.2.1. Agora, tendo em vista o Lema 2.2.2, que cada $v \in L^\infty([0,1])$, tal que*

$$\varphi_i(T_n v) = T_n \varphi_i(v) \rightharpoonup \int_{[0,1]} \varphi_i(v(s))ds \qquad i = 1, \cdots, M-1$$

suponha, por absurdo, que

$$\alpha = \int_{[0,1]} \varphi_M(v(s))ds \geq 0$$

portanto, temos

$$\inf_{\int_{[0,1]} \varphi_i(v(s))ds = 0,\ i=1,\cdots,M-1} \int_{[0,1]} \varphi_M(v(s))ds = 0. \tag{2.9}$$

Vamos mostrar que existe uma função v_0, não-nula, limitada tal que

$$\int_{[0,1]} \varphi_M(v_0(s))ds = 0.$$

Com efeito, seja $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_M(a) < 0 < \varphi_M(b)$$

por continuidade, existe $\epsilon > 0$ tal que para quaisquer função v e w tais que

$$||v - a||_\infty < \epsilon \quad e \quad ||w - b||_\infty < \epsilon$$

então teremos $\varphi_M(v) < 0$ e $\varphi_M(w) > 0$. Fixe quaisquer $v.w \in C^1$ cujas as derivadas são linearmente independentes. Então a função

$$\theta \mapsto \int_{[0,1]} \varphi_M(\theta v + (1-\theta)w) \quad \theta \in [0,1]$$

muda de sinal. Pelo teorema do valor intermediário, existe $\theta_0 \in (0,1)$ tal que

$$\int_{[0,1]} \varphi_M(\theta_0 v + (1-\theta_0)w) = 0$$

a função $v_0 = \theta_0 v + (1-\theta_0)w$ não será constante pela suposição da independência linear. Então v_0 é o ponto de mínimo de (2.9) pelo método de multiplicadores de Lagrange existem números reais $\lambda_1, \cdots, \lambda_{M-1}$ tais que para qualquer t perto de v_0 onde φ_i são diferenciáveis, escrevemos

$$\varphi'_M(t) = \lambda_1\varphi'_1(t) + \cdots + \lambda_{M-1}\varphi'_{M-1}(t)$$

desde que $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_M\}$ é linearmente dependente e C^1 por partes. Contradição.

■

Corolário 2.2.2 *Seja $\Omega = [0,1]$, munido com a medida de Lebesgue. Então para qualquer $p \in [1,3)$, $p \neq 2$ existe uma sequência $v_n \in L^\infty([0,1])$ tal que $v_n \rightharpoonup 0$ em $L^p([0,1])$, $|v_n|^{p-2}v_n \rightharpoonup 0$ em $L^q([0,1])$, mas a relação (2.5) com $u_n = 1 + v_n$ não vale.*

Demonstração 13 *Sejam* $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = |t|^{p-2}t$ *e* $\varphi_3(t) = |1+t|^p - 1 - |t|^p$ *funções* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuas. Note que* $\varphi_1(-t) = -t = -\varphi_1(t)$ *e* $\varphi_2(-t) = |-t|^{p-2}(-t) = -|t|^{p-2}t = -\varphi_2(t)$ *logo* φ_1 *e* φ_2 *são impares e se* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tavs que*

$$a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t) + c\varphi_3(t) = 0$$

ou seja

$$at + b|t|^{p-2}t + c|1+t|^p - c - c|t|^p = 0$$

o que implica em $a = b = c = 0$. *Portanto* $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *é linearmente independente. Além disso, seja* $q \geq 1$ *tal que* $1/p + 1/q = 1$, *segue:*

$$|\varphi_1(t)| = |t| \leq 1 + |t|$$

também temos

$$\begin{aligned}|\varphi_2(t)| &= \left||t|^{p-2}t\right| = |t|^{p-1} \leq 1 + |t|^{p-1} \\ &\leq \left(1 + |t|^{p-1}\right)^q \leq \left(2 \sup\left\{1, |t|^{p-1}\right\}\right)^q\end{aligned}$$

então

$$|\varphi_2(t)| \leq 2^q \sup\left\{1, |t|^{p-1}\right\}^q \leq 2^q\left(1 + |t|^{(p-1)q}\right) \leq 2^q(1 + |t|^p)$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}|\varphi_3(t)| &= ||1+t|^p - 1 - |t|^p| \leq |1+t|^p \leq (1+|t|)^p \\ &\leq (2\sup\{1, |t|\})^p \leq 2^p\left(1 + |t|^p\right)\end{aligned}$$

