UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Existência e multiplicidade de soluções para classes de problemas do tipo Kirchhoff em espaço de Sobolev fracionário

Ronaldo Lopes da Silva

BELÉM

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Ronaldo Lopes da Silva

Existência e multiplicidade de soluções para classes de problemas do tipo Kirchhoff em espaço de Sobolev fracionário

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e, defendida por Ronaldo Lopes da Silva como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

BELÉM
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586e Silva, Ronaldo Lopes da
Existência e multiplicidade de soluções para classes de problemas do tipo Kirchhoff em espaço de Sobolev fracionário / Ronaldo Lopes da Silva. — 2020.
77 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. Problemas não-locais fracionários . 2. equações tipo Kirchhoff. 3. Teorema do Passo da Montanha. 4. gênero de Krasnoselskii. I. Título.

CDD 515.353

Ronaldo Lopes da Silva

Existência e multiplicidade de soluções para classes de problemas do tipo Kirchhoff em espaço de Sobolev fracionário

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, julgada pela seguinte banca examinadora:

Augusto César dos R. Costa

Prof. Dr. AUGUSTO CÉSAR DOS REIS COSTA - Orientador

PPGME/PDM - UFPA

Prof. Dr. OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

PPGM - UFSCar

Suellen Cristina Q. Arruda

Prof^{a}. Dr^{a}. SUELLEN CRISTINA QUEIROZ ARRUDA

Campus Abaetetuba - UFPA

Prof. Dr. JOÃO PABLO PINHEIRO DA SILVA

PPGME/PDM - UFPA

Data da defesa: 03 de Março de 2020.

Resultado: Aprovado.

Dedico este trabalho à minha valiosa família e minha querida noiva Adria, com amor.

"Se fiz descobertas valiosas, foi mais por ter paciência do que qualquer outro talento".

Issac Newton

Agradecimentos

"A gratidão é a memória do coração"(Antístenes).

Ao concluir esta Dissertação gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos que, de alguma forma contribuiram para a concretização deste trabalho, pois não é uma construção meramente individual e sim fruto de várias contribuições ao longo de sua realização.

À Deus, pela dádiva da vida, por sua infinita graça, me concedeu saúde e sabedoria para enfrentar as dificuldades encontradas no percorrer deste caminho, e que, em nenhum momento me desamparou, permitindo que eu tenha chegado à conclusão de mais um sonho. Obrigado por me permitir errar, aprender e crescer. À Ele seja dada toda a honra, toda glória e louvor.

Aos meus pais, Raimundo da Conceição e Tatiana Maria, e meu irmão Raimundo Silva, por me apoiarem e sempre acreditarem que este sonho seria possível. Por compreenderem a minha ausência em alguns momentos, obrigado pelas orações e por todo incentivo, confiando no propósito de Deus na minha vida. Amo vocês.

Agradecimento especial a minha noiva Adria Larissa pela presença, companheirismo, ajuda, consolo, e palavras de ânimo quando eu quis desistir. Enfim eu cumpri o que ela me pediu, e conseguimos. Grato pelo seu amor por mim, carinho e compreensão. Te amo, minha amada.

Agradeço meu Orientador, Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa por toda amizade, orientação, conhecimento repassado, profissionalismo, disponibilidade, cooperação e suporte técnico, que foram essenciais para a conclusão deste trabalho. Meu muito obrigado por acreditar em mim e pelos tantos elogios e incentivos.

Agradeço aos professores doutores da banca examinadora, pela aceitação de avaliar o trabalho, suas sugestões e considerações.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos durante os anos do curso de mestrado. Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME), ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN) e a instituição UFPA, pelas oportunidades oferecidas.

Aos tantos amigos, professores que me apoiaram, torceram e se alegraram comigo, meus colegas de turmas, os amigos de caminhada Dnilson, Ranielson, Antoniel, Rafael e companhia, as famílias que rezaram por mim.

Por fim, a todos aqueles que participaram, direta ou indiretamente, da realização desta dissertação, o meu sincero agradecimento.

RESUMO

Neste trabalho estudamos classes de equações e sistemas não-locais relacionados com Laplaciano fracionário e termo do tipo Kirchhoff, das formas:

$$\begin{cases} M(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u & = & f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 & & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} M_1(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u & = & F_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ M_2(\|v\|_X^2)(-\Delta)^s v & = & F_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 & & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

onde Ω é limitado e suave em $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ expoente fracionário, $N > 2s$ e $(-\Delta)^s$ é o operador Laplaciano fracionário usual. Tratamos as funções contínuas M, M_1, M_2, f, F_u e F_v sob condições apropriadas de crescimento.

Esses problemas foram estudados por Bisci e Repovs [9] e Costa e Pereira [19], respectivamente. Os dois primeiros autores mostraram a existência de solução via Teorema do Passo da Montanha, enquanto Costa e Pereira utilizaram gênero de Krasnoselskii para determinar multiplicidade de soluções.

Palavras-chave: Problemas não-locais fracionários, equações tipo Kirchhoff, Teorema do Passo da Montanha, gênero de Krasnoselskii.

ABSTRACT

In this work we study classes of nonlocal equations and systems related to fractional Laplacian and Kirchhoff type term, of the forms:

$$\begin{cases} M(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} M_1(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u = F_u(x,u,v) & \text{in } \Omega, \\ M_2(\|v\|_X^2)(-\Delta)^s v = F_v(x,u,v) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

where Ω is bounded and smooth in $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ fractional exponent, $N > 2s$ and $(-\Delta)^s$ is the usual fractional Laplacian operator. We handle the continuous functions M, M_1, M_2, f, F_u and F_v under appropriate growth conditions.

These problems were studied by Bisci and Repovs [9] and Costa and Pereira [19], respectively. The first two authors showed the existence of a solution via the Mountain Pass Theorem, while Costa and Pereira used Krasnoselskii's genus to determine multiplicity of solutions.

Keywords: Fractional nonlocal problems, Kirchhoff type equations, Mountain Pass Theorem, Krasnoselskii's genus.

Sumário

Introdução

Os espaços de Sobolev fracionários surgem a partir do interesse de se generalizar os espaços de Sobolev inteiros $W^{m,p}$ para expoentes reais, e portanto admitir derivadas fracionárias (caso em que o expoente m é fracionário). Isso por que à medida que os problemas Laplacianos em equações diferenciais parciais de interpretações físicas e biológicas (exemplo os casos de fenômenos de difusão não-linear) foram tendo um forte apelo por estes tipos de derivadas vê-se a necessidade de criar uma teoria que trabalhasse dentro de espaços de natureza fracionária. Assim, se concebem as primeiras teorias do que chamamos espaços de Sobolev fracionários.

Após esse início era de se esperar que com o advento dos espaços de Sobolev fracionários e suas correspondentes equações não-locais surgissem uma grande quantidade de aplicações envolvendo seus conceitos. De fato, estes espaços não se restringiram ao campo da análise funcional clássica, mas recentemente tiveram importância ao favorecer o desenvolvimento de temas em diversas disciplinas e áreas da ciência, como por exemplo, em otimização, finanças, deslocamento de cristais, leis de conservação, limites ultra-relativistas da Mecânica Quântica, superfícies mínimas, problemas não elípticos, teoria do potencial de Gradiente, entre outros, que você pode vê-los em Applebaum [4], Bertoin [6], Caffarelli [14], Cont e Tankov [17], Di Nezza, Palatucci e Valdinoci [20] e suas referências.

Essa motivação tem inspirados muitos trabalhos de matemáticos especialistas em equações diferenciais que utilizam os Laplacianos fracionários com ou sem termo do tipo Kirchhoff, citamos aqui Autuori e Pucci [5], Fiscella, Bisci e Servadei [25], Bisci e Pansera [7], Bisci e Repovs [10], Bisci e Servadei [11], Figueiredo, Bisci e Servadei [22], Fiscella e Valdinoci [23], Fiscella [24] e Servadei e Valdinoci [31].

Em [9], o matemático italiano Giovanni Molica Bisci juntamente com o esloveno Dusan Repovs estudaram o seguinte problema voltado para equações não-locais do tipo

$$(D_{M,f}) \begin{cases} M(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u &= f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $N > 2s$, com $s \in (0,1)$ e onde $(-\Delta)^s$ é o operador Laplaciano fracionário não local

$$(-\Delta)^s u(x) := -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

O problema com valores limitados e dados de contorno homogêneo de Dirichlet é caracterizado pela participação de um termo semelhante ao original de Kirchhoff, porém condicionado por crescimento restrito. Sua não-linearidade respeita um crescimento subcrítico, além de outras propriedades. Os autores trabalharam em um subespaço de $H^s(\mathbb{R})$, um espaço de Sobolev fracionário de Hilbert, explorando uma abordagem variacional, onde utilizam o clássico Teorema do Passo da Montanha (T.P.M.) para obter existência de solução não-nula.

A equação original de Kirchhoff, a qual apareceu pela primeira vez no trabalho de Kirchhoff [26], é dada por

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

e estende a equação clássica da onda de D'Alembert, considerando os efeitos da mudança no comprimento da corda durante as vibrações. Os parâmetros da equação tem os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área de sua seção transversal, E é o módulo de Young do material do qual ela é feita, ρ é a densidade da massa e P_0 é a tensão inicial. Um diferencial importante nesta equação é a presença do coeficiente não-local $\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx$ que depende da média $\frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx$, da energia cinética $\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2$ em $[0, L]$.

Várias equações do tipo Kirchhoff tem sido estudadas, especialmente depois do trabalho de J. Lions [28] no qual foi proposta uma abordagem de Análise Funcional para o referido problema. As referências [1] e [29] representam os trabalhos pioneiros envolvendo termo de Kirchhoff em equações diferenciais parciais elípticas. Em [23], Fiscella e Valdinoci estabeleceram um modelo estacionário fracionário de Kirchhoff, com aspecto não-local da tensão nas cordas.

Em [19], Costa e Pereira estudaram o seguinte sistema não-local

$$\begin{cases} M_1(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u &= F_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ M_2(\|v\|_X^2)(-\Delta)^s v &= F_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $s \in (0,1)$, $N > 2s$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e suave, com o mesmo operador Laplaciano fracionário, e sob certos critérios exigidos para as funções contínuas M_1, M_2, F_u e F_v que aparecem. Eles mostraram existência e multiplicidade de soluções não nulas para este caso via o teorema abstrato de Clark [16], o qual faz uso do gênero de Krasnoselskii. Além disso, exemplificam com uma aplicação de interpretação física.

O objetivo deste trabalho é de mostrar esses resultados de existência ou multiplicidade de soluções feitos nesses dois artigos, além de suas aplicações. Com o objetivo de facilitar as introduções dos resultados centrais, reservamos o primeiro capítulo as faculdades dos espaços que vamos explorar, ou seja, os espaços de Sobolev fracionários. Nos referimos especificamente aos espaços $W^{s,p}$ (Banach) e H^s (Hilbert). Nos capítulos 2 e 3 seguintes apresentamos os resultados principais, revisando a metodologia dos autores. Incluímos no final um apêndice sobre os métodos variacionais e topológicos empregados; Teorema do Passo da Montanha e gênero de Krasnoselskii.

Capítulo 1

Um breve comentário sobre os espaços de Sobolev fracionários

Este capítulo inicial é destinado a apresentação de um quadro geral de notações, definições, propriedades e resultados relacionados com os espaços que trabalharemos ao longo desta dissertação. Trata-se de um exercício de "fundamentação" das ideias, importante para o entendimento dos elementos que cercam os problemas principais explorados no trabalho. Vale ressaltar de antemão que o objetivo principal aqui é de apenas resumir os resultados essenciais sem muito aprofundar os detalhes e algumas demonstrações. Se o leitor desejar investigar mais sobre o assunto indicamos as referências [20] e [8], e suas referências.

1.1 Espaços de Sobolev Fracionários $W^{s,p}$

Vamos focar esta primeira seção na compreensão dos espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}$. Iniciamos definindo uma seminorma importante na teoria desses espaços.

Definição 1.1. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Para qualquer função mensurável $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a seminorma de Gagliardo é definida por:

$$[u]_{s,p} := \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{1/p}.$$

A partir da definição acima, pode-se enunciar em sentido mais geral os espaços de Sobolev fracionários.

Definição 1.2. Considerando o expoente fracionário $s \in (0,1)$, o índice $p \in [1,+\infty)$ qualquer e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto, defini-se o espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ como sendo:

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \forall (x,y) \in (\Omega \times \Omega) \mapsto \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}. \tag{1.1}$$

Conforme Bisci G. M., Radulescu V. D. e Servadei R. [8], os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ são também reconhecidos pelos nomes de seus introdutores no meio acadêmico: espaços de Aronszajn, Gagliardo ou Slobodeckij. O espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = (||u||^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{s,p})^{1/p}. \tag{1.2}$$

De acordo com sua definição, esses tipos de espaços localizam-se precisamente entre os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e o primeiro espaço de Sobolev inteiro $W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, o fato destes espaços serem Banach nos permite observar certas propriedades geométricas válidas para os mesmos, a saber: densidade, reflexibilidade, separabilidade, entre outras.

De fato, note que através da definição de espaços de Sobolev fracionários feita acima é imediato observar que tais espaços $W^{s,p}(\Omega)$ são subconjuntos dos espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ (Banach), o qual por sua vez são reflexivos quando $1 < p < +\infty$ e separáveis quando $1 \leq p < +\infty$. Assim, é fácil concluir que $W^{s,p}(\Omega)$ são igualmente reflexivos e separáveis nas mesmas condições feitas para o índice p.

Quanto a densidade nos espaços $W^{s,p}(\Omega)$ um resultado interessante pode ser verificado, via os chamados espaços de Besov, através do seguinte teorema:

Teorema 1.1. Para todo $s \in (0,1)$, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leq p < +\infty$.

Desta forma, qualquer função $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ pode ser identificada como o limite de uma determinada sequência de funções suaves com suporte compacto em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Costuma-se denotar por $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ o fecho do espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ na norma indicada por:

$$||u||_{W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\sum_{|\alpha|=0} ||D^\alpha u||^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, pelo que vimos no teorema anterior, concluímos $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Este fato nos leva a crer que nos espaços de Sobolev fracionários, do mesmo modo como no caso dos espaços de Sobolev inteiros (ou seja, $s \in \mathbb{Z}$), quando $s < 0$ e $p \in (1, +\infty)$ dizemos que $W^{s,p}(\Omega)$ é o espaço dual de $W_0^{-s,q}(\Omega)$, em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Observação 1.1. Uma informação importante sobre essa densidade em $W^{s,p}$, é que geralmente no caso de Ω um aberto qualquer em $\mathbb{R}^N$, nem sempre ocorre $W^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega)$ (ver [20]).

Destacam-se algumas outras características presentes nos espaços de Sobolev fracionários, por exemplo, a relação entre os espaços $W^{s,p}$ e $W^{t,p}$ com $s \leq t$, onde $s, t \in (0, 1)$. Neste caso, temos uma imersão contínua entre eles. Veja na proposição seguinte:

Proposição 1.1. Sejam $p \in [1, +\infty)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto e considere $s, t \in (0, 1)$ tais que $s \leq t$. Então, existe uma constante positiva adequada $C = C(N, s, p)$ tal que para toda função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{t,p}(\Omega)}.$$

Assim, o espaço $W^{t,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{s,p}(\Omega)$.

Ainda sobre esta proposição, o resultado continua válido para o caso onde $t = 1$, desde que seja respeitada devidamente uma regularidade sobre o domínio Ω, ou seja, este deve ser uniformemente Lipschitz e limitado, de acordo com a proposição que se segue.

Proposição 1.2. Sejam $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0, 1)$ e Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada. Então, o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{s,p}(\Omega)$.

Existe uma relação relevante entre os espaços de Sobolev fracionários e a definição dos espaços das funções traços. É o que notamos na definição a seguir:

Definição 1.3. Seja $1 < p < +\infty$ dado e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, suficientemente suave. Então, o espaço das funções traços Tu sobre $\partial\Omega$, onde $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é definido como sendo:

$$\|Tu\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} < +\infty.$$

Naturalmente o espaço $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ que ocorre na definição acima trata-se de um caso de espaço de Sobolev fracionário. Além disso, o operador traço T é sobrejetivo em $W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

Um conceito muito elementar dentro dos espaços de Sobolev sejam eles inteiros ou fracionários é o chamado domínio de extensão. Tal teoria é uma importante ferramenta nas aplicações em EDP como também para demonstrar certas imersões nestes espaços.

Definição 1.4. Dados $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$, o subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é dito ser um domínio de extensão para $W^{s,p}(\Omega)$ se existe uma constante positiva $C = C(s,p,N,\Omega)$, tal que para cada função $u \in W^{s,p}(\Omega)$, existe uma única função $\hat{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, com $u(x) = \hat{u}(x)$, para quase todo $x \in \Omega$ e $\|\hat{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$. Ou seja, $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Resultados sobre domínios de extensão e prolongamentos em espaços $W^{s,p}(\Omega)$ reforçam ainda mais algumas propriedades satisfeitas pelos espaços de Sobolev fracionários, como é o caso dos resultados seguintes.