portanto, pelo Corolário 2.2.1, existe $v_n \in L^\infty([0,1])$ *tal que* $\varphi_1(v_n) \rightharpoonup 0$ *em* $L^1([0,1])$ *e* $\varphi_2(v_n) \rightharpoonup 0$ *em* $L^1([0,1])$, *ou seja,* $v_n \rightharpoonup 0$ *em* $L^1([0,1])$ *e* $|v_n|^{p-2}v_n \rightharpoonup 0$ *em* $L^1([0,1])$. *Ponhamos* $u_n = 1 + v_n$ *então temos* $u_n \rightharpoonup 1$ *em* $L^1([0,1])$ *e* $|u_n - 1|^{p-2}(u_n - 1) \rightharpoonup 0$ *em* $L^1([0,1])$ *mas*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n|^p d\mu &= ||1 + v_n||_p^p \leq (||1||_p + ||v_n||_p)^p \\ &\leq (\mu([0,1]) + ||u_n - 1||_p)^p\end{aligned}$$

ou seja

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu \leq \left(\int_\Omega |u|^p d\mu + \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu \right)^p$$

portanto (2,4) não vale para $p \in [1,3)$ *com* $p \neq 2$.

■

2.3 Uma versão do lema de Brezis-Lieb

Na seção anterior, observamos que, a grosso modo, que os limites fracos de $\varphi_i(u_k)$ para funções linearmente independentes φ_i têm valores independes e que a desigualdade

$$\int_{[0,1]} \varphi_M(v_k) \geq o(1)$$

vale para todos as sequências satisfazendo $\varphi_i \rightharpoonup 0$, $i = 1, \cdots, M$ somente se

$$\varphi_M(t) - \sum_{i=1}^{M-1} \lambda_i \varphi_i(t) \geq 0$$

para alguns reais $\lambda_1, \cdots, \lambda_M$. Portanto, pode-se usar a condição $\Phi(v_k) \rightharpoonup 0$ com $\Phi(t) = \sum_{i=1}^{M-1} \lambda_i \varphi_i(t)$. Em particular, a função $F_p(t) = |1+t|^p - 1 - |t|^p$, $p \geq 2$ domina as seguintes funções $\Phi(t) = pt$ para $|t| \leq 1$ e $\Phi(t) = p|t|^{p-2}t$ para $|t| > 1$.

Teorema 2.3.1 *Seja* (Ω, Σ, μ) *um espaço de medida e seja* $p \geq 2$. *Suponha que* $u_n \in L^p(\Omega, \mu)$, $u \in L^p(\Omega, \mu)$ *e* $\Psi(u, u_n - u) \rightharpoonup 0$ *em* $L^1(\Omega, \mu)$, *onde*

$$\Psi(s,t) = \begin{cases} |s|^{p-1}t, & |t| \leq |s| \\ |s||t|^{p-2}t, & |t| > |s| \end{cases}$$

então

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu \geq \int_\Omega |u|^p d\mu + \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu + o(1)$$

Demonstração 14 *Tomando* $\lambda = \dfrac{u_n - u}{u}$ *para* $u \neq 0$*, da discussão anterior, vale a desigualdade*

$$F_p(\lambda) \geq \Phi(\lambda) \tag{2.10}$$

como

$$F_p(\lambda) = \left|1 + \frac{u_n - u}{u}\right|^p - 1 - \left|\frac{u_n - u}{u}\right|^p$$

temos

$$F_p(\lambda) = \frac{|u_n|^p}{|u|^p} - 1 - \frac{|u_n - u|^p}{|u|^p} = \frac{|u_n|^p - |u|^p - |u_n - u|^p}{|u|^p}$$

como $|\lambda| = \left|\dfrac{u_n - u}{u}\right|$ *então* $|\lambda| \leq 1$ *desde que* $|u_n - u| \leq |u|$*. Nesse caso,* $\Phi(\lambda) = p\dfrac{u_n - u}{u}$*. da desigualdade (2.10), vem*

$$\frac{|u_n|^p - |u|^p - |u_n - u|^p}{|u|^p} \geq p\frac{u_n - u}{u}$$

então

$$|u_n|^p - |u|^p - |u_n - u|^p \geq p|u|^p\frac{u_n - u}{u} \geq |u|^{p-1}(u_n - u)$$

desde que $|u_n - u| \leq |u|$*, isto é,*

$$|u_n|^p - |u|^p - |u_n - u|^p \geq \Psi(u, u_n - u)$$

por outro lado, tem-se $|\lambda| > 1$ *desde que* $|u_n - u| > |u|$ *logo* $\Phi(\lambda) = p\left|\dfrac{u_n - u}{u}\right|^{p-2}\dfrac{u_n - u}{u}$*. Pela desigualdade (2.10), temos*

$$\frac{|u_n|^p - |u|^p - |u_n - u|^p}{|u|^p} \geq p\left|\frac{u_n - u}{u}\right|^{p-2}\frac{u_n - u}{u}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}|u_n|^p - |u|^p - |u_n - u|^p &\geq p|u|^p\frac{|u_n - u|^{p-2}}{|u|^{p-2}}\frac{u_n - u}{u} \\ &\geq p\frac{|u|^p}{|u|^{p-1}}|u_n - |^{p-2}(u_n - u)\end{aligned}$$

então

$$|u_n|^p - |u|^p - |u_n - u|^p \geq |u||u_n - u|^{p-2}(u_n - u)$$

desde que $|u_n - u| > |u|$*, ou seja*

$$|u_n|^p - |u|^p - |u_n - u|^p \quad \geq \Psi(u, u_n - u) \tag{2.11}$$

em qualquer caso, vale (2.11), portanto

$$|u_n|^p \quad \geq |u|^p + |u_n - u|^p + \Psi(u, u_n - u)$$

integrando ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu \geq \int_\Omega |u|^p d\mu + \int_\Omega |u_n - f|^p d\mu + \int_\Omega \Psi(u, u_n - u) d\mu$$

por hipótese, temos $\Psi(u, u_n - u) \rightharpoonup 0$ *em* $L^1(\Omega)$ *portanto podemos escrever*

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu \geq \int_\Omega |u|^p d\mu + \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu + o(1)$$

■

Considerações Finais

Com a discussão apresentada no decorrer deste trabalho, observamos que, com o exemplo de um problema, Weierstrass mostrou que o principio de Dirichlet falhava quando há ausência de compacidade. Sabemos que não ter compacidade, foi uma fonte de dificuldades para os matemáticos da época para resolver problemas variacionais. Nessa perspectiva, esse trabalho teve como objetivo apresentar uma ferramenta - Lema de Brezis-Lieb - útil para encontrar funções minimizadoras ou maximizadores onde não temos compacidade.

Não apenas isso, mostramos como esse resultado é utilizado com dois problemas, um de minimização e outro de maximização. No decorrer dos anos, outros matemáticos apresentaram versões do Lema de Brezis-Lieb com o objetivo de melhorar o resultado. Dessa forma, no Capitulo 2 deste trabalho, apresentamos uma versão do lema de Brezis-Lieb sem a hipótese da convergência pontual o qual afirma em particular: se $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$ e $|u_n - u|^{p-2}(u_n - u) \rightharpoonup 0$ em $L^q(\Omega)$ com $p \geq 3$ e p e q conjugados então

$$\int_\Omega |u_n|^p d\mu \geq \int_\Omega |u|^p d\mu + \int_\Omega |u_n - u|^p d\mu + o(1)$$

Apesar de ter uma versão sem a hipótese de convergência $q.t.p$, a restrição para p é necessária (Corolário 2.2.2) mas delicada haja vista as aplicações relevantes onde recaímos nos espaços $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < 3$. Portanto é natural perguntar se é possível obtemos uma versão do Lema de Brezis-Lieb sem a hipótese de convergência pontual e sem uma restrição para p.

Apêndice A

Noções de Medida e Integração

Neste apêndice, apresentaremos uma revisão de Teoria da Medida e Integração de Lebesgue e algumas notações que são abordadas nesse texto. Esta teoria foi desenvolvida para que se pudesse obter uma generalização do conceito de integral e dar mais rigor a operações que envolvessem limites e integrais.

Definição 1.0.1 *(Sigma Álgebra) Uma coleção Σ de subconjuntos de Ω é chamada de σ-álgebra se as seguintes condições valem:*

(i) $\Omega \in \Sigma$

(ii) *se $A \in \Sigma$, então $A^c \in \Sigma$*

(iii) *se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.*

Pode-se notar facilmente algumas consequências desta definição como $\emptyset \in \Sigma$; $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$; $A, B \in \Sigma \Rightarrow A - B \in \Sigma$.