Lema 1.1. Sejam Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ e $u \in W^{s,p}(\Omega)$, com $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Se existir um compacto $K \subset \Omega$ tal que $u \equiv 0$ em $\Omega \setminus K$, então existe uma função extensão $\hat{u}$, definida como

$$\hat{u}(\mathrm{x}) := \begin{cases} u(x), & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

pertencente a $W^{s,p}(\mathbb{R})$, e existe uma constante $C = C(N,s,p,K,\Omega) > 0$, tal que

$$\|\hat{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \mathrm{C}\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Proposição 1.3. Considere $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$. Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada. Então, Ω é um domínio de extensão para $W^{s,p}(\Omega)$.

Esta proposição define uma classe de domínios de extensão Ω_p's em $\mathbb{R}^N$, pois a cada valor para o índice p no espaço $W^{s,p}(\Omega)$ determina-se um domínio de extensão específico. Além disso, com esta proposição obtemos o seguinte importante corolário sobre a existência de uma sequência de funções suaves convergente para cada função dentro do espaço de Sobolev fracionário com domínio de extensão.

Corolário 1.1. Sejam $p \in [1, +\infty)$ e $s \in (0,1)$. Se Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ com fronteira limitada, então para toda $u \in W^{s,p}(\Omega)$, existe uma sequência $\{u_n\} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{s,p}(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Isto é, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$.

A demonstração deste corolário se faz utilizando o argumento do Teorema 1.1 com a Proposição 1.3 anterior.

Nos próximos resultados trataremos brevemente sobre os casos de imersões contínuas e compactas dos espaços de Sobolev fracionários nos espaços de Lebesgue. A respeito disso, a princípio convém esclarecer que as imersões que envolvem espaços de Sobolev dependem da regularidade que se estabelece entre os índices s, p e N. Desta forma, existem imersões fracionárias específicas caso $sp < N$, outras para o caso $sp = N$ e outras ainda para $sp > N$. Nos limitamos a apresentar as imersões sob as suposições de $sp < N$ ou $sp = N$.

Começamos apresentando as imersões contínuas quando $sp < N$. Primeiramente, mostra-se sob que condições é possível obter imersões contínuas fracionárias, quando o domínio é o $\mathbb{R}^N$. Neste caso, percebemos que o espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso num espaço de $L^q(\mathbb{R}^N)$ para um determinado q específico. Já no Teorema 1.3, descreve-se a imersão contínua sobre um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, o qual precisa ser domínio de extensão para $W^{s,p}$ para que a imersão faça sentido.

Teorema 1.2. Sejam $s \in (0,1)$ e $1 \leq p < +\infty$ tais que $sp < N$. Então, existe uma constante $C = C(s,p,N) > 0$ tal que para cada função $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, mensurável com suporte compacto, temos

$$\|f\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy, \tag{1.3}$$

onde p_s^* é o que chamamos de expoente fracionário crítico de Sobolev, $p_s^* := \dfrac{Np}{N-sp}$.

Este resultado garante que o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in [p, p_s^*]$, pois pela desigualdade (1.3) resulta que

$$\|f\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C[f]^p_{s,p} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|f\|^p_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|f\|^p_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C[f]^p_{s,p} + C\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C\|f\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)},$$

desde que $p \leq q \leq p_s^*$.

Teorema 1.3. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1, +\infty)$ tais que $sp < N$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio de extensão para $W^{s,p}$, então o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para qualquer $q \in [p, p_s^*]$. Além disso, se Ω é limitado, então o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p_s^*]$.

No caso em que $sp = N$, sendo $p_s^* = \dfrac{Np}{N - sp}$, o expoente fracionário crítico de Sobolev, e fazendo $sp \to N$ implica que $p_s^* \to +\infty$. Assim, as imersões citadas nos dois teoremas anteriores continuam válidas: o espaço $W^{s,p}$ está continuamente imerso em L^q para qualquer $p \leq q < +\infty$ (ver [20], Teoremas 6.9 e 6.10).

Para as imersões compactas fracionárias deve-se considerar primeiramente apenas sobre domínios de extensão limitados. Destacamos assim os seguintes resultados principais.

Teorema 1.4. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de extensão limitado para $W^{s,p}(\Omega)$, com $s \in (0,1)$ e $1 \leq p < +\infty$. Então, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$ para $q \in [1, p]$.

Proposição 1.4. Dados $s \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty)$, com $sp < N$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio de extensão limitado para $W^{s,p}(\Omega)$, então $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$ para qualquer $q \in [1, p_s^*)$.

Este último resultado nada mais é do que um corolário resultante do Teorema 1.3, para o caso de Ω limitado, com o Teorema 1.4.

Teorema 1.5. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de extensão limitado para $W^{s,p}$. Dado $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$ limitado tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dxdy < +\infty,$$

então $\mathcal{F}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$ para $q \in [1, p]$.

Corolário 1.2. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1, +\infty)$ com $sp < N$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio de extensão limitado para $W^{s,p}$ e $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$ limitado tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < +\infty,$$

então $\mathcal{F}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$ para $q \in [1, p_s^*)$.

No caso de imersão compacta sobre o domínio estendido $\mathbb{R}^N$, em [8] encontramos o seguinte resultado:

Proposição 1.5. Sejam $0 < s < 1$ e $1 \leq p < +\infty$ e $p_s^* = \dfrac{Np}{N - sp}$, o expoente fracionário crítico de Sobolev. Então, a imersão $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é compacta para todo $q \in [p, p_s^*)$.

1.2 Espaços de Sobolev Fracionários H^s

O espaço de Sobolev fracionário $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, normalmente denotado por $H^s(\mathbb{R}^N)$, definido pelo seguinte:

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \ [u]_s < \infty\},$$

onde

$$[u]_s := \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{C(N,s)} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx \right)^{1/2} \tag{1.4}$$

(Seminorma de Gagliardo para o caso $p = 2$)

e equipado com a norma

$$||u||_{H^s(\mathbb{R}^N)} = (||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + [u]_s^2)^{1/2}, \tag{1.5}$$

é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+2s}} \, dx\, dy, \tag{1.6}$$

para todo $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$, o qual induz a norma (1.5).

A segunda igualdade em (1.4) é demonstrada em [[20], Proposição 3.6] quando as integrais em questão são finitas. Isso mostra que este espaço de Hilbert tem certa relação direta com o operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$.

O operador $(-\Delta)^s : \mathcal{S} \to L^2(\mathbb{R}^N)$, com $0 < s < 1$, é chamado Laplaciano fracionário, o qual é definido como sendo

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \tag{1.7}$$

com $x \in \mathbb{R}^N$ e $B_\varepsilon(x)$ a bola de centro em x e raio ε.

Este operador aparece com frequência principalmente em problemas envolvendo equações não-locais formulados em equações elípticas. Recentemente esses tipos de problemas vem ganhando notoriedade na pesquisa acadêmica por seus valores em diversos campos da ciência tais como, análise harmônica, teoria da probabilidade, mecânica quântica, física-estatística, cosmologia, etc e suas aplicações (Ver [20]). Assim, a compreensão deste operador torna-se fundamental na resolução de tais problemas.

Em [20], podemos ainda identificar esse operador da seguinte forma.

Proposição 1.6. Sejam $s \in (0,1)$ e $(-\Delta)^s : \mathcal{S} \to L^2(\mathbb{R}^N)$ o operador definido em (1.7). Então,

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \tag{1.8}$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$.

A prova de (1.8) pode ser encontrada em [8]. Na verdade, na literatura o operador Laplaciano fracionário dado tanto em (1.7) quanto (1.8) é considerado um modelo particular de um operador do tipo não-local fracionário bem mais geral, o qual denominamos de operador integrodiferencial $\mathcal{L}_\mathcal{K}$. Aqui introduzimos brevemente o seu significado.

Definição 1.5. Dado $s \in (0,1)$, defini-se o operador integrodiferencial não-local fracionário $\mathcal{L}_\mathcal{K}$ por:

$$\mathcal{L}_\mathcal{K} u(x) := \int_{\mathbb{R}^N} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) K(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.9}$$

onde $K : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \longrightarrow (0, +\infty)$ indica o núcleo, o qual satisfaz as seguintes condições:

(K_1) $mK \in L^1(\mathbb{R}^N)$, com $m(x) := min\{|x|^2, 1\}$;

(K_2) Existe $\theta > 0$, tal que $K(x) \geq \theta |x|^{-(N+2s)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Note que, um modelo possível para K pode ser dado pela função particular $K(x) = |x|^{-(N+2s)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Neste caso, ao substituir essa função na expressão (1.9) é fácil ver que, observada algumas correções por constantes, segue que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = -(-\Delta)^s.$$

Ainda sobre (1.7), $C(N,s)$ é uma constante de normalização dimensional dependente dos valores atribuídos para N e s, e tem valor calculado por:

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta \right)^{-1}, \tag{1.10}$$

segundo a prova de [[20], Proposição 3.3], para $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_N) \in \mathbb{R}^N$.

Para ser mais específico sobre o papel da constante $C(N,s)$ na definição do Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$, foram apresentados em [20], interessantes tipos assintóticos que esta constante descreve considerando as condições de extremos de s, isto é, $s \to 1^-$ e $s \to 0^+$. Temos as seguintes conclusões.

Proposição 1.7. Para qualquer $N > 1$, seja $C(N,s)$ definida por (1.10). As seguintes afirmações são consideradas válidas:

i) $\displaystyle \lim_{s \to 1^-} \frac{C(N,s)}{s(1-s)} = \left(\frac{\varpi_{N-2}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{N}{2}+1}} d\rho \right)^{-1};$

ii) $\displaystyle \lim_{s \to 0^+} \frac{C(N,s)}{s(1-s)} = \left(\varpi_{N-2} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{N}{2}}} d\rho \right)^{-1};$

onde ϖ_{N-2} denota a $(N-2)$ medida dimensional da esfera unitária S^{N-2}.

iii) $\displaystyle \lim_{s \to 1^-} \frac{C(N,s)}{s(1-s)} = \frac{4N}{\varpi_{N-1}};$

iv) $\displaystyle \lim_{s \to 0^+} \frac{C(N,s)}{s(1-s)} = \frac{2}{\varpi_{N-1}},$

com ϖ_{N-1} sendo a $(N-1)$ medida dimensional da esfera unitária S^{N-1}.

Estes fatos implicam nas seguintes afirmações.

Proposição 1.8. Seja $N > 1$. Para qualquer $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ as seguintes afirmações são válidas:

i) $\lim_{s \to 1^-} (-\Delta)^s u = -\Delta u$.

ii) $\lim_{s \to 0^+} (-\Delta)^s u = u$.

Isto significa, por um lado, que a medida que o expoente fracionário s aproxima-se do inteiro 1, o operador Laplaciano fracionário tende a se aproximar do operador Laplaciano clássico $-\Delta$. Por outro lado, quando s se aproxima da extremidade 0 o operador $(-\Delta)^s$ aproxima-se da função original u. As demonstrações se encontram em [20].

Capítulo 2

Existência de soluções para equações não-locais envolvendo o laplaciano fracionário

2.1 Problema Proposto

A classe de equações que vamos descrever aqui é de natureza não-local e está relacionada com o Laplaciano fracionário clássico em espaços de Sobolev fracionários com presença do termo de Kirchhoff, estudada por Bisci e Repovs [9]. Precisamente nos referimos a seguinte classe de problemas (duplamente) não-locais.

$$\begin{cases} M(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u &= f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Nosso propósito neste capítulo é mostrar o resultado de existência de solução não-nula para o problema (2.1) via Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice).

Vamos primeiramente modelar este problema: em (2.1), Ω constitui um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$ suave e $s \in (0,1)$ é o expoente fracionário, de tal modo que $N > 2s$. Temos a presença do operador fracionário integral $(-\Delta)^s$ correspondente a

$$(-\Delta)^s u(x) := -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Abaixo as condições exigidas para as funções M e f no problema.

A função do tipo Kirchhoff $M : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ tem as seguintes propriedades:

(M_1) $M \in C([0, +\infty))$;

(M_2) Existe uma constante positiva m_0, tal que

$$0 < m_0 \leq M(t), \quad \forall t \in [0, +\infty);$$

(M_3) Existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$\hat{M}(t) \geq tM(t), \quad \forall t \in [t_0, +\infty),$$

onde $\hat{M}(t) := \displaystyle\int_0^t M(s)ds$ é a função conhecida como potencial.

Observação 2.1. Note que em se tratando da função de Kirchhoff original $M(t) = a + bt$, com $a, b > 0$, as duas primeiras condições são satisfeitas, pois $M(t) = a + bt$ é contínua e $a = m_0 \leq M(t),\ 0 \leq t < +\infty$. No entanto não podemos dizer o mesmo para (M_3) já que

$$\int_0^t (a + bs)ds = at + \frac{b}{2}t^2 = \hat{M}(t) \leq tM(t) = at + bt^2.$$

Observação 2.2. O Lema 2.1 a ser apresentado antes da prova do teorema central deste capítulo garantirá uma caracterização específica referente a função $\hat{M}$ que permite ainda mais a aplicação do T.P.M. juntamente com as condições dadas inicialmente sobre M descritas aqui.

A função não-linear $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ obedece as seguintes condições:

(f_1') $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f_2') (condição de crescimento subcrítico) $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ temos

$$|f(x,t)| \leq c(1+|t|^{q-1}),$$

onde $c > 0$ e $2 < q < 2_s^*$;

(f_3') (condição de Ambrosetti-Rabinowitz - AR) Encontramos $t^* > 0$, tal que ocorre

$$0 < \theta F(x,\xi) \leq f(x,\xi)\xi, \ \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } |\xi| \geq t^*, \text{ onde } F(x,\xi) := \int_0^{\xi} f(x,t)dt \ \text{ e } \ \theta > 2;$$

(f_4') Vale que $\limsup_{t\to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} \leq \lambda$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ e $\lambda < m_0\lambda_{1,s}$, onde $\lambda_{1,s}$ é o primeiro autovalor do problema (2.6).

Observação 2.3. Observe que a condição (f_3') implica que $F(x,\tau\xi) \geq F(x,\xi)\tau^{\theta}$, para qualquer $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi| \geq t^*$ e $\tau \geq 1$. Isso é mostrado mais a frente em um lema antes da prova do resultado de (2.1).

Diante disso, estabelecemos o teorema central deste capítulo que propõe resultado de existência de solução para (2.1). Enunciamos do seguinte modo:

Teorema 2.1. *Sejam $s \in (0,1)$, $N > 2s$, Ω um subconjunto limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Dadas $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ função satisfazendo (M_1), (M_2), (M_3) e $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando (f_1'), (f_2'), (f_3') e (f_4'). Então, o problema (2.1) admite pelo menos uma solução fraca não-trivial.*

2.2 Preliminares

Seja o espaço de Sobolev fracionário $H^s(\mathbb{R}^N)$ e o subespaço linear fechado

$$X := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) : \ u = 0 \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}. \tag{2.2}$$

O espaço X é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_X := \int_Q \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy, \tag{2.3}$$

onde $Q := (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus (\mathbb{R}^N \setminus \Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, o qual induz a norma

$$\|u\|_X = [\,u\,]_s = \left(\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

onde $[\,\cdot\,]_s$ é a seminorma de Gagliardo com $p = 2$.

Em virtude de [[20], Teoremas 6.5 e 7.1], garantimos casos de imersões $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ contínuas quando $r \in [1, 2_s^*]$ e compactas para $r \in [1, 2_s^*)$. Por isso, para cada $r \in [1, 2_s^*)$, existe $C_r > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \le C_r\|u\|_X, \quad \text{para cada } u \in X. \tag{2.5}$$

Agora, vamos analisar o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Neste problema se $u \in X \setminus \{0\}$ é uma solução fraca, então λ é dito ser um autovalor com u sua λ-autofunção correspondente. Assim, determinamos $\sigma((-\Delta)^s)$ o espectro de $(-\Delta)^s$ em X a partir do conjunto formado por todos autovalores $\{\lambda_{k,s}\}_{k\in\mathbb{N}}$ em (2.6). Sendo assim, o problema (2.6) pode ser escrito como $u = \lambda K u$, onde $K = [(-\Delta)^s]^{-1}$, o qual é um operador compacto e $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Em Servadei e Valdinoci [32] e [33]], encontramos as seguintes proposições sobre o problema (2.6) em questão:

(*i*) Existe em (2.6) um autovalor $\lambda_{1,s} = \min \sigma((-\Delta)^s) > 0$ que pode ser caracterizado da seguinte forma:

$$\lambda_{1,s} = \min_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy}{\displaystyle\int_Q |u(x)|^2 dx}; \tag{2.7}$$

(*ii*) Por (*i*) existe uma função não-negativa $\varphi_{1,s} \in X$, a qual é autofunção correspondente ao autovalor mínimo $\lambda_{1,s}$, atingindo assim o mínimo em (2.7);

(*iii*) O conjunto dos autovalores associados ao problema (2.6) é formado por uma sequência não-decrescente $\{\lambda_{k,s}\}$ que diverge, isto é,

$$0 < \lambda_{1,s} < \lambda_{2,s} \leq \lambda_{3,s} \leq \ldots \leq \lambda_{j,s} \leq \lambda_{j+1,s} \leq \ldots, \ \lambda_{k,s} \to \infty, \text{ com } k \to \infty;$$

(*iv*) Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_{k,s}$ uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_{k,s}$. Assim, a sequência $\{\varphi_{k,s}\}$ é uma base ortonormal tanto de $L^2(\mathbb{R}^N)$ como de X.

Voltando ao problema (2.1), temos para ele a seguinte formulação fraca: $u \in X$ é uma solução fraca para (2.1) se satisfaz

$$M(\|u\|_X^2)\langle u, \varphi\rangle_X = \int_\Omega f(x, u(x))\varphi(x)dx,$$

para todo $\varphi \in X$.

Além disso, associado ao problema, estabelecemos o funcional energia $J : X \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) \ := \ \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u\|_X^2\right) - \int_\Omega F(x, u(x))dx, \quad (\forall u \in X), \tag{2.8}$$

onde $F(x, u(x)) := \displaystyle\int_0^{u(x)} f(x, s)ds$, com a seguinte derivada de Fréchet:

$$\langle J'(u), \varphi\rangle \ = \ M(\|u\|_X^2)\langle u, \varphi\rangle_X - \int_\Omega f(x, u(x))\varphi(x)dx, \tag{2.9}$$

para todo $\varphi \in X$.

Desta forma, note que as soluções fracas do problema (2.1) correspondem aos pontos críticos do funcional J. Assim, determinar seus pontos críticos garante a existência (ou não) de soluções fracas para o problema. Essa será a metodologia da prova de (2.1). Temos ainda que $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, o que é uma condição necessária para o uso do Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice).

2.3 Prova do Teorema 2.1

Vamos começar assegurando algumas condições observadas sobre M e f a partir das condições dadas inicialmente. Começamos por uma condição de crescimento adequada sobre o potencial $\hat{M}$ necessária para a garantia do teorema principal.

Lema 2.1. Se consideradas satisfeitas as condições impostas sobre a função do tipo Kirchhoff M por (M_1), (M_2) e (M_3). Então, obtemos constantes $m_1, m_2 > 0$, tal que

$$\hat{M}(t) \leq m_1 t + m_2,$$

é válida para qualquer $t \in [0, +\infty)$.

Demonstração. Pela condição (M_3), para um arbitrário $t_1 \in (t_0, +\infty)$, verifica-se que $\hat{M}(t) \geq tM(t), \quad \forall t \in [t_1, +\infty)$. Como para todo $t \in [t_1, +\infty)$, temos $\hat{M}(t) > 0$ e $t > 0$, podemos dividir por $t\hat{M}(t) > 0$ ambos os lados da desigualdade anterior, o que resulta em

$$\frac{M(t)}{\hat{M}(t)} \leq \frac{1}{t}, \quad \forall t \in [t_1, +\infty). \tag{2.10}$$

Recordamos que $\displaystyle\int \frac{u'}{u} dx = \log|u|$. Por esse fato, ao integrar para t_1 e $t \in (t_1, +\infty)$ ambos os membros em (2.10) obtemos

$$\int_{t_1}^{t} \frac{M(s)}{\hat{M}(s)} ds \leq \int_{t_1}^{t} \frac{1}{s} ds \quad \Leftrightarrow \quad \left[\log \hat{M}(s)\right]_{t_1}^{t} \leq [\log(s)]_{t_1}^{t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow log\hat{M}(t) - log\hat{M}(t_1) \leq \log(t) - \log(t_1) \quad \Leftrightarrow \quad \log \frac{\hat{M}(t)}{\hat{M}(t_1)} \leq \log \frac{t}{t_1} \Leftrightarrow \tag{2.11}$$

$$\frac{\hat{M}(t)}{\hat{M}(t_1)} \leq \frac{t}{t_1} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{M}(t) \leq \frac{\hat{M}(t_1)}{t_1} t \quad \forall t \in (t_1, +\infty)$$

Finalmente fazendo $m_1 := \dfrac{\hat{M}(t_1)}{t_1}$ e $m_2 := \max\limits_{t \in [0, t_1]} \hat{M}(t)$, afirmamos para todo $t \in [0, +\infty)$, $\hat{M}(t) \leq m_1 t + m_2$, e o lema está provado. □

Agora novamente a partir das condições (M_2) e (M_3) e acrescentando o Lema 2.1 demonstrado, é fácil ver que

(M_4) Sendo $t_0 \geq 0$, para $t \in [t_0, +\infty)$, vale que $\dfrac{m_0}{2}t \leq \dfrac{1}{2}\hat{M}(t) \leq \dfrac{m_1}{2}t + \dfrac{m_2}{2}$.

De fato, note que

$$m_0 t \leq tM(t) \leq \hat{M}(t) \leq m_1 t + m_2 \Leftrightarrow \frac{m_0}{2}t \leq \frac{1}{2}\hat{M}(t) \leq \frac{m_1}{2}t + \frac{m_2}{2},$$

para todo $t \in [t_0, +\infty)$.

Por outro lado, inferindo sobre as condições de f, mais especificamente a condição de Ambrosetti-Rabinowitz vista em (f_3') podemos obter o próximo resultado.

Lema 2.2. Observada a condição (f_3') válida sobre f, então afirmamos que

$$F(x, \tau\xi) \geq F(x, \xi)\tau^{\theta},$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi| \geq t^*$, $\tau \geq 1$ e $\theta > 2$.

Demonstração. *i*) Para $\tau = 1$, a desigualdade do Lema é imediatamente satisfeita:

$$F(x, \xi) \geq F(x, \xi).$$

ii) Para $\tau > 1$. Fixado $|\xi| \geq t^*$, defini-se $g(x, \tau) = F(x, \tau\xi)$, $\forall x \in \overline{\Omega},\ \tau > 1$.

Note que

$$\begin{cases} g(x,\tau) = F(x,\tau\xi) &= \displaystyle\int_0^{\tau\xi} f(x,t)dt \\ g'(x,\tau) = F'(x,\tau\xi).(\tau\xi)' &= f(x,\tau\xi)\xi. \end{cases} \tag{2.12}$$

Pela condição (f_3') vale:

$$0 < \theta F(x, \tau\xi) \leq f(x, \tau\xi)\tau\xi,$$

$\forall x \in \overline{\Omega},\ |\tau\xi| \geq t^*$ e $\theta > 2$.

Logo, por (2.12), temos

$$\theta g(x, \tau) \leq g'(x, \tau)\tau \Rightarrow \frac{g'(x, \tau)}{g(x, \tau)} \geq \frac{\theta}{\tau}.$$

Integrando em $(1, \tau]$, segue que

$$\int_1^\tau \frac{g'(x,s)}{g(x,s)}ds \geq \int_1^\tau \frac{\theta}{s}ds \quad \Leftrightarrow \quad [\log g(x,s)]_1^\tau \geq \theta\,[\log s]_1^\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{g(x,\tau)}{g(x,1)}\right) \geq \theta \log \tau = \log \tau^\theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(x,\tau)}{g(x,1)} \geq \tau^\theta.$$

Ou seja,

$$\frac{g(x,\tau)}{g(x,1)} \geq \tau^\theta \Leftrightarrow \frac{F(x,\tau\xi)}{F(x,\xi)} \geq \tau^\theta.$$

Assim, $F(x,\tau\xi) \geq F(x,\xi)\tau^\theta$.

Conclui-se por *i*) e *ii*) que $F(x,\tau\xi) \geq F(x,\xi)\tau^\theta$ é satisfeito para $\forall x \in \overline{\Omega},\ \ |\xi| \geq t^*$ e $\tau \geq 1$, com $\theta > 2$.

$\square$

Após essas considerações necessárias, vamos a prova do Teorema (2.1). Para aplicar o Teorema do Passo da Montanha precisamos garantir que o funcional J satisfaz a condição Palais-Smale (PS) e a geometria do Passo da Montanha. A seguir, apresentamos o lema técnico que será útil para provar o fato de J satisfazer a condição Palais-Smale.

Lema 2.3. Toda sequência Palais-Smale para o funcional J é limitada em X.

Demonstração. Seja uma sequência Palais-Smale $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ para J, ou seja,

$$(J(u_j))_{j\in\mathbb{N}} \to c \quad e \quad \|J'(u_j)\|_X^* = \sup\{|\langle J'(u_j), \varphi\rangle| : \varphi \in X,\ \|\varphi\| = 1\} \to 0, \tag{2.13}$$

com $c \in \mathbb{R}$ e $j \to +\infty$.

Suponha, por contradição, que tenhamos $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ não limitada em X. Logo, tomando uma subsequência ainda denotada por $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ para $j \to +\infty$ podemos ter

$$\|u_j\|_X \to +\infty. \tag{2.14}$$

Agora sob as condições (M_2) e (M_3) para um $j_0 \in \mathbb{N}$ fixado, note que

$$m_0 \leq M\left(\|u_j\|_X^2\right) \tag{2.15}$$

e

$$\hat{M}\left(\|u_j\|_X^2\right) \geq \left(\|u_j\|_X^2\right) M\left(\|u_j\|_X^2\right) \Rightarrow \frac{\hat{M}\left(\|u_j\|_X^2\right)}{2M\left(\|u_j\|_X^2\right)} \geq \frac{\|u_j\|_X^2}{2}, \tag{2.16}$$

com $j \in [j_0, +\infty)$.

Assim, considerando as definições (2.8) e (2.9) de J e $\langle J'(u), \varphi\rangle$, respectivamente calculamos

$$J(u_j) - \frac{\langle J'(u_j), u_j\rangle}{\theta} = \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u_j\|_X^2\right) - \int_\Omega F(x, u_j(x))dx - M\left(\|u_j\|_X^2\right)\frac{\langle u_j, u_j\rangle}{\theta} + \int_\Omega \frac{f(x, u_j(x))u_j(x)}{\theta}dx =$$

$$= \frac{\hat{M}(\|u_j\|_X^2)}{2M(\|u_j\|_X^2)} M(\|u_j\|_X^2) - M\left(\|u_j\|_X^2\right)\frac{\|u_j\|_X^2}{\theta} + \int_\Omega \left[\frac{f(x, u_j(x))u_j(x)}{\theta} - F(x, u_j(x))\right]dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{J}(\mathrm{u}_j) - \frac{\langle J'(u_j), u_j\rangle}{\theta} = M\left(\|u_j\|_X^2\right)\left[\frac{\hat{M}(\|u_j\|_X^2)}{2M(\|u_j\|_X^2)} - \frac{\|u_j\|_X^2}{\theta}\right] + \int_\Omega \left[\frac{f(x, u_j(x))u_j(x)}{\theta} - F(x, u_j(x))\right]dx, \tag{2.17}$$

para $j \in [j_0, +\infty)$. Por (2.16), temos

$$\frac{\hat{M}(\|u_j\|_X^2)}{2M(\|u_j\|_X^2)} - \frac{\|u_j\|_X^2}{\theta} \geq \frac{\|u_j\|_X^2}{2} - \frac{\|u_j\|_X^2}{\theta} \geq 0, \quad \text{pois} \quad \theta > 2. \tag{2.18}$$

Logo, usando (2.15) e (2.18) em (2.17), obtemos

$$J(u_j) - \frac{\langle J'(u_j), u_j\rangle}{\theta} \geq m_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|_X^2 + \int_\Omega \left[\frac{f(x, u_j(x))u_j(x)}{\theta} - F(x, u_j(x))\right]dx, \tag{2.19}$$

para todo $j \geq j_0$.

O que resulta em

$$m_0\left(\frac{\theta - 2}{2\theta}\right)\|u_j\|_X^2 \;\leq\; J(u_j) - \frac{\langle J'(u_j), u_j\rangle}{\theta} - \int_\Omega \left[\frac{f(x, u_j(x))u_j(x)}{\theta} - F(x, u_j(x))\right]dx, \quad \forall j \geq j_0.$$

Seja $t^* > 0$ fixado, temos que

$$
\begin{aligned}
m_0\left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)\|u_j\|_X^2 \quad \leq & \quad J(u_j)-\frac{\langle J'(u_j),u_j\rangle}{\theta}-\int_{|u_j(x)|>t^*}\left[\frac{f(x,u_j(x))u_j(x)}{\theta}-F(x,u_j(x))\right]dx \\
& -\int_{|u_j(x)|\leq t^*}\left[\frac{f(x,u_j(x))u_j(x)}{\theta}-F(x,u_j(x))\right]dx, \quad \forall j\geq j_0.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Seja

$$
\overline{M}:=\sup\left\{\left|\frac{f(x,t)t}{\theta}-F(x,t)\right| : x\in\overline{\Omega}, |t|\leq t^*\right\}
$$

e

$$
med(\Omega) := \text{medida padrão de Lebesgue para } \Omega.
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
m_0\left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)\|u_j\|_X^2 \quad \leq & \quad J(u_j)-\frac{\langle J'(u_j),u_j\rangle}{\theta}-\int_{|u_j(x)|>t^*}\left[\frac{f(x,u_j(x))u_j(x)}{\theta}-F(x,u_j(x))\right]dx \\
& +\overline{M}med(\Omega), \qquad \forall j\geq j_0.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

A condição (f_3') nos permite afirmar que

$$
\int_{|u_j(x)|>t^*}\left[\frac{f(x,u_j(x))u_j(x)}{\theta}-F(x,u_j(x))\right]dx \geq 0. \tag{2.22}
$$

Assim, usando (2.21) e (2.22), devemos ter

$$
m_0\left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)\|u_j\|_X^2 \leq J(u_j)-\frac{\langle J'(u_j),u_j\rangle}{\theta}+\overline{M}med(\Omega), \qquad \forall j\geq j_0.
$$

Note que vale

$$
-\frac{\langle J'(u_j),u_j\rangle}{\theta}\leq \theta\|J'(u_j)\|_{X^*}\|u_j\|_X
$$

e fazendo $C:=m_0\left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)>0$, temos

$$
C\|u_j\|_X^2 \leq \; J(u_j)+\theta\|J'(u_j)\|_{X^*}\|u_j\|_X+\overline{M}med(\Omega), \quad \forall j\leq j_0.
$$

Dividindo por $\|u_j\|_X$ e passando o limite com $j \to +\infty$, chegamos a uma contradição. Portanto, devemos ter $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ limitada em X.

□

Agora podemos provar o lema sobre a condição de compacidade para o funcional contínuo J.

Lema 2.4. Seja o funcional J dado em (2.8). Então, J satisfaz a condição de compacidade Palais-Smale em X.

Demonstração. Dada $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência Palais-Smale para J em X, ou seja, $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$\Big(J(u_j)\Big)_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{limitada em } \mathbb{R}$$

e

$$\sup\{|\langle J'(u_j), \varphi\rangle| : \varphi \in X, \|\varphi\|_X = 1\} \to 0, \quad \text{com } \; j \to +\infty.$$

Devemos provar a existência de uma subsequência que converge forte em X. Conforme provado no Lema 2.3, $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em X e sendo X reflexivo, pois é espaço de Hilbert, então por [[13], Teorema 3.18], existe $u_\infty \in X$, tal que uma subsequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}'}$ converge fraco para u_∞ em X, quando $j \to +\infty$. Sendo assim, segue que

$$u_j \rightharpoonup u_\infty \;\text{ em }\; X \Leftrightarrow \langle \varphi, u_j\rangle \to \langle \varphi, u_\infty\rangle, \forall \varphi \in X, \quad \text{com} j \to +\infty,$$

ou seja, por definição do produto interno em X, temos

$$\int_Q \frac{(u_j(x) - u_j(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \;\; \to \;\; \int_Q \frac{(u_\infty(x) - u_\infty(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy, \tag{2.23}$$

com $j \to +\infty$, para qualquer $\varphi \in X$. Utilizando os resultados [[31], Lema 8] e [[12], Teorema IV.9], prova-se que

$$u_j \to u_\infty \;\text{ em }\; L^q(\mathbb{R}^N), \;\text{ para todo }\; q \in [1, 2_s^*) \tag{2.24}$$

e

$$u_j \to u_\infty \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \tag{2.25}$$

quando $j \to +\infty$.