Definição 1.0.2 *(Medida) Uma medida μ sobre uma σ-álgebra Σ é uma função $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ tal que*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \Sigma$

(iii) *se $\{E_n\}_n$ é uma família disjunta de conjuntos em Σ então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n).$$

Lema 1.0.1 *Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra Σ. Se $E, F \in \Sigma$ e $E \subset F$ então $\mu(E) \leq \mu(F)$. Se $\mu(E) < \infty$ então $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Demonstração 15 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Lema 1.0.2 *Seja Σ uma σ-álgebra e $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ uma medida*

(a) *se $E_1 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$ então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n)$$

(b) *se $F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ então*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n).$$

Demonstração 16 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Definição 1.0.3 ***(Espaço de Medida)*** *um espaço de medida é uma terna (X, Σ, μ) constituída de um conjunto X, uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de X e uma medida μ definida sobre Σ.*

Definição 1.0.4 ***(conjuntos Mensuráveis)*** *Um conjunto E é dito ser mensurável à Lebesgue se*

$$|A| = |A \cap E| + |A \cap (\mathbb{R}^N - E)|, \qquad \forall A \subset \mathbb{R}^N$$

os conjuntos mensuráveis à Lebesgue formam uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$. Além disso, a função $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\mu(E) = |E|$$

é uma medida chamada Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.

Definição 1.0.5 ***(Função Mensurável)*** *Uma função u definida sobre um conjunto A mensurável e tendo valores em* $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +i\infty\}$ *é chamada mensurável se o conjunto*

$$u^{-1}((-\infty, a)) = \left\{x \in A \subset \mathbb{R}^N; u(x) < a\right\}$$

é mensurável para todo $a \in \mathbb{R}$.

Agora vamos listar umas alguns dos principais resultados acerca de funções mensuráveis.

Teorema 1.0.2 ***(propriedades de Funções Mensuráveis)***

(a) *Se u é mensurável, então* $|u|$ *também o é.*

(b) *Se u e v são funções mensuráveis, então* $u + v$ *e uv são mensuráveis.*

(c) *Se* (u_n) *é uma sequência de funções mensuráveis então* $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *e* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *também são funções mensuráveis.*

(d) *Se u é continua e definida sobre um conjunto mensurável então u é mensurável.*

(e) *Se u é continua e sobrejetiva de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *e mensurável então* $u \circ v$ *é mensurável.*

Demonstração 17 *Ver [7].*

■

Definição 1.0.6 *Seja* $A \subset \mathbb{R}^N$, *então a função* X_A *definida por*

$$X_A = \begin{cases} 1 & se \quad x \in A \\ 0 & se \quad x \notin A \end{cases}$$

é chamada de ***Função Característica*** *de A. Também vamos definir* ***Funções Simples****, isto é, funções* $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *cuja imagem é um conjunto finito de números reais.*

Definição 1.0.7 ***(função escada)*** *são funções da forma*

$$u = \sum_{i=1}^{n} C_i X_{A_i}$$

onde cada A_i *são intervalos finitos disjuntos e* C_i *são constantes.*

Seja A um conjunto mensurável de $\mathbb{R}^N$ e $f : A \to \mathbb{R}^+$ uma função mensurável. Então para uma função simples

$$s = \sum_{j=1}^{k} a_j A_j$$

onde $A_j \subset A$ é mensurável. Definimos a integral de Lebesgue de funções simples da seguinte forma:

$$\int_A f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(A_j)$$

e definimos a integral de Lebesgue de funções positivas como sendo

$$\int_A dx = \sup \int_A s(x)dx$$

onde o supremo o supremo é tomado sobre todas as funções simples, mensuráreis e que se anulam em $\mathbb{R}^N/A$ e tais que $0 \leq s(x) \leq f(x)$.

Para definir integral de funções negativas observamos que se f é mensurável e a valores reais temos:

$$f = f^+ - f^-$$

onde, $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$ Assim, vamos definir a integral de funções mensuráveis de maneira mais geral, como sendo:

$$\int_A f(x)dx = \int_A f^+(x)dx - \int_A f^-(x)dx$$

se ambas integrais forem finitas dizemos que f é Lebesgue integráveis em A e denotamos a classe de funções Lebesgue integráveis sobre A por $\mathcal{L}^1(A)$.