Agora, por (2.9), podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle J'(u_j), u_j - u_\infty\rangle &= M(\|u_j\|_X^2) \cdot \langle u_j, (u_j - u_\infty)\rangle_X - \int_\Omega f(x, u_j(x))(u_j(x) - u_\infty(x))dx = \\ &= M(\|u_j\|_X^2)\left(\|u_j\|_X^2 - \int_Q \frac{(u_j(x) - u_j(y))(u_\infty(x) - u_\infty(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right) \\ &\quad - \int_\Omega f(x, u_j(x))(u_j(x) - u_\infty(x))dx\end{aligned}$$

O que implica em

$$M(\|u_j\|_X^2)\left(\|u_j\|_X^2 - \langle u_j, u_\infty\rangle\right) = \langle J'(u_j), u_j - u_\infty\rangle + \int_\Omega f(x, u_j(x))(u_j(x) - u_\infty(x))dx. \tag{2.26}$$

Por outro lado, como por hipótese $\|J'(u_j)\|_{X^*} = \sup\{|\langle J'(u_j), \varphi\rangle| : \varphi \in X, \|\varphi\|_X = 1\} \to 0$, $j \to +\infty$, obtemos

$$|\langle J'(u_j), u_j - u_\infty\rangle| \leq \|J'(u_j)\|_{X^*} \cdot \|u_j - u_\infty\|_X \to 0, \quad j \to +\infty, \tag{2.27}$$

pois $\|u_j - u_\infty\|_X$ é limitada.

Agora, por (f_2'), note que

$$\left|f(x, u_j(x))\right|\left|u_j(x) - u_\infty(x)\right| \leq c\left(\left|u_j(x) - u_\infty(x)\right| + |u_j(x)|^{q-1}\left|u_j(x) - u_\infty(x)\right|\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x, u_j(x))(u_j(x) - u_\infty(x))dx\right| &\leq \int_\Omega \left|f(x, u_j(x))\right|\left|u_j(x) - u_\infty(x)\right| dx \leq \\ &\leq c\left(\int_\Omega \left|u_j(x) - u_\infty(x)\right| dx + \int_\Omega |u_j(x)|^{q-1}\left|u_j(x) - u_\infty(x)\right| dx\right).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Usando desigualdade de Hölder e a convergência (2.24), podemos desenvolver as integrais resultantes acima. De fato,

Sejam q' (conjugado de q) e q. Se $1 \in L^{q'}$ e $|u_j(x) - u_\infty(x)| \in L^q$, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|u_j(x) - u_\infty(x)\right| dx &\le \left(\int_\Omega 1^{q'} dx\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |u_j(x) - u_\infty(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le (med(\Omega))^{\frac{1}{q'}} \underbrace{\|u_j(x) - u_\infty(x)\|_{L^q}}_{u_j \to u_\infty \text{ em } L^q} \to 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Sejam $p = \dfrac{q}{q-1}$ e q. Se $\left|u_j(x)\right|^{q-1} \in L^p$ e $|u_j(x) - u_\infty(x)| \in L^q$, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{q-1} |u_j(x) - u_\infty(x)| dx &\le \left(\int_\Omega \left|u_j(x)\right|^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |u_j(x) - u_\infty(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \|u_j(x)\|_{L^q}^{q-1} \underbrace{\|u_j(x) - u_\infty(x)\|_{L^q}}_{u_j \to u_\infty \text{ em } L^q} \to 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Assim, por (2.28), (2.29) e (2.30), temos

$$\left|\int_\Omega f(x, u_j(x))(u_j(x) - u_\infty(x)) dx\right| \to 0. \tag{2.31}$$

Logo, segue de (2.26), (2.27) e (2.31), que

$$M(\|u_j\|_X^2)\left(\|u_j\|_X^2 - \int_Q \frac{(u_j(x) - u_j(y))(u_\infty(x) - u_\infty(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy\right) \to 0, \tag{2.32}$$

quando $j \to +\infty$.

Lembrando de (M_2), observe que

$$0 < m_0 \le M(\|u_j\|_X^2), \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

e portanto, por (2.32), temos

$$\|u_j\|_X^2 - \int_Q \frac{(u_j(x) - u_j(y))(u_\infty(x) - u_\infty(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \to 0, \tag{2.33}$$

quando $j \to +\infty$.

Recordando a convergência (2.23), podemos ter $\varphi = u_\infty \in X$, e portanto

$$\langle u_j, u_\infty \rangle \to \langle u_\infty, u_\infty \rangle = \|u_\infty\|_X^2,$$

quando $j \to +\infty$.

E finalmente por (2.33), obtemos

$$\lim_{j\to+\infty} \|u_j\|_X^2 = \limsup_{j\to+\infty} \|u_j\|_X^2 = \|u_\infty\|_X^2 = \lim_{j\to+\infty} \langle u_j, u_\infty \rangle,$$

o qual utilizando as conclusões da referência [[12], Proposição III.30], garantimos $u_j \to u_\infty$, subsequência convergindo forte em X. Portanto, a condição de compacidade (PS) é satisfeita para J.

□

Vamos a prova da geometria do Passo da Montanha para o funcional J.

Lema 2.5. O funcional energia J associado ao problema (2.1) J tem a geometria do Passo da Montanha, a saber.

1. Existe $r > 0$ tal que $\inf_{\|u\|_X = r} J(u) > 0$;
2. Existe $u_0 \in X$ tal que para $\tau \to +\infty$, tem-se $J(\tau u_0) \to -\infty$.

Demonstração. Considerando a condição (f_4') para a função não-linear f, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal modo que

$$m_0 \lambda_{1,s} > \lambda + \varepsilon \Leftrightarrow m_0 > \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda_{1,s}}, \tag{2.34}$$

e existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que

$$|t| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x,t)}{t} - \lambda \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(x,t)}{t} \leq \lambda + \varepsilon, \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{2.35}$$

Então,

$$\int_0^{\xi} f(x,t)dt \leq \int_0^{\xi} (\lambda+\varepsilon)tdt \Leftrightarrow F(x,\xi) \leq \frac{\lambda+\varepsilon}{2}\xi^2 = \frac{\lambda+\varepsilon}{2}|\xi|^2, \tag{2.36}$$

para qualquer $|\xi| \leq \delta_\varepsilon$.

De (f_2'), (2.5), (M_4) e a relação (2.36), temos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u\|_X^2\right) - \int_\Omega F(x,u(x))dx = \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u\|_X^2\right) - \int_{|u(x)|\leq\delta_\varepsilon} F(x,u(x))dx \\ &\quad - \int_{|u(x)|>\delta_\varepsilon} F(x,u(x))dx \\ &\geq \frac{m_0}{2}(\|u\|_X^2) - \int_{|u(x)|\leq\delta_\varepsilon} \frac{\lambda+\varepsilon}{2}|u(x)|^2dx - C\int_{|u(x)|>\delta_\varepsilon} |u(x)|^q dx \\ &\geq \frac{m_0}{2}(\|u\|_X^2) - \frac{\lambda+\varepsilon}{2\lambda_{1,s}}\|u\|_X^2 - C\|u\|_X^q, \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde C é uma constante positiva adequada.

Sendo $\|u\|_X^2 = r$, para um $r > 0$ pequeno, obtemos

$$\frac{1}{2}\left(m_0 - \frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda_{1,s}}\right)r - Cr^{\frac{q}{2}} > 0, \tag{2.38}$$

e como $q > 2$, afirmamos

$$\inf_{\|u\|_X=r} J(u) > 0, \tag{2.39}$$

o que prova o item 1

Fixado $t^* > 0$, seja $u_0 \in X$ tal que

$$med(\{x \in \Omega : u_0(x) \geq t^*\}) > 0. \tag{2.40}$$

Considerando um termo $|\xi| \geq t^*$, para $\tau > 1$, sob a condição (M_4) e aplicando o Lema

2.2, escrevemos

$$
\begin{aligned}
J(\tau u_0) &\leq \frac{m_1}{2}\|\tau u_0\|_X^2 + \frac{m_2}{2} - \int_\Omega F(x,\tau u_0(x))dx = \\
&= \frac{m_1}{2}\|\tau u_0\|_X^2 + \frac{m_2}{2} - \int_{|u_0(x)|\geq t^*} F(x,\tau u_0(x))dx \\
&\quad - \int_{|u_0(x)|<t^*} F(x,\tau u_0(x))dx \\
&\leq m_1\frac{\|u_0\|_X^2}{2}\tau^2 - \tau^\theta \int_{|u_0(x)|\geq t^*} F(x,u_0(x))dx \\
&\quad + \frac{m_2}{2} + Mmed(\Omega),
\end{aligned}
$$

em que $M = \sup\{|F(x,\xi)| : x \in \overline{\Omega},\ |\xi| \leq t^*\}$.

Portanto, pela condição (f_3') segue que

$$J(\tau u_0) \to -\infty, \quad \text{com} \quad \tau \to +\infty,$$

o que implica no item 2.

□

2.4 Aplicação do Teorema 2.1

Apresentamos o seguinte problema.

$$
\begin{cases}
M(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u = u^3 + u^4 \ \text{ em } \ \Omega \\
u = 0 \qquad \text{em } \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega,
\end{cases}
\tag{2.41}
$$

sendo que $M(t) := 2 + \dfrac{sen(t)}{1+t^2}$, para qualquer $t \geq 0$ e consideramos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3 + t^4, \forall t \in \mathbb{R}$.

Verifica-se neste caso que $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é contínua, vale que $1 \leq M(t), \forall t \in$

$[0, +\infty)$ e por um cálculo de integral, existe $t_0 \in [0, +\infty)$ tal que

$$\int_0^t \left(2 + \frac{sen(s)}{1 + s^2}\right) ds \geq t \left(2 + \frac{sen(t)}{1 + t^2}\right), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Basta tomar t_0 como sendo a única solução positiva da equação para obter que

$$\int_0^t \left(2 + \frac{sen(s)}{1 + s^2}\right) ds - t \left(2 + \frac{sen(t)}{1 + t^2}\right) = 0.$$

Assim, M satisfaz as condições (M_1), (M_2) e (M_3) do Teorema 2.1. E ainda, vemos que f definida acima satisfaz as condições (f_1'), (f_2'), (f_3') e (f_4'). Logo, esse problema elíptico admite solução fraca, segundo o Teorema 2.1.

Capítulo 3

Sistema envolvendo equações fracionárias do tipo Kirchhoff e gênero de Krasnoselskii

3.1 Problema Proposto

Neste capítulo estudaremos uma classe de sistemas variacionais que envolvem equações Laplacianas fracionárias não-locais do tipo Kirchhoff, formalmente representada por:

$$\begin{cases} M_1(\|u\|_X^2)(-\Delta)^s u &= F_u(x,u,v) \ \text{ em } \ \Omega, \\ M_2(\|v\|_X^2)(-\Delta)^s v &= F_v(x,u,v) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = v = 0 & \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nesse sistema, $s \in (0,1)$ é o expoente fracionário com $N > 2s$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave. Consideramos as funções M_1, M_2 e F com as seguintes suposições:

As funções $M_1, M_2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ são contínuas de tal modo que existem constantes positivas a_i, b_i, α_i, $i = 1,2,3,4$, com $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ e $1 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$ satisfazendo as seguintes condições de crescimento:

$$a_1 + b_1 t^{\alpha_1} \leq M_1(t) \leq a_2 + b_2 t^{\alpha_2} \tag{3.2}$$

e

$$a_3 + b_3 t^{\alpha_3} \leq M_2(t) \leq a_4 + b_4 t^{\alpha_4} \text{ para todo } t \geq 0. \tag{3.3}$$

Mais adiante representamos graficamente alguns ensaios para essas funções de Kirchhoff com simulações sobre suas condições de crescimento.

Enquanto a função $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é tal que $\nabla F = (F_u, F_v)$ denota o gradiente de F nas variáveis u e v. São consideradas as seguintes hipóteses sobre F:

(f_1) $\nabla F(x, -z, -t) = -\nabla F(x, z, t)$ para qualquer $(x, z, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, onde $\nabla F = (F_z, F_t)$ é o gradiente de F nas variáveis z e t.

(f_2) Existem constantes $0 < c_i, d_i$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $1 < \gamma_j \leq \gamma_{j+3}$ e $1 < \eta_j \leq \eta_{j+3}$ para $j \in \{1, 2, 3\}$ tais que F_z e F_t satisfazem

$$c_1 z^{\gamma_1 - 1} + c_2 z^{\gamma_2 - 1} t^{\gamma_3} \quad \leq F_z(x, z, t) \leq \quad c_3 z^{\gamma_4 - 1} + c_4 z^{\gamma_5 - 1} t^{\gamma_6},$$

$$d_1 t^{\eta_1 - 1} + d_2 z^{\eta_2} t^{\eta_3 - 1} \quad \leq F_t(x, z, t) \leq \quad d_3 t^{\eta_4 - 1} + d_4 z^{\eta_5} t^{\eta_6 - 1},$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $z, t \in [0, +\infty)$, com $\gamma_1, \eta_1 < 2$ e

$$\max\{\gamma_4, \eta_4, \gamma_5 + \gamma_6, \eta_5 + \eta_6\} < \min_{i=1,3} \{2(\alpha_i + 1), 2_s^*\}, \tag{3.4}$$

onde $2_s^* := 2N/(N - 2s)$ denota o expoente fracionário crítico de Sobolev.

E $(-\Delta)^s$ é o operador Laplaciano fracionário definido no capítulo 1:

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N, s) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

cuja $C(N, s)$ é a constante de normalização positiva adequada.

A norma $\| \cdot \|_X = [\cdot]_s$ é a seminorma de Gagliardo, com $p = 2$, ou seja,

$$\|u\|_X := \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$$

que está definida no espaço de Sobolev fracionário X, o qual assume condições de fronteira homogêneas de Dirichlet

$$X(\Omega) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) : \ u = 0 \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

Apresentamos agora algumas representações geométricas para o comportamento das funções M_k, $k = 1, 2$. Na Figura 3.1 segue o caso em que M_k está limitada por duas retas e na Figura 3.2, fazendo $\alpha_j \geq \alpha_i > 1$, obtemos M_k entre duas curvas.

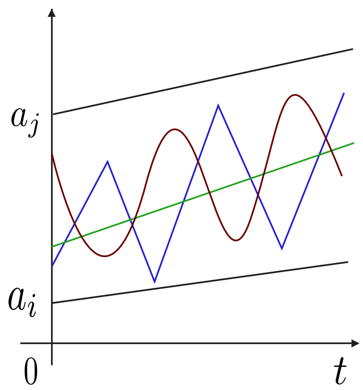

Figura 3.1: $a_i + b_i t \leq M_k \leq a_j + b_j t$.

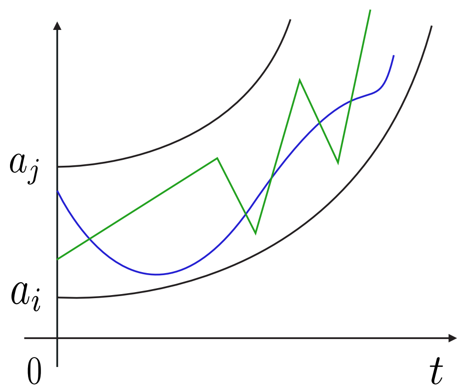

Figura 3.2: $a_i + b_i t^{\alpha_i} \leq M_k \leq a_j + b_j t^{\alpha_j}$.

Observação 3.1. As condições (f_1) e (f_2) dadas sobre F nos garantem estimar as desigualdades a seguir:

$$|F_z(x, z, t)| \leq c_3|z|^{\gamma_4 - 1} + c_4|z|^{\gamma_5 - 1}|t|^{\gamma_6},$$

$$|F_t(x, z, t)| \leq d_3|t|^{\eta_4 - 1} + d_4|z|^{\eta_5}|t|^{\eta_6 - 1},$$

para todo $(x, z, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$.

A seguir, é mostrado pela tabela, condições sobre a dimensão N em função dos possíveis resultados para o $\min_{i=1,3} \{2(\alpha_i + 1), 2_s^*\}$ de acordo com a hipótese em (3.4).

$\min\limits_{i=1,3}\{2(\alpha_i+1), 2_s^*\}$	Dimensão
$2(\alpha_i+1)$	$N < 4s$
2_s^* onde $2_s^* < 4$	$N > 4s$
2_s^* onde $2_s^* = 4$	$N = 4s$
2_s^* onde $2_s^* > 4$	$N < 4s$

Tabela 3.1: A dimensão

A seguir, os resultados principais propostos para o problema (3.1).

Teorema 3.1. Sejam $s \in (0,1)$, $N > 2s$, Ω um subconjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira contínua. Dadas $M_1, M_2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ funções satisfazendo (3.2) e (3.3), $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificando (f_1) e (f_2). Então, o problema (3.1) admite infinitas soluções fracas.

Teorema 3.2. (Regularidade) Se (u,v) é uma solução para o problema (3.1), então $u, v \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ para $s \in (0,1/2)$ e $u, v \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ para $s \in (1/2,1)$. Em particular, (u,v) resolve (3.1) no sentido clássico.

3.2 Preliminares

Seja o espaço de Sobolev fracionário Hilbertiano usual $H^s(\mathbb{R}^N)$ (ver seção (1.2) do capítulo 1). Devemos considerar o subespaço linear fechado

$$X(\Omega) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) : \ u = 0 \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}. \tag{3.5}$$

O espaço $X(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_X := \frac{C(N,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy, \tag{3.6}$$

o qual induz a norma $\|\cdot\|_X = [\,\cdot\,]_s$, onde $[\,\cdot\,]_s$ é a seminorma de Gagliardo. Por [[20], Proposição 3.6] é válida a seguinte identidade:

$$\|u\|_X^2 = \frac{2}{C(N,s)} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \ u \in X(\Omega).$$

Assim, para $u, v \in X(\Omega)$ implica que,

$$\frac{2}{C(N,s)} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^s v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dx\, dy, \qquad (3.7)$$

logo, em particular, $(-\Delta)^s$ é auto-adjunta em $X(\Omega)$.

Conforme [[20], Teoremas 6.5 e 7.1], ocorrem casos de imersões $X(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ contínuas quando $r \in [1, 2_s^*]$ e compactas para $r \in [1, 2_s^*)$. Por isso, para cada $r \in [1, 2^*)$, existe $C_r > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C_r \|u\|_X, \quad \text{para cada } u \in X(\Omega).$$

Vamos trabalhar no espaço de Hilbert $Y(\Omega)$ dado pelo espaço do produto:

$$Y(\Omega) := X(\Omega) \times X(\Omega),$$

dotado com o produto interno

$$\langle (u,v), (\varphi, \psi) \rangle_Y := \langle u, \varphi \rangle_X + \langle v, \psi \rangle_X$$

e a norma induzida

$$\|(u,v)\|_Y := (\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2)^{1/2}.$$

Considere também o espaço $L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$ $(r > 1)$, munido com a norma

$$\|(u,v)\|_{L^r(\mathbb{R}^N) \times L^r(\mathbb{R}^N)} := (\|u\|^r_{L^r(\mathbb{R}^N)} + \|v\|^r_{L^r(\mathbb{R}^N)})^{1/r}.$$

O sistema fracionário (3.1) apresenta a seguinte formulação fraca: $(u, v) \in Y(\Omega)$ é uma solução fraca para (3.1) se satisfaz

$$M_1(\|u\|_X^2)\langle u, \varphi \rangle_X + M_2(\|v\|_X^2)\langle v, \psi \rangle_X = \int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi dx + \int_\Omega F_v(x,u,v)\psi dx,$$

para todo $(\varphi, \psi) \in Y(\Omega)$.

Além disso, associado ao problema definido em (3.1), estabelecemos o funcional energia $I_s : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\begin{aligned} I_s(u,v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}_1\left(\|u\|_X^2\right) + \frac{1}{2}\widehat{M}_2\left(\|v\|_X^2\right) - \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} F_z(x,z,v)dz\right)dx \\ &- \int_\Omega \left(\int_0^{v(x)} F_t(x,u,t)dt\right)dx, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\widehat{M}_i(r) = \displaystyle\int_0^r M_i(\tau)d\tau$, $i = 1, 2$.

Pela derivada de Fréchet temos:

$$\begin{aligned} \langle I_s'(u,v),(\varphi,\psi)\rangle &= M_1(\|u\|_X^2)\langle u,\varphi\rangle_X + M_2(\|v\|_X^2)\langle v,\psi\rangle_X - \int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi dx \\ &- \int_\Omega F_v(x,u,v)\psi dx, \end{aligned} \tag{3.9}$$

para todo $(\varphi,\psi) \in Y(\Omega)$.

Desta forma, note que as soluções fracas do sistema (3.1) correspondem aos pontos críticos do funcional I_s. Temos ainda que $I_s \in C^1(Y,\mathbb{R})$. Por (f_1), afirmamos que $(u,v) = (0,0)$ constitui uma solução deste sistema.

3.3 Prova do Teorema 3.1

Primeiramente vamos enunciar e demonstrar três importantes lemas, e em seguida aplicar o teorema abstrato de Clark (Ver Apêndice).

Lema 3.1. O funcional I_s definido em (3.8) é limitado inferiormente e coercivo em $Y(\Omega)$.

Demonstração. Recorde que o funcional $I_s : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\begin{aligned} I_s(u,v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}_1\left(\|u\|_X^2\right) + \frac{1}{2}\widehat{M}_2\left(\|v\|_X^2\right) - \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} F_z(x,z,v)dz\right)dx \\ &- \int_\Omega \left(\int_0^{v(x)} F_t(x,u,t)dt\right)dx, \end{aligned}$$

onde $\widehat{M}_i(r) = \displaystyle\int_0^r M_i(\tau)d\tau$, $i = 1, 2$.

Pelas condições atribuídas sobre M em (3.2) e (3.3), tem-se

$$\frac{1}{2}\widehat{M}_1\left(\|u\|_X^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|_X^2} M_1(t)dt \geq \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|_X^2}(a_1 + b_1 t^{\alpha_1})dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\widehat{M}_1\left(\|u\|_X^2\right) \geq \frac{a_1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{b_1}{2(\alpha_1+1)}\|u\|_X^{2(\alpha_1+1)}.$$

$$\frac{1}{2}\widehat{M}_2\left(\|v\|_X^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\|v\|_X^2} M_2(t)dt \geq \frac{1}{2}\int_0^{\|v\|_X^2}(a_3 + b_3 t^{\alpha_3})dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\widehat{M}_2\left(\|v\|_X^2\right) \geq \frac{a_3}{2}\|v\|_X^2 + \frac{b_3}{2(\alpha_3+1)}\|v\|_X^{2(\alpha_3+1)}. \tag{3.10}$$

Por outro lado, através das hipóteses (f_2), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{u(x)} F_z(x,z,v)dz &\leq c_3\int_0^{u(x)} z^{\gamma_4-1}dz + c_4 v^{\gamma_6}\int_0^{u(x)} z^{\gamma_5-1}dz = \frac{c_3}{\gamma_4}u(x)^{\gamma_4} + \frac{c_4}{\gamma_5}u(x)^{\gamma_5}v(x)^{\gamma_6}\\
&\leq \frac{c_3}{\gamma_4}|u(x)|^{\gamma_4} + \frac{c_4}{\gamma_5}|u(x)|^{\gamma_5}|v(x)|^{\gamma_6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{v(x)} F_t(x,u,t)dt &\leq d_3\int_0^{v(x)} t^{\eta_4-1}dt + d_4 u^{\eta_5}\int_0^{v(x)} t^{\eta_6-1}dt = \frac{d_3}{\eta_4}v(x)^{\eta_4} + \frac{d_4}{\eta_6}u(x)^{\eta_5}v(x)^{\eta_6}\\
&\leq \frac{d_3}{\eta_4}|v(x)|^{\eta_4} + \frac{d_4}{\eta_6}|u(x)|^{\eta_5}|v(x)|^{\eta_6}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Note que $\forall \alpha, \beta > 0$, pela desigualdade de Young, vale que

$$|u(x)|^{\alpha}\cdot|v(x)|^{\beta} \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}|u(x)|^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}|v(x)|^{\alpha+\beta}.$$

Logo, substituindo em (3.11), temos

$$\int_\Omega\left(\int_0^{u(x)} F_z(x,z,v)dz\right)dx \leq \frac{c_3}{\gamma_4}\int_\Omega |u(x)|^{\gamma_4}dx + \frac{c_4}{\gamma_5}\int_\Omega |u(x)|^{\gamma_5}|v(x)|^{\gamma_6}dx$$

$$\leq \frac{c_3}{\gamma_4}\int_\Omega |u(x)|^{\gamma_4}dx + \frac{c_4}{\gamma_5}\cdot\frac{\gamma_5}{\gamma_5+\gamma_6}\int_\Omega |u(x)|^{\gamma_5+\gamma_6}dx$$

$$+\frac{c_4}{\gamma_5}\cdot\frac{\gamma_6}{\gamma_5+\gamma_6}\int_\Omega |v(x)|^{\gamma_5+\gamma_6}dx$$

$$= \frac{c_3}{\gamma_4}\|u(x)\|_{\gamma_4}^{\gamma_4} + \frac{c_4}{\gamma_5+\gamma_6}\|u(x)\|_{\gamma_5+\gamma_6}^{\gamma_5+\gamma_6} + \frac{c_4\gamma_6}{\gamma_5.(\gamma_5+\gamma_6)}\|v(x)\|_{\gamma_5+\gamma_6}^{\gamma_5+\gamma_6} \tag{3.12}$$

e

$$\int_\Omega \left(\int_0^{v(x)} F_t(x,u,t)dt \right) dx \leq \frac{d_3}{\eta_4}\int_\Omega |v(x)|^{\eta_4}dx + \frac{d_4}{\eta_6}\int_\Omega |u(x)|^{\eta_5}|v(x)|^{\eta_6}dx$$

$$\leq \frac{d_3}{\eta_4}\int_\Omega |v(x)|^{\eta_4}dx + \frac{d_4}{\eta_6}\cdot\frac{\eta_5}{\eta_5+\eta_6}\int_\Omega |u(x)|^{\eta_5+\eta_6}$$
$$+ \frac{d_4}{\eta_6}\cdot\frac{\eta_6}{\eta_5+\eta_6}\int_\Omega |v(x)|^{\eta_5+\eta_6}dx$$

$$= \frac{d_3}{\eta_4}\|v(x)\|_{\eta_4}^{\eta_4} + \frac{d_4\eta_5}{\eta_6.(\eta_5+\eta_6)}\|u(x)\|_{\eta_5+\eta_6}^{\eta_5+\eta_6} + \frac{d_4}{\eta_5+\eta_6}\|v(x)\|_{\eta_5+\eta_6}^{\eta_5+\eta_6}. \tag{3.13}$$

Recordando (3.4) e sendo válidas as imersões contínuas $X(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ no caso $r \in [1, 2_s^*)$, obtemos as seguintes desigualdades entre as normas.

$$\|\cdot\|_{\gamma 4} \leq \overline{C}\|\cdot\|_X; \quad \|\cdot\|_{\eta 4} \leq \hat{C}\|\cdot\|_X; \quad \|\cdot\|_{\gamma_5+\gamma_6} \leq C'\|\cdot\|_X \quad \text{e} \quad \|\cdot\|_{\eta_5+\eta_6} \leq C''\|\cdot\|_X. \tag{3.14}$$

Aplicando em (3.12) e (3.13), obtemos

$$\int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} F_z(x,z,v)dz \right) dx \leq C_1\|u(x)\|_X^{\gamma_4} + C_2\|u(x)\|_X^{\gamma_5+\gamma_6} + C_3\|v(x)\|_X^{\gamma_5+\gamma_6}, \tag{3.15}$$

com C_i, $(i = 1, 2, 3)$, constantes positivas.

e

$$\int_\Omega \left(\int_0^{v(x)} F_t(x,u,t)dt \right) dx \leq C_4\|v(x)\|_X^{\eta_4} + C_5\|u(x)\|_X^{\eta_5+\eta_6} + C_6\|v\|_X^{\eta_5+\eta_6}, \tag{3.16}$$

com C_j, $(j = 4, 5, 6)$, constantes positivas.

Novamente pela definição de $I_s(u, v)$ em (3.8), e por (3.10), (3.15) e (3.16), concluímos que

$$
\begin{aligned}
I_s(u,v) \quad \geq \quad & \frac{a_1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{b_1}{2(\alpha_1+1)}\|u\|_X^{2(\alpha_1+1)} + \frac{a_3}{2}\|v\|_X^2 + \frac{b_3}{2(\alpha_3+1)}\|v\|_X^{2(\alpha_3+1)} \\
& -\Big(C_1\|u(x)\|_X^{\gamma_4} + C_2\|u(x)\|_X^{\gamma_5+\gamma_6} + C_3\|v(x)\|_X^{\gamma_5+\gamma_6} + C_4\|v(x)\|_X^{\eta_4} + C_5\|u(x)\|_X^{\eta_5+\eta_6} \\
& +C_6\|v\|_X^{\eta_5+\eta_6}\Big)
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

e portanto, I_s é limitado inferiormente.

Agora, para mostrar que I_s é coercivo, observe que $\|(u,v)\|_Y \to +\infty$ implica que $\|u\|_X \to +\infty$ ou $\|v\|_X \to +\infty$. Logo, passando ao limite o resultado de (3.17), com $\|(u,v)\|_Y \to +\infty$ e pela limitação vista em (3.4), temos:

$$
\mathrm{I}_s(u,v) \to +\infty, \text{ quando } \|(u,v)\|_Y \to +\infty,
$$

o que prova que I_s é coercivo.

□

Lema 3.2. O funcional I_s é um funcional par.

Demonstração. Note que

$$
\begin{aligned}
I_s(-u,-v) \quad = \quad & \frac{1}{2}\widehat{M}_1\left(\|u\|_X^2\right) + \frac{1}{2}\widehat{M}_2\left(\|v\|_X^2\right) - \int_\Omega\left(\int_0^{-u(x)} F_z(x,z,-v)dz\right)dx \\
& - \int_\Omega\left(\int_0^{-v(x)} F_t(x,-u,t)dt\right)dx.
\end{aligned}
$$

Devemos provar que $I_s(u,v) = I_s(-u,-v)$, $\forall(u,v) \in Y(\Omega)$. De fato, pela suposição (f_1) sobre F_z e F_t, temos o seguinte:

$$
\nabla F(x,-z,-t) = -\nabla F(x,z,t) \Rightarrow \begin{cases} F_z(x,-z,-t) & = & -F_z(x,z,t) \\ F_t(x,-z,-t) & = & -F_t(x,z,t), \quad \forall(x,z,t) \in \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.18}
$$

Considerando as integrais

$$\int_0^{-u(x)} F_z(x,z,-v)dz \quad e \quad \int_0^{-v(x)} F_t(x,-u,t)dt$$

que aparecem na equação de $I_s(-u,-v)$ acima, propõe-se as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{cases} z = -\sigma \;\;\rightarrow\;\; dz = -d\sigma \;\;\rightarrow\;\; -dz = d\sigma \\ t = -\xi \;\;\rightarrow\;\; dt = -d\xi \;\;\rightarrow\;\; -dt = d\xi, \end{cases}$$

respectivamente. Aplicando estas mudanças nos seus limites das integrais correspondentes, obtemos

$$\begin{cases} -u = -\sigma \;\;\Rightarrow\;\; u = \sigma \\ 0 = -\sigma \;\;\Rightarrow\;\; 0 = \sigma \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -v = -\xi \;\;\Rightarrow\;\; v = \xi \\ 0 = -\xi \;\;\Rightarrow\;\; 0 = \xi, \end{cases}$$

respectivamente. Assim, após estas mudanças de variáveis feitas e devido as condições em (3.18), segue que

$$\int_0^{-u(x)} F_z(x,z,-v)dz = \int_0^{-u(x)} -F_z(x,z,-v)(-dz) = \int_0^{u(x)} -F_\sigma(x,-\sigma,-v)d\sigma \Rightarrow$$

$$\int_0^{-u(x)} F_z(x,z,-v)dz = \int_0^{u(x)} F_\sigma(x,\sigma,v)d\sigma. \tag{3.19}$$

Da mesma forma,

$$\int_0^{-v(x)} F_t(x,-u,t)dt = \int_0^{-v(x)} -F_t(x,-u,t)(-dt) = \int_0^{v(x)} -F_\xi(x,-u,-\xi)d\xi \Rightarrow$$

$$\int_0^{-v(x)} F_t(x,-u,t)dt = \int_0^{v(x)} F_\xi(x,u,\xi)d\xi. \tag{3.20}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&I_s(-u,-v) = \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}_1\left(\|u\|_X^2\right) + \frac{1}{2}\widehat{M}_2\left(\|v\|_X^2\right) - \int_\Omega\left(\int_0^{-u(x)} F_z(x,z,-v)dz\right)dx - \int_\Omega\left(\int_0^{-v(x)} F_t(x,-u,t)dt\right)dx = \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}_1\left(\|u\|_X^2\right) + \frac{1}{2}\widehat{M}_2\left(\|v\|_X^2\right) - \int_\Omega\left(\int_0^{u(x)} F_\sigma(x,\sigma,v)d\sigma\right)dx - \int_\Omega\left(\int_0^{v(x)} F_\xi(x,u,\xi)d\xi\right)dx = \\
&= I_s(u,v),
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

isto é, $I_s(-u,-v) = I_s(u,v)$ para todo $(u,v) \in Y(\Omega)$, concluindo assim o resultado.