Teorema 1.0.3 ***(proriedades de funções integráveis)*** *Assuma que todos os conjuntos e todas as funções sobre* A *que aparecem abaixo são mensuráveis*

(a) *Se* f *é limitada sobre* A *e* $\mu(A) < \infty$ *então*

$$f \in \mathcal{L}^1(A)$$

(b) *se* $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in A$ *e* $\mu(A) < \infty$ *então*

$$a\mu(A) \leq \int_A f(x)dx \leq b\mu(A)$$

(c) *se* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$ *e ambas as integrais existem, então:*

$$\int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx$$

(d) *se* $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$, *então* $f + g \in \mathcal{L}^1(A)$ *e*

$$\int_A (f+g)(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx$$

(e) *se* $f \in \mathcal{L}^1(A)$, *e* $c \in \mathbb{R}$ *então* $cf \in \mathcal{L}^1(A)$ *e*

$$\int_A (cf)(x)dx = c\int_A f(x)dx$$

(f) *se* $f \in \mathcal{L}^1(A)$, *então* $|f| \in \mathcal{L}^1(A)$ *e*

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leq \int_A |f(x)|dx$$

(g) *se* $f \in \mathcal{L}^1(A)$ *e* $B \subset A$, *então* $f \in \mathcal{L}^1(B)$. *Além disso, se* $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$ *então*

$$\int_B f(x)dx \leq \int_A f(x)dx$$

(h) *se* $\mu(A) = 0$, *então*

$$\int_A f(x)dx = 0$$

(i) *se* $f \in \mathcal{L}^1(A)$ *e* $\displaystyle\int_B f(x)dx = 0$ *para qualquer* $B \subset A$, *então* $f(x) = 0$ *q.t.p sobre* A.

Demonstração 18 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Teorema 1.0.4 ***(Teorema da Convergência monótona de Lebesgue)*** *Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ mensurável e (f_j) uma sequência de funções mensuráveis satisfazendo:*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_j(x) \leq \cdots \quad q.t.p \quad sobre \quad A$$

então

$$\lim_{j\to\infty} \int_A f_j(x)dx = \int \left(\lim_{j\to\infty} f_j(x) \right) dx$$

Demonstração 19 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Lema 1.0.3 ***(Lema de Fatou)*** *Seja (u_n) uma sequência de funções em $\mathcal{L}^1(\Omega)$ que satisfaz*

(i) *para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ q.t.p em Ω*

(ii) $\sup_n \int u_n < \infty$

para quase todos $x \in \Omega$ ponhamos $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) \leq +\infty$. Então $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega u \leq \liminf \int_\Omega u_n.$$

Demonstração 20 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Teorema 1.0.5 ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Seja (u_n) uma sequência de funções em $\mathcal{L}^1(\Omega)$ que satisfaz*
(i) $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω
(ii) existe uma função $v \in \mathcal{L}^1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \leq v(x)$ q.t.p em Ω então $u \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega u = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n.$$

Demonstração 21 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Afim de trabalhar com espaços mais gerais vamos definir o seguinte espaço de funções

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ u :\to \mathbb{R} \text{ mensurável}; |u|^p \in L^1(\Omega), 1 \leq p < \infty \right\}.$$

No entanto, para que possamos definir uma norma adequada para as funções que compões este espaço é necessário que consideremos o espaço quociente definido a partir da classe de equivalência de funções que são iguais em quase todo ponto. Isto é, definimos a seguinte classe de equivalência:

$$[u] = \{v \in \mathcal{L}^p(\Omega); u(x) = v(x) \;\; q.t.p \;\; sobre \;\; \Omega\}$$

em seguida definimos:

$$L^1(\Omega) = \{[u] : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis}; [u] \text{ integraveis } \}$$

e

$$L^p(\Omega) = \{[u] : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis}; [u]^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Uma norma para este espaços é dada por

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty.$$

Teorema 1.0.6 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se u e v pertencem a $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ então $u + g \in L^p(\Omega)$ e*

$$||u + v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração 22 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Teorema 1.0.7 ***(Desigualdade de Holder)*** *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega uv \leq \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^q \right)^{1/q}$$

Demonstração 23 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Teorema 1.0.8 ***(Vainberg)*** *Seja* (u_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e seja* $u \in L^p(\Omega)$ *tal que* $||u_n - u||_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então, existe uma subsequência* (u_{n_k}) *e uma função* $w \in L^p(\Omega)$ *tal que*
(i) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ *q.t.p em* Ω
(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq w(x)$ *q.t.p em* Ω