□

Agora podemos enunciar e provar o próximo lema, o fato de I_s satisfazer a condição Palais-Smale.

Lema 3.3. Seja o funcional I_s dado em (3.3). Então, I_s satisfaz a condição de compacidade Palais-Smale em $Y(\Omega)$.

Demonstração. Dada $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} = (u_j, v_j)$ uma sequência Palais-Smale para I_s em $Y(\Omega)$, ou seja, $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$\Big(I_s(w_j)\Big)_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{limitada em } \mathbb{R}$$

e

$$\sup\{|\langle I_s'(w_j), (\varphi,\psi)\rangle| : (\varphi,\psi) \in Y(\Omega), \|(\varphi,\psi)\|_Y = 1\} \to 0, \quad \text{com } \ j \to +\infty.$$

Conforme provado no Lema 3.1, I_s é coercivo em $Y(\Omega)$ e pelo fato de $\Big((I_s(w_j)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $\mathbb{R}$, então $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $Y(\Omega)$.

Além disso, como $Y(\Omega)$ trata-se de um espaço reflexivo e admitindo $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ limitada em $Y(\Omega)$, de acordo com o [[13], Teorema 3.18], existe $w_\infty = (u_\infty, v_\infty) \in Y(\Omega)$, tal que uma subsequência $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} = (u_j, v_j)$ converge fraco para $w_\infty = (u_\infty, v_\infty)$ em $Y(\Omega)$, para $j \to +\infty$.

Sendo assim, segue que

$$u_j \rightharpoonup u_\infty \ \text{ em } \ X \Leftrightarrow \langle\varphi, u_j\rangle \to \langle\varphi, u_\infty\rangle, \forall\varphi \in X$$

e

$$v_j \rightharpoonup v_\infty \ \text{ em } \ X \Leftrightarrow \langle \psi, v_j \rangle \to \langle \psi, v_\infty \rangle, \forall \psi \in X,$$

com $j \to +\infty$. Ou seja, por definição do produto interno em $Y(\Omega)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u_j(x) - u_j(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \ \ \to \ \ \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u_\infty(x) - u_\infty(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy, \tag{3.22}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v_j(x) - v_j(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \ \ \to \ \ \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v_\infty(x) - v_\infty(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy, \tag{3.23}$$

para qualquer $(\varphi, \psi) \in Y(\Omega)$, com $j \to +\infty$. Utilizando resultados das referências [[31], Lema 8] e [[12], Teorema IV.9], prova-se que

$$(u_j, v_j) \to (u_\infty, v_\infty) \ \text{ em } \ L^q(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N), \ \text{ para todo } \ q \in [1, 2_s^*) \tag{3.24}$$

e

$$(u_j, v_j) \to (u_\infty, v_\infty) \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \tag{3.25}$$

quando $j \to +\infty$.

Por outro lado, como por hipótese $\sup\{|\langle I_s'(w_j), (\varphi, \psi)\rangle| : (\varphi, \psi) \in Y(\Omega), \|(\varphi, \psi)\|_Y = 1\} \to 0$, $j \to +\infty$, devemos ter

$$\langle I_s'(w_j), w_j - w_\infty \rangle = \langle I_s'(u_j, v_j), (u_j - u_\infty, v_j - v_\infty)\rangle \leq \|I_s'(u_j, v_j)\|_* \cdot \|(u_j - u_\infty, v_j - v_\infty)\|_Y \to 0,$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\langle I_s'(u_j,v_j),(u_j-u_\infty,v_j-v_\infty)\rangle = \\
&= M_1(\|u_j\|_X^2)\cdot\langle u_j,(u_j-u_\infty)\rangle + M_2(\|v_j\|_X^2)\cdot\langle v_j,(v_j-v_\infty)\rangle \\
&-\int_\Omega F_u(x,u_j,v_j)\cdot(u_j-u_\infty)dx - \int_\Omega F_v(x,u_j,v_j)\cdot(v_j-v_\infty)dx = \\
&= M_1(\|u_j\|_X^2)\left(\|u_j\|_X^2 - \int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{(u_j(x)-u_j(y))(u_\infty(x)-u_\infty(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right) \\
&+M_2(\|v_j\|_X^2)\left(\|v_j\|_X^2 - \int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{(v_j(x)-v_j(y))(v_\infty(x)-v_\infty(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right) \\
&-\int_\Omega F_u(x,u_j(x),v_j(x))(u_j(x)-u_\infty(x))dx \\
&-\int_\Omega F_v(x,u_j(x),v_j(x))(v_j(x)-v_\infty(x))dx \to 0,
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

onde $j\to+\infty$. Agora, pela desigualdade triangular e (f_2) note que

$$
\left|\int_\Omega F_u(x,u_j(x),v_j(x))(u_j(x)-u_\infty(x))dx + \int_\Omega F_v(x,u_j(x),v_j(x))(v_j(x)-v_\infty(x))dx\right|
$$

$$
\le \left|\int_\Omega F_u(x,u_j(x),v_j(x))(u_j(x)-u_\infty(x))dx\right| + \left|\int_\Omega F_v(x,u_j(x),v_j(x))(v_j(x)-v_\infty(x))dx\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_\Omega \left|c_3u_j^{\gamma_4-1}(x)+c_4u_j^{\gamma_5-1}(x)v_j^{\gamma_6}(x)\right||u_j(x)-u_\infty(x)|dx \\
&+\int_\Omega \left|d_3v_j^{\eta_4-1}(x)+d_4u_j^{\eta_5}(x)v_j^{\eta_6-1}(x)\right||v_j(x)-v_\infty(x)|dx \\
&\le \int_\Omega\left(\left|c_3u_j^{\gamma_4-1}(x)\right|+\left|c_4u_j^{\gamma_5-1}(x)v_j^{\gamma_6}(x)\right|\right)|u_j(x)-u_\infty(x)|dx \\
&+\int_\Omega\left(\left|d_3v_j^{\eta_4-1}(x)\right|+\left|d_4u_j^{\eta_5}(x)v_j^{\eta_6-1}(x)\right|\right)|v_j(x)-v_\infty(x)|dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_\Omega\left(c_3\left|u_j(x)\right|^{\gamma_4-1}|u_j(x)-u_\infty(x)| + c_4\left|u_j^{\gamma_5-1}(x)v_j^{\gamma_6}(x)\right||u_j(x)-u_\infty(x)|\right)dx \\
&+\int_\Omega\left(d_3\left|v_j(x)\right|^{\eta_4-1}|v_j(x)-v_\infty(x)| + d_4\left|u_j^{\eta_5}(x)v_j^{\eta_6-1}(x)\right||v_j(x)-v_\infty(x)|\right)dx
\end{aligned}
$$

$$= c_3 \int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{\gamma_4 - 1} |u_j(x) - u_\infty(x)| dx + c_4 \int_\Omega \left|u_j^{\gamma_5 - 1}(x) v_j^{\gamma_6}(x)\right| |u_j(x) - u_\infty(x)| dx$$

$$+ d_3 \int_\Omega \left|v_j(x)\right|^{\eta_4 - 1} |v_j(x) - v_\infty(x)| dx + d_4 \int_\Omega \left|u_j^{\eta_5}(x) v_j^{\eta_6 - 1}(x)\right| |v_j(x) - v_\infty(x)| dx.$$

Neste momento usamos a desigualdade de Hölder e em seguida a convergência em (3.24) para desenvolver as integrais resultantes acima.

Para $\int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{\gamma_4 - 1} |u_j(x) - u_\infty(x)| dx$,

$$p = \frac{\gamma_4}{\gamma_4 - 1}; \quad q = \gamma_4; \quad \left|u_j(x)\right|^{\gamma_4 - 1} \in L^p \quad \text{e} \quad |u_j(x) - u_\infty(x)| \in L^q, \ \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{\gamma_4 - 1} |u_j(x) - u_\infty(x)| dx &\leq \left(\int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{\gamma_4} dx \right)^{\frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_4}} \cdot \left(\int_\Omega |u_j(x) - u_\infty(x)|^{\gamma_4} dx \right)^{\frac{1}{\gamma_4}} \\ &\leq \|u_j(x)\|_{\gamma_4}^{\gamma_4 - 1} \cdot \underbrace{\|u_j(x) - u_\infty(x)\|_{\gamma_4}}_{u_j \to u_\infty \ \text{em} \ L^{\gamma_4}} \to 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Para $\int_\Omega \left|v_j(x)\right|^{\eta_4 - 1} |v_j(x) - v_\infty(x)| dx$,

$$p = \frac{\eta_4}{\eta_4 - 1}; \quad q = \eta_4; \quad \left|v_j(x)\right|^{\eta_4 - 1} \in L^p \quad \text{e} \quad |v_j(x) - v_\infty(x)| \in L^q, \ \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|v_j(x)\right|^{\eta_4 - 1} |v_j(x) - v_\infty(x)| dx &\leq \left(\int_\Omega \left|v_j(x)\right|^{\eta_4} dx \right)^{\frac{\eta_4 - 1}{\eta_4}} \cdot \left(\int_\Omega |v_j(x) - v_\infty(x)|^{\eta_4} dx \right)^{\frac{1}{\eta_4}} \\ &\leq \|v_j(x)\|_{\eta_4}^{\eta_4 - 1} \cdot \underbrace{\|v_j(x) - v_\infty(x)\|_{\eta_4}}_{v_j \to v_\infty \ \text{em} \ L^{\eta_4}} \to 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Por outro lado, novamente via desigualdade de Young, desigualdade de Hölder e (3.24), temos:

Para $\int_\Omega \left|u_j^{\gamma_5 - 1}(x) v_j^{\gamma_6}(x)\right| |u_j(x) - u_\infty(x)| dx$,

$$\alpha = \frac{\gamma_5 + \gamma_6 - 1}{\gamma_5 - 1}; \ \beta = \frac{\gamma_5 + \gamma_6 - 1}{\gamma_6}; \ a = \left|u_j(x)\right|^{\gamma_5 - 1}; \ b = \left|v_j(x)\right|^{\gamma_6} \Rightarrow a \cdot b \leq \frac{1}{\alpha} a^\alpha + \frac{1}{\beta} b^\beta \ \text{implica que}$$

$$\left|u_j^{\gamma_5-1}(x)v_j^{\gamma_6}(x)\right| \leq \frac{\gamma_5-1}{\gamma_5+\gamma_6-1}\left|u_j(x)\right|^{\gamma_5+\gamma_6-1} + \frac{\gamma_6}{\gamma_5+\gamma_6-1}\left|v_j(x)\right|^{\gamma_5+\gamma_6-1}$$

Logo,

$$\int_\Omega \left|u_j^{\gamma_5-1}(x)v_j^{\gamma_6}(x)\right||u_j(x)-u_\infty(x)|dx \leq \frac{\gamma_5-1}{\gamma_5+\gamma_6-1}\int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{\gamma_5+\gamma_6-1}|u_j(x)-u_\infty(x)|dx +$$

$$+\frac{\gamma_6}{\gamma_5+\gamma_6-1}\int_\Omega \left|v_j(x)\right|^{\gamma_5+\gamma_6-1}|u_j(x)-u_\infty(x)|dx.$$

E agora fazendo,

$p = \dfrac{\gamma_5+\gamma_6}{\gamma_5+\gamma_6-1}$; $q = \gamma_5+\gamma_6$; $\left|u_j(x)\right|^{\gamma_5+\gamma_6-1}, \left|v_j(x)\right|^{\gamma_5+\gamma_6-1} \in L^p$ e $|u_j(x)-u_\infty(x)| \in L^q$, temos

$$\int_\Omega \left|u_j^{\gamma_5-1}(x)v_j^{\gamma_6}(x)\right||u_j(x)-u_\infty(x)|dx \leq \frac{\gamma_5-1}{\gamma_5+\gamma_6-1}\left(\int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{\gamma_5+\gamma_6}dx\right)^{\frac{\gamma_5+\gamma_6-1}{\gamma_5+\gamma_6}}$$

$$\left(\int_\Omega |u_j(x)-u_\infty(x)|^{\gamma_5+\gamma_6}dx\right)^{\frac{1}{\gamma_5+\gamma_6}} + \frac{\gamma_6}{\gamma_5+\gamma_6-1}\left(\int_\Omega \left|v_j(x)\right|^{\gamma_5+\gamma_6}dx\right)^{\frac{\gamma_5+\gamma_6-1}{\gamma_5+\gamma_6}}$$

$$\left(\int_\Omega |u_j(x)-u_\infty(x)|^{\gamma_5+\gamma_6}dx\right)^{\frac{1}{\gamma_5+\gamma_6}}$$

$$\leq \frac{\gamma_5-1}{\gamma_5+\gamma_6-1}\|u_j(x)\|_{\gamma_5+\gamma_6}^{\gamma_5+\gamma_6-1}\underbrace{\|u_j(x)-u_\infty(x)\|_{\gamma_5+\gamma_6}}_{u_j\to u_\infty \text{ em } L^{\gamma_5+\gamma_6}} +$$

$$+\frac{\gamma_6}{\gamma_5+\gamma_6-1}\|v_j(x)\|_{\gamma_5+\gamma_6}^{\gamma_5+\gamma_6-1}\underbrace{\|u_j(x)-u_\infty(x)\|_{\gamma_5+\gamma_6}}_{u_j\to u_\infty \text{ em } L^{\gamma_5+\gamma_6}} \to 0. \tag{3.29}$$

Para $\displaystyle\int_\Omega \left|u_j^{\eta_5}(x)v_j^{\eta_6-1}(x)\right||v_j(x)-v_\infty(x)|dx$,

$\alpha = \dfrac{\eta_5+\eta_6-1}{\eta_5}$; $\beta = \dfrac{\eta_5+\eta_6-1}{\eta_6-1}$; $a = \left|u_j(x)\right|^{\eta_5}$; $b = \left|v_j(x)\right|^{\eta_6-1} \Rightarrow a\cdot b \leq \dfrac{1}{\alpha}a^\alpha + \dfrac{1}{\beta}b^\beta$, temos

$$\left|u_j^{\eta_5}(x)v_j^{\eta_6-1}(x)\right| \leq \frac{\eta_5}{\eta_5+\eta_6-1}\left|u_j(x)\right|^{\eta_5+\eta_6-1} + \frac{\eta_6-1}{\eta_5+\eta_6-1}\left|v_j(x)\right|^{\eta_5+\eta_6-1}$$

Assim,

$$\int_\Omega \left|u_j^{\eta_5}(x)v_j^{\eta_6-1}(x)\right||v_j(x)-v_\infty(x)|dx \leq \frac{\eta_5}{\eta_5+\eta_6-1}\int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{\eta_5+\eta_6-1}|v_j(x)-v_\infty(x)|dx +$$

$$+\frac{\eta_6-1}{\eta_5+\eta_6-1}\int_\Omega \left|v_j(x)\right|^{\eta_5+\eta_6-1}|v_j(x)-v_\infty(x)|dx.$$

Fazendo

$p = \dfrac{\eta_5 + \eta_6}{\eta_5 + \eta_6 - 1};\ q = \eta_5 + \eta_6;\ \left|u_j(x)\right|^{\eta_5+\eta_6-1}, \left|v_j(x)\right|^{\eta_5+\eta_6-1} \in L^p$ e $|v_j(x) - v_\infty(x)| \in L^q$, temos

$$\int_\Omega \left|u_j^{\eta_5}(x) v_j^{\eta_6-1}(x)\right| |v_j(x) - v_\infty(x)| dx \leq \frac{\eta_5}{\eta_5 + \eta_6 - 1}\left(\int_\Omega \left|u_j(x)\right|^{\eta_5+\eta_6} dx\right)^{\frac{\eta_5+\eta_6-1}{\eta_5+\eta_6}}$$
$$\left(\int_\Omega |v_j(x) - v_\infty(x)|^{\eta_5+\eta_6} dx\right)^{\frac{1}{\eta_5+\eta_6}} + \frac{\eta_6 - 1}{\eta_5+\eta_6-1}\left(\int_\Omega \left|v_j(x)\right|^{\eta_5+\eta_6} dx\right)^{\frac{\eta_5+\eta_6-1}{\eta_5+\eta_6}}$$
$$\left(\int_\Omega |v_j(x) - v_\infty(x)|^{\eta_5+\eta_6} dx\right)^{\frac{1}{\eta_5+\eta_6}}$$
$$\leq \frac{\eta_5}{\eta_5+\eta_6-1}||u_j(x)||_{\eta_5+\eta_6}^{\eta_5+\eta_6-1} \underbrace{||v_j(x) - v_\infty(x)||_{\eta_5+\eta_6}}_{v_j \to v_\infty \quad \text{em} \quad L^{\eta_5+\eta_6}} +$$
$$+ \frac{\eta_6 - 1}{\eta_5+\eta_6-1}||v_j(x)||_{\eta_5+\eta_6}^{\eta_5+\eta_6-1} \underbrace{||v_j(x) - v_\infty(x)||_{\eta_5+\eta_6}}_{v_j \to v_\infty \quad \text{em} \quad L^{\eta_5+\eta_6}} \to 0. \qquad (3.30)$$

Resumindo,

$$\int_\Omega |u_j(x)|^{\gamma_4-1}|u_j(x) - u_\infty(x)| dx \leq ||u_j||_{\gamma_4}^{\gamma_4-1}||u_j - u_\infty||_{\gamma_4} \to 0, \qquad (3.31)$$

$$\int_\Omega |v_j(x)|^{\eta_4-1}|v_j(x) - v_\infty(x)| dx \leq ||v_j||_{\eta_4}^{\eta_4-1}||v_j - v_\infty||_{\eta_4} \to 0, \qquad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_j(x)|^{\gamma_5-1}|v_j(x)|^{\gamma_6}|u_j(x) - u_\infty(x)| dx \quad &\leq \quad \frac{\gamma_5 - 1}{\gamma_5+\gamma_6-1}||u_j||_{\gamma_5+\gamma_6}^{\gamma_5+\gamma_6-1}||u_j - u_\infty||_{\gamma_5+\gamma_6} + \\ &+ \quad \frac{\gamma_6}{\gamma_5+\gamma_6-1}||v_j||_{\gamma_5+\gamma_6}^{\gamma_5+\gamma_6-1}||u_j - u_\infty||_{\gamma_5+\gamma_6} \to 0, \end{aligned} \qquad (3.33)$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_j(x)|^{\eta_5}|v_j(x)|^{\eta_6-1}|v_j(x) - v_\infty(x)| dx \quad &\leq \quad \frac{\eta_5}{\eta_5+\eta_6-1}||u_j||_{\eta_5+\eta_6}^{\eta_5+\eta_6-1}||v_j - v_\infty||_{\eta_5+\eta_6} + \\ &+ \quad \frac{\eta_6 - 1}{\eta_5+\eta_6-1}||v_j||_{\eta_5+\eta_6}^{\eta_5+\eta_6-1}||v_j - v_\infty||_{\eta_5+\eta_6} \to 0, \end{aligned} \qquad (3.34)$$

para $j \to +\infty$.

Então, por (3.31), (3.32), (3.33) e (3.34), resulta que

$$\left|\int_\Omega F_u(x, u_j(x), v_j(x))(u_j(x) - u_\infty(x)) dx + \int_\Omega F_v(x, u_j(x), v_j(x))(v_j(x) - v_\infty(x)) dx\right| \to 0,$$

com $j \to +\infty$.

Logo, devido a (3.26)

$$M_1(\|u_j\|_X^2)\left(\|u_j\|_X^2 - \langle u_j, u_\infty\rangle_X\right) + M_2(\|v_j\|_X^2)\left(\|v_j\|_X^2 - \langle v_j, v_\infty\rangle_X\right) \to 0, \tag{3.35}$$

quando $j \to +\infty$.

Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} = (u_j, v_j)$ é limitada em $Y(\Omega)$, assumimos que

$$\|u_j\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \to t_0 \in [0, \infty)$$

e

$$\|v_j\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_j(x) - v_j(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \to t_1 \in [0, \infty),$$

para $j \to +\infty$.

Caso $(t_0, t_1) = (0, 0)$, temos $(u_j, v_j) \to (0, 0)$ forte em $Y(\Omega)$ para $j \to +\infty$, e isto garante o resultado. Agora, se $t_0 > 0$ e $t_1 > 0$, como a sequência $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} = (u_j, v_j)$ é limitada, usando o fato que M_1 e M_2 são contínuas, concluímos que existem constantes positivas $\overline{c}_1$ e $\overline{c}_2$, tal que

$$0 < a_1 \le M_1(\|u_j\|_X^2) \le \overline{c}_1 \quad \text{e} \quad 0 < a_3 \le M_2(\|v_j\|_X^2) \le \overline{c}_2, \tag{3.36}$$

onde a_1 e a_3 são dadas em (3.2) e (3.3), respectivamente.

Além disso,

$$0 \le \left(\|u_j\|_X^2 - \langle u_j, u_\infty\rangle_X\right) \;\text{ e }\; 0 \le \left(\|v_j\|_X^2 - \langle v_j, v_\infty\rangle_X\right), \tag{3.37}$$

porque $(u_j, v_j) \rightharpoonup (u_\infty, v_\infty)$ em $Y(\Omega)$.

Logo, por (3.35), (3.36) e (3.37) temos

$$\|u_j\|_X^2 - \langle u_j, u_\infty\rangle_X \to 0 \;\text{ e }\; \|v_j\|_X^2 - \langle v_j, v_\infty\rangle_X \to 0,$$

o que implica

$$||u_j||_X^2 \to ||u_\infty||_X^2 = t_0 \ \text{ e } \ ||v_j||_X^2 \to ||v_\infty||_X^2 = t_1.$$

Então,

$$||u_j - u_\infty||_X^2 = ||u_j||_X^2 + ||u_\infty||_X^2 - 2\langle u_j, u_\infty\rangle_X \to 2||u_\infty||_X^2 - 2||u_\infty||_X^2 = 0,$$

e

$$||v_j - v_\infty||_X^2 = ||v_j||_X^2 + ||v_\infty||_X^2 - 2\langle v_j, u_\infty\rangle_X \to 2||v_\infty||_X^2 - 2||v_\infty||_X^2 = 0,$$

para $j \to +\infty$.

Portanto, $(u_j, v_j) \to (u_\infty, v_\infty)$ forte em $Y(\Omega)$, quando $||(u_\infty, v_\infty)||_Y^2 = t_0 + t_1$.

Por outro lado, se $t_0 > 0$ e $t_1 = 0$ (ou $t_0 = 0$ e $t_1 > 0$), procedemos como anteriormente e mostramos que

$$(u_j, v_j) \to (u_\infty, 0) \ \text{ (ou } \ (u_j, v_j) \to (0, v_\infty)),$$

em $Y(\Omega)$ com $j \to \infty$, concluindo a prova da condição de compacidade Palais-Smale.

□

Finalmente precisamos mostrar a condição *ii*) do teorema abstrato de Clark para o funcional I_s, para concluirmos a prova do Teorema 3.1.

Demonstração. Tomando um inteiro positivo fixo $m \geq 1$, definimos o subespaço linear de $Y(\Omega)$ gerado pelas autofunções $\varphi_{k,s}$ associadas aos seus respectivos autovalores $\lambda_{k,s}$ do problema (2.6),

$$V_k := span\{(0, \varphi_{1,s}), (\varphi_{1,s}, 0) \cdots, (0, \varphi_{m,s}), (\varphi_{m,s}, 0)\}, \ \text{ onde } \ k = 2m.$$

Em $Y(\Omega)$, por (3.8), (3.2), (3.3) e (f_2) podemos estimar da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
I_s(u,v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}_1\left(\|u\|_X^2\right) + \frac{1}{2}\widehat{M}_2\left(\|v\|_X^2\right) - \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} F_z(x,z,v)dz\right)dx \\
&\quad - \int_\Omega \left(\int_0^{v(x)} F_t(x,u,t)dt\right)dx \leq \\
&\leq \frac{a_2}{2}\|u\|_X^2 + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}\|u\|_X^{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2}\|v\|_X^2 + \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\|v\|_X^{2(\alpha_4+1)} \\
&\quad -\left(\frac{c_1}{\gamma_1}\int_\Omega |u(x)|^{\gamma_1}dx + \frac{c_2}{\gamma_2}\int_\Omega |v(x)|^{\gamma_3}|u(x)|^{\gamma_2}dx + \frac{d_1}{\eta_1}\int_\Omega |v(x)|^{\eta_1}dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_2}{\eta_3}\int_\Omega |u(x)|^{\eta_2}|v(x)|^{\eta_3}dx\right).
\end{aligned}
$$

Após majorar para eliminar os termos mistos, segue que

$$
\begin{aligned}
I_s(u,v) &\leq \frac{a_2}{2}\|u\|_X^2 + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}\|u\|_X^{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2}\|v\|_X^2 + \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\|v\|_X^{2(\alpha_4+1)} \\
&\quad -\left(\frac{c_1}{\gamma_1}\int_\Omega |u(x)|^{\gamma_1}dx + \frac{d_1}{\eta_1}\int_\Omega |v(x)|^{\eta_1}dx\right).
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

Agora nos limitamos ao subespaço V_k. Note que V_k possui dimensão finita, e por equivalência de normas, encontramos constantes positivas $C_1(k)$ e $C_2(k)$ que satisfazem

$$C_1(k)\|u\|_X^{\gamma_1} \leq \|u\|_{\gamma_1}^{\gamma_1} \text{ e } C_2(k)\|v\|_X^{\eta_1} \leq \|v\|_{\eta_1}^{\eta_1}, \tag{3.39}$$

para todo $(u,v) \in V_k$. Restriguindo-se a V_k, observe que, a partir de (3.38) e (3.39), podemos afirmar

$$
\begin{aligned}
I_s(u,v) &\leq \frac{a_2}{2}\|u\|_X^2 + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}\|u\|_X^{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2}\|v\|_X^2 + \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\|v\|_X^{2(\alpha_4+1)} \\
&\quad -\left(\frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)\|u\|_X^{\gamma_1} + \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)\|v\|_X^{\eta_1}\right),
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

para qualquer $(u,v) \in V_k$. Novamente pelo argumento da dimensão finita de V_k, estabelecemos uma equivalência entre as normas $\|.\|_Y$ e $\|(u,v)\|_{\mathcal{M}} = max\{\|u\|_X, \|v\|_X\}$ definidas em V_k.

Assim, caso $\|(u,v)\|_{\mathcal{M}} = \|u\|_X$, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
I_s(u,v) &\leq \frac{a_2}{2}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}\|(u,v)\|^{2(\alpha_2+1)}_{\mathcal{M}} + \frac{a_4}{2}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{M}} \\
&+ \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\|(u,v)\|^{2(\alpha_4+1)}_{\mathcal{M}} - \frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)\|(u,v)\|^{\gamma_1}_{\mathcal{M}} - \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)\|(u,v)\|^{\eta_1}_{\mathcal{M}} \\
&\leq \frac{a_2}{2}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}\|(u,v)\|^{2(\alpha_2+1)}_{\mathcal{M}} + \frac{a_4}{2}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{M}} \\
&+ \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\|(u,v)\|^{2(\alpha_4+1)}_{\mathcal{M}} - \frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)\|(u,v)\|^{\gamma_1}_{\mathcal{M}}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Enquanto que se $\|(u,v)\|_{\mathcal{M}} = \|v\|_X$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_s(u,v) &\leq \frac{a_2}{2}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}\|(u,v)\|^{2(\alpha_2+1)}_{\mathcal{M}} + \frac{a_4}{2}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{M}} \\
&+ \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\|(u,v)\|^{2(\alpha_4+1)}_{\mathcal{M}} - \frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)\|(u,v)\|^{\gamma_1}_{\mathcal{M}} - \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)\|(u,v)\|^{\eta_1}_{\mathcal{M}} \\
&\leq \frac{a_2}{2}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{M}} + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}\|(u,v)\|^{2(\alpha_2+1)}_{\mathcal{M}} + \frac{a_4}{2}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{M}} \\
&+ \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\|(u,v)\|^{2(\alpha_4+1)}_{\mathcal{M}} - \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)\|(u,v)\|^{\eta_1}_{\mathcal{M}}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Considere um número real fixado R, tal que $0 < R < 1$, e definimos o conjunto fechado e simétrico $S_R = \{(u,v) \in V_k \,; \|(u,v)\|_{\mathcal{M}} = R\}$. Assim, para cada $(u,v) \in S_R$, para (3.41), devemos ter

$$\begin{aligned}
I_s(u,v) &\leq \frac{a_2}{2}R^2 + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}R^{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2}R^2 \\
&+ \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}R^{2(\alpha_4+1)} - \frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)R^{\gamma_1} \leq \\
&\leq \left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2} + \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\right)R^2 - \frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)R^{\gamma_1} \\
&\leq R^{\gamma_1}\left[\left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2} + \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\right)R^{2-\gamma_1} - \frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)\right],
\end{aligned} \tag{3.43}$$

pois $R^{2(\alpha_2+1)} \leq R^2$ e $R^{2(\alpha_4+1)} \leq R^2$.

Por outro lado em (3.42), sabemos que

$$\begin{aligned}
I_s(u,v) &\leq \frac{a_2}{2}R^2 + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)}R^{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2}R^2 \\
&+ \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}R^{2(\alpha_4+1)} - \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)R^{\eta_1} \leq \\
&\leq \left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2} + \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\right)R^2 - \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)R^{\eta_1} \\
&\leq R^{\eta_1}\left[\left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2(\alpha_2+1)} + \frac{a_4}{2} + \frac{b_4}{2(\alpha_4+1)}\right)R^{2-\eta_1} - \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)\right].
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Fazendo $c_0 = \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{b_2}{2(\alpha_2+1)} + \dfrac{a_4}{2} + \dfrac{b_4}{2(\alpha_4+1)}$ e tomando ρ tal que

$$0 < \rho < R < \min\left\{\left(\frac{c_1C_1(k)}{\gamma_1 c_0}\right)^{1/(2-\gamma_1)}, \left(\frac{d_1C_2(k)}{\eta_1 c_0}\right)^{1/(2-\eta_1)}, 1\right\},$$

a partir do qual podemos definir um compacto $K = \{(u,v) \in V_k\,; \|(u,v)\|_{\mathcal{M}} = \rho\}$, onde devido a (3.43) e (3.44) resulta que

$$I_s(u,v) \leq \rho^{\gamma_1}\left(c_0\rho^{2-\gamma_1} - \frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)\right) < R^{\gamma_1}\left(c_0R^{2-\gamma_1} - \frac{c_1}{\gamma_1}C_1(k)\right) < 0,$$

e

$$I_s(u,v) \leq \rho^{\eta_1}\left(c_0\rho^{2-\eta_1} - \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)\right) < R^{\eta_1}\left(c_0R^{2-\eta_1} - \frac{d_1}{\eta_1}C_2(k)\right) < 0,$$

para todo $(u,v) \in K$. Logo, garantimos que

$$\sup_{(u,v)\in K} I_s(u,v) < 0 = I_s(0).$$

Além disso, pelo motivo de V_k e $\mathbb{R}^k$ serem isomorfos e K com S^{k-1} serem homeomorfos, via o colorário apresentado sobre gênero de Krasnoselskii de esferas unitárias (ver Apêndice), concluímos que $\gamma(K) = k$. □

Observação 3.2. Pelo que se percebe durante a demonstração acima, a presença dos termos $c_1z^{\gamma_1-1}$ e $d_1t^{\eta_1-1}$ na condição (f_2) é fundamental para garantir o resultado.

Portanto, como $I_s \in C^1(Y,\mathbb{R})$ e devido as consequências dos lemas anteriores provados, juntamente com a última prova da condição *ii*) pelo teorema atribuído a Clark (ver

Apêndice) concluímos que o funcional I_s definido em (3.8) tem pelo menos k pares distintos de pontos críticos.

Como k foi tomado de modo arbitrário, por uma quantidade finita de autofunções da sequência decrescente $\{\varphi_{k,s}\}_{k\in\mathbb{N}}$, generalizando para os infinitos elementos desta sequência, logo existem infinitos pontos críticos para I_s e consequentemente existem infinitas soluções fracas não-triviais para o sistema (3.1), finalizando a demonstração do Teorema 3.1.

3.4 Prova do Teorema 3.2

A prova do Teorema 3.2 recai nos Lemas 2.3 e 3.1 provados por Farias; Miyagaki; Pereira; Squassina e Zhang [21], juntamente com o Teorema 1.2 e o Colorário 1.6 por Ros-Oton e Serra [30]. De fato, reescrevendo o problema (3.1) como

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u & = & \dfrac{1}{M_1(\|u\|_X^2)} F_u(x,u,v) \ \text{ em } \ \Omega, \\ (-\Delta)^s v & = & \dfrac{}{M_2(\|v\|_X^2)} F_v(x,u,v) \ \text{ em } \ \Omega, \\ & u = v = 0 & \text{em } \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

e de acordo com as condições em (3.2) e (3.3), além da hipótese (f_2), por força destes resultados citados garantimos a prova do Teorema 3.2.