Demonstração 24 *Ver [7].*

$\blacksquare$

Proposição 1.0.1 *Seja* S *o espaço vetorial das funções escadas em* $[0,1]$. *Então* S *é denso em* $L^p([0,1])$ *para* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração 25 *Queremos mostrar que o* $\overline{S} = L^p$ *com* $p \in [1, \infty)$. *Note que* $S \subset L^p([0,1])$ *logo* $\overline{S} \subset L^p([0,1])$. *Mostraremos primeiro que as funções características estão em* $\overline{S}$ *então estenderemos o resultado para funções simples e finalmente concluímos a prova usando sua densidade em* $L^P([0,1])$. *De fato,* $X_A \in \overline{S}$ *para* $A \subset [0,1]$ *mensurável: dado* $\epsilon > 0$, $A \subset U$ *para algum aberto* U *com*

$$\mu\left(U - A\right) < \frac{\epsilon^p}{2}$$

U *é uma união enumerável de intervalos disjuntos* I_i. *Podemos tomar alguns desses para garantir*

$$\mu\left(U - \bigcap_{i=1}^{n} I_i\right) \leq \frac{\epsilon^p}{2}$$

então

$$\mu\left(A - \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) \leq \epsilon^p$$

logo

$$||X_A - \sum_{i=1}^{n} X_{U_i} = \mu\left(A - \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right)^{1/p} \leq \epsilon$$

portanto X_A pode ser aproximado por funções escadas. O mesmo é verdade para funções simples, porque se

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i X_{A_i}$$

para disjuntos A_i e $C_i \neq 0$ então podemos escolher de forma que

$$\left|\left|u - \sum_{i=1}^{n} C_i X_{A_i}\right|\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e depois aproximar cada X_A por funções escadas s_i tal que $||u - s_i||_p < 2^{-(i+1)} C_i^{-1} \epsilon$ e fazendo $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$ que é uma função escada e $||u - s||_p < \epsilon$.

■

Apêndice B

Definições e Alguns Resultados

Definição 2.0.8 ***(Condição Opial)*** *Seja E um espaço de Banach. Uma sequência (u_n) em E com $u_n \rightharpoonup u_0$ em E satisfaz a condição Opial se*

$$\liminf ||u_n - u_0|| \leq \liminf ||u_n - u|| \qquad \forall u \in E$$

dizemos que E satisfaz a condição Opial se toda sequência que converge fraco satisfaz a condição Opial.

Definição 2.0.9 *Para cada $u \in E - \{0\}$ existe um elemento $u^* \in \Omega$ chamado de conjugado tal que $||u^*|| = 1$ e $\langle u^*, u \rangle = ||u||$.*

Definição 2.0.10 *Dizemos que E^* é estritamente convexo se $\xi, \eta \in E$, $\xi \neq \eta$, $||\xi|| = ||\eta|| = 1$ implique em $||t\xi + (1-t)\eta|| < 1$ $\forall t \in (0,1)$.*

Teorema 2.0.9 ***(Teorema do valor intermediário)*** *Seja $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $\psi(a) < d < \psi(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $\psi(c) = d$.*

Demonstração 26 *Ver [5].*

■

Teorema 2.0.10 ***(Kakutani)*** *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada B_E é compacta na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

Demonstração 27 *Ver [4].*

■

Teorema 2.0.11 ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *Para todo espaço normado E, a bola unitária fechada $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ de E'.*

Demonstração 28 *Ver [4].*

■

Bibliografia

[1] Adimurthi; Tintarev, C., On the Brezis-Lieb lemma without pointwise convergence. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 22 (2015), no. 5, 1515-1521.

[2] Brezis, H., Lieb, E.: A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proc. Am. Math. Soc. 88, 486–490 (1983).

[3] Brezis, H, and L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math.36, 1983. pp 437-477.

[4] Brezis, H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

[5] Elon. L. L. Curso de Análise, vol. 1. (Décima primeira edição.) projeto Euclides, IMPA, 2004.

[6] Evans, L. - Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998

[7] Evans, L. C. e R. F. Gariepy, Measure Theory ans Fine Properties of Functions, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[8] Folland, G. B. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications Second Edition. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. 1999

[9] Lieb, E.H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. Ann. of Math. (2) 118, (1983), no. 2, 349–374

[10] Lieb, E. e Loss, M. Analysis. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[11] Lions, P. - The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 1, 2 (1985) Rev. Mat. Iberoamericano

[12] Opial, Z.: Weak Convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Am. Math. Soc. 73, 591–597 (1967).

[13] Struwe, M. - Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systemas, Springer - Verlag, Berlin, 1990

[14] Solimini, S., Tintarev, C.: oncentration analysis in Banach spaces. Commun. Contemp. Math. 18 (2016), no. 3.