3.5 Aplicação dos Teoremas 3.1 e 3.2

Um caso efetivo de sistema não-local que exemplifique o modelo dado em (3.1), é o exposto a seguir

$$(\mathbf{P_{1/5}}) \qquad \begin{cases} \left(\delta_1 + \delta_2 \|u\|_{X(-1,1)}^2\right)(-\Delta)^{1/5} u & = & \delta_5 u^{1/3} + \dfrac{3\delta_6}{4} u^{1/3} v^{4/3} \ \text{ em } \ (-1,1), \\ \\ \left(\delta_3 + \delta_4 \|v\|_{X(-1,1)}^2\right)(-\Delta)^{1/5} v & = & \delta_7 v^{1/3} + \dfrac{3\delta_6}{4} u^{4/3} v^{1/3} \ \text{ em } \ (-1,1), \\ u = v = 0 & & \text{em } \ \mathbb{R} \backslash (-1,1), \end{cases}$$

em que δ_i, $i = 1, \cdots, 7$, são constantes positivas. Note que no caso de $(P_{1/5})$, envolve-se o termo original de Kirchhoff, a saber: $M(t) = a + bt, \quad (a, b \geq 0)$. Este sistema modela o fenômeno físico de duas cordas elásticas fixadas nos extremos, porém independente da variável do tempo, isto é, um sistema estacionário.

As cordas são representadas pelos gráficos das funções $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ e $v : [-1,1] \to \mathbb{R}$, onde ocorrem $u(-1) = u(1) = v(-1) = v(1) = 0$. Considerando o espaço Sobolev fracionário $H^{1/5}(\mathbb{R})$, podemos associar estas cordas finitas através de cordas infinitas, estendendo assim as funções u e v para $\mathbb{R}$, com $u(x) = v(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash(-1,1)$. Os termos $(\delta_1 + \delta_2\|u\|^2_{X(-1,1)})$ e $(\delta_3 + \delta_4\|v\|^2_{X(-1,1)})$ caracterizam as tensões elásticas sobre u e v, respectivamente, já as funções $\delta_5 u^{1/3} + \dfrac{3\delta_6}{4}u^{1/3}v^{4/3}$ e $\delta_7 v^{1/3} + \dfrac{3\delta_6}{4}u^{4/3}v^{1/3}$ representam as fontes de forças.

Para o modelo $(P_{1/5})$ é possível identificar as mesmas condições apresentadas sobre as estruturas do sistema original representado em (3.1). De fato, em primeiro lugar a dimensão de $\mathbb{R}^N$ corresponde a $N = 1$, o expoente fracionário é dado por $s = \dfrac{1}{5} \in (0,1)$ e $\Omega = (-1,1)$ é domínio limitado em $\mathbb{R}$. Além disso, observe que ocorre $1 = N > 2s = \dfrac{2}{5}$.

As funções de Kirchhoff são representadas por um lado por $M_1(t) = \delta_1 + \delta_2(t)$ satisfazendo (3.2) para $a_1 = a_2 = \delta_1$, $b_1 = b_2 = \delta_2$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Por outro lado, $M_2(t) = \delta_3 + \delta_4(t)$ segue (3.3) desde que $a_3 = a_4 = \delta_3$, $b_3 = b_4 = \delta_4$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$. Temos ainda $F(x,z,t) = \dfrac{3\delta_5 z^{4/3}}{4} + \dfrac{3\delta_7 t^{4/3}}{4} + \dfrac{9\delta_6 z^{4/3}t^{4/3}}{16}$, onde $F \in C^1([-1,1]\times\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sendo $\nabla F = (F_z, F_t)$, dado por

$$\begin{aligned}\nabla F(x,-z,-t) &= \left(\delta_5(-z)^{1/3} + \frac{3\delta_6(-z)^{1/3}(-t)^{4/3}}{4}, \delta_7(-t)^{1/3} + \frac{3\delta_6(-z)^{4/3}(-t)^{1/3}}{4}\right) = \\ &= -\left(\delta_5(z)^{1/3} + \frac{3\delta_6(z)^{1/3}(t)^{4/3}}{4}, \delta_7(t)^{1/3} + \frac{3\delta_6(z)^{4/3}(t)^{1/3}}{4}\right) = -\nabla F(x,z,t),\end{aligned}$$

$\forall (x,z,t) \in [-1,1]\times\mathbb{R}^2$. Com isso, F cumpre (f_1). Além disso, cumpre também (f_2), pois $c_1 = c_3 = \delta_5$ e $\gamma_1 - 1 = \gamma_4 - 1 = 1/3$ implica que $\gamma_1 = \gamma_4 = 4/3$; $c_2 = c_4 = \dfrac{3}{4}\delta_6$ e $\gamma_2 - 1 = \gamma_5 - 1 = 1/3$ acarreta $\gamma_2 = \gamma_5 = 4/3$; e $\gamma_3 = \gamma_6 = 4/3$. Analogamente, fazendo $d_1 = d_3 = \delta_7$ e $\eta_1 - 1 = \eta_4 - 1 = 1/3$ obtemos $\eta_1 = \eta_4 = 4/3$; $d_2 = d_4 = \dfrac{3}{4}\delta_6$ e $\eta_3 - 1 = \eta_6 - 1 = 1/3$ resulta em $\eta_3 = \eta_6 = 4/3$, e finalmente $\eta_2 = \eta_5$. Assim, F satisfaz (f_2).

Note ainda que $2^*_s = \dfrac{2N}{N-2s} = \dfrac{10}{3} < 4$ e temos o espaço de Sobolev fracionário $Y(-1,1) = X(-1,1)\times X(-1,1)$, com $X(\Omega) := \{u \in H^{1/5}(\mathbb{R}) : \ u = 0, \ \text{q.t.p em } \ \mathbb{R}\backslash(-1,1)\}$.

Do Teorema 3.1 afirmamos que o sistema ($P_{1/5}$) tem infinitas soluções fracas e de acordo com o Teorema 3.2, cada solução fraca resolve ($P_{1/5}$) no sentido clássico.

A seguir, apresentamos uma visão geométrica para o funcional I_s, Figure 3.3, onde $K_1 \cup K_2 = K$ é homeomorfa a S^{k-1}.

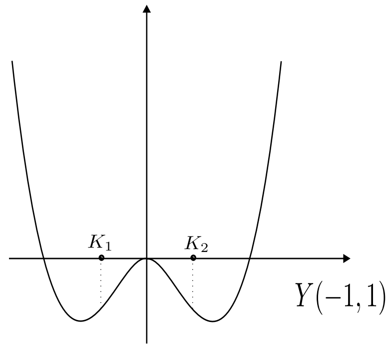

Figura 3.3: I_s par e coercivo

Apêndice A

Resultados variacionais e topológicos

Neste apêndice apresentamos o Teorema do Passo da Montanha (T.P.M.) e resultados envolvendo gênero de Krasnoselskii, culminando com o resultado abstrato devido a Clark.

Vamos iniciar expondo sobre o método do Teorema do Passo da Montanha.

A.1 Teorema do Passo da Montanha

Um dos caminhos para se estudar um problema típico na teoria das equações diferenciais parciais diz respeito a tentativa de, ao enfraquecer tal problema, encontrar soluções fracas não-triviais para ele. O meio mais natural para isso é de tornar esse problema variacional, construindo uma estrutura abstrata adequada para o seu funcionamento. Assim, a partir de um funcional contínuo associado ao problema em questão pode-se alcançar uma resposta sobre soluções possíveis através da escolha de um método variacional trabalhado com o funcional.

A maioria desses métodos preocupam-se com a existência (ou não) de pontos e valores críticos do funcional associado os quais garantem imediatamente soluções fracas ao problema. Uma pergunta imediata seria: e como encontrar esses pontos? Alguns funcionais, conforme a sua estrutura, permitem a determinação destes pontos críticos através da técnica do minimax, isto é, encontra-se o valor crítico no mínimo de todos os máximos valores pelo funcional que se possa obter a partir de um conjunto restrito do espaço definido pelo funcional. Neste sentido, um dos métodos mais usuais e simples na teoria dos pontos críticos é o chamado Teorema do Passo da Montanha (T.P.M.) ou simplesmente Passo da Montanha.

A ideia intuitiva responsável pela sugestação de seu nome se resume na situação hipotética: caso tenhamos um ponto A situado a uma altura h_0 sobre uma montanha cercada por uma cadeia de montanhas com alturas iguais ou maiores que h_0. Localiza-se um segundo ponto B fora da cadeia e a uma altura h_1 estritamente menor do que h_0. Deseja-se percorrer o menor caminho possível, partindo de A, para atravessar a um "passo" por cima da cadeia até atingir o ponto B. A solução imediata seria fixar todos os caminhos que ligam A a B, determinando em cada um deles seus valores máximos. Após isso, escolheria o menor destes máximos (minimax). O caminho sugerido (se existir) é aquele que contém esse minimax. Note que é fundamental impôr uma condição de compacidade sobre esses caminhos para evitar que o menor caminho encontrado não "fuja" para o infinito.

Nesta seção descrevemos resultados técnicos que levam até a conclusão deste teorema. Antes, vamos definir a geometria do Passo da Montanha.

Definição A.1. (Geometria do Passo da Montanha) Dado E um espaço de Banach, e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Diz-se que J satisfaz a geometria do passo da montanha se existem $e \in E$ e $r > 0$, com $\|e\|_E > r$ tais que $\inf\limits_{\|u\|_E = r} J(u) > J(0) \geq J(e)$. E está bem definido o nível do passo da montanha, isto é,

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Em Michel Willem [34], temos a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha.

Teorema A.1. (Teorema do Passo da Montanha) Considere um espaço de Hilbert H e um funcional $J \in C^2(H, \mathbb{R})$. Suponha que existam $e \in H$ e $r > 0$, tal que $\|e\|_H > r$. Suponha ainda que $\alpha := \inf\limits_{\|u\|_H = r} J(u) > J(0) \geq J(e)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u \in H$ tal que

(I) $c - 2\varepsilon \leq J(u) \leq c + 2\varepsilon$,

(II) $\|J'(u)\| < 2\varepsilon$,

em que

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Com as condições $\alpha > J(0) \geq J(e)$ e $c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$, admitimos que

$$\alpha \leq c \leq \max_{t\in[0,1]} J(te).$$

Suponha, por contradição, que as conclusões do teorema não sejam satisfeitas. Assim, não ocorre $c - 2\varepsilon \leq J(u) \leq c + 2\varepsilon$ para nenhum $\varepsilon > 0$, isto significa que para algum $\varepsilon > 0$, devemos ter

$$c - 2\varepsilon > J(u) \geq \alpha > J(0) \geq J(e) \Rightarrow c - 2\varepsilon > J(0) \geq J(e). \tag{A.1}$$

Pela definição de c, existe $\gamma(t) \in \Gamma$, tal que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon \Rightarrow \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon. \tag{A.2}$$

Usando informações do [Lema 1.14, [34]], para a aplicação composta $\beta = \eta \circ \gamma$, por (A.1) e condição (i) desse lema, vale

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0 \quad \text{e} \quad \beta(1) = \eta(\gamma(1)) = \eta(e) = e.$$

Logo, $\beta \in \Gamma$. Da condição (ii) do lema citado e pela expressão (A.2) concluímos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} J(\beta(t)) \leq c - \varepsilon.$$

O que é um absurdo, pois $c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$, para todo $\varepsilon > 0$.

Portanto, devemos ter as conclusões do teorema verdadeiras.

□

O teorema diz que o valor c é um candidato forte para valor crítico do funcional J. Contudo é preciso certificar-se. Para isso defini-se dois conceitos padrões devido Palais-Smale definidos em funcionais: sequências e condição de compacidade.

Definição A.2. Seja E um espaço de Banach e $J : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dado $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Diz-se que $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, $(PS)_c$, para J se

$$J(u_j) \to c, \quad \text{e} \quad \|J'(u_j)\|_{E^*} \to 0,$$

quando $j \to +\infty$.

Observação A.1. Uma variante desta definição: Sendo $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é dita ser uma sequência Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ para J se $J(u_j)$ é limitada em $\mathbb{R}$, e $\sup\{\,|\langle J'(u_j), \Psi\rangle|, \Psi \in E, \|\Psi\| = 1\} \to 0$, quando $j \to +\infty$.

Definição A.3. Seja $J : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1, onde E é um espaço de Banach com dual topológico E^*. Diz-se que J satisfaz a condição de compacidade Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, $(PS)_c$, quando qualquer sequência $\{u_j\}$ em E tal que

$$J(u_j) \to c, \quad \text{e} \quad \|J'(u_j)\|_{E^*} \to 0,$$

com $j \to +\infty$, possui uma subsequência convergente.

A seguir apresentamos o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti-Rabinowitz [3].

Teorema A.2. (Teorema do Passo da Montanha) Seja $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço de Banach e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ tal que $J(0_E) = 0$ e satisfazendo a condição (PS). Suponha que

(I) Existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tal que $J(u) \geq \alpha$, se $\|u\|_E = \rho$,

(II) Existe $e \in E$, com $\|e\|_E > \rho$ tal que $J(e) \leq 0$.

Então, J possui um valor crítico $c \leq \alpha$, o qual pode ser caracterizado por

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} J(u),$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Observe através do contra-exemplo apresentado em Willem [34] que não é suficiente garantir apenas a caracterização da geometria do passo da montanha sobre o funcional, sem exigir que este satisfaça a condição de compacidade (PS).

Exemplo A.1. *(Brézis-Nirenberg, 1991)* Defina o funcional $J \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dado por $J(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$. Segue que J satisfaz a geometria do passo da montanha, porém o único valor crítico para J é 0.

A.2 Gênero de Krasnoselskii

Definição A.4. Dado um espaço real Banach X. Defini-se por $\mathcal{U}$ a classe de todos os subconjuntos fechados $A \subset X \setminus \{0\}$ e simétricos com relação a origem, ou seja,

$$\mathcal{U} = \{\mathrm{A} \subset X \setminus \{0\} : A \text{ é fechado e } u \in A \text{ implica que } -u \in A\}.$$

Assim, definimos o gênero de Krasnoselskii de um subconjunto arbitrário de $\mathcal{U}$.

Definição A.5. Seja $A \in \mathcal{U}$. O gênero de A, denotado por $\gamma(A)$, é determinado pelo menor inteiro positivo k para o qual existe uma aplicação ímpar $\phi \in C(A, \mathbb{R}^k)$ tal que $\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in A$. Caso k não exista dizemos simplesmente que $\gamma(A) = +\infty$. Além disso, definimos por $\gamma(\emptyset) = 0$.

Observação A.2. Uma observação a ser feita. Na verdade, a definição acima poderia ser muito bem re-elaborada sobre uma aplicação ímpar $\hat{\phi} \in C(X, \mathbb{R}^k)$, como extensão da aplicação $\phi \in C(A, \mathbb{R}^k)$ de acordo com o resultado do Teorema de Dugundij. Além disso, se $\check{\phi}$ é tal que $\check{\phi}(u) = \frac{1}{2}(\hat{\phi}(u) - \hat{\phi}(-u))$, temos que $\check{\phi}$ também satisfaz a propriedade exigida na definição acima.

Exemplo A.2. Seja $A \subset X\backslash\{0\}$ fechado e considere $-A = \{u \in X : -u \in A\}$, logo $A \cap (-A) = \emptyset$. Então, claramente existe uma aplicação ímpar e contínua $\phi : A \cup (-A) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(u) = \begin{cases} 1, & se \quad u \in A \\ -1, & se \quad u \in -A \end{cases}$$

Assim, $\gamma(A \cup (-A)) = 1$.

Exemplo A.3. Se $A \in \mathcal{U}$ é tal que $\gamma(A) \geq 2$, então A possui uma quantidade infinita de pontos. De fato, caso contrário se A tivesse finitos pontos, poderíamos escrevê-lo como uma união de conjuntos fechados: $A = F \cup (-F)$, com F fechado e $-F = \{u \in X : -u \in F\}$. Pelo exemplo anterior afirmamos que $\gamma(A) = 1$, o que contradiz a hipótese deste exemplo.

Pesquisando em Ambrosetti e Malchiodi [2] encontramos algumas propriedades relativas ao gênero de Krasnoselskii. As propriedades a seguir são características do gênero.

Lema A.1. Dados os conjuntos $A, A_1, A_2 \in \mathcal{U}$. Declaramos que.

(i) Se $A_1 \subset A_2$, então $\gamma(A_1) \leq \gamma(A_2)$;

(ii) $\gamma(A_1 \cup A_2) \leq \gamma(A_1) + \gamma(A_2)$;

(iii) Se $\eta \in C(A, X)$ é ímpar, então $\gamma(A) \leq \gamma(\eta(A))$;

(iv) Se A é compacto, então $\gamma(A) < +\infty$ e existem uma vizinhança simétrica U_A de A tal que $\gamma(\overline{U}_A) = \gamma(A)$.

Demonstração. (i) Sejam $\gamma(A_1) = k$ e $\gamma(A_2) = m$. De $\gamma(A_2) = m$, pela definição de gênero, existe uma aplicação contínua e ímpar $\phi : A_2 \supset A_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in A_2$ e, consequentemente $\phi(y) \neq 0$, para todo $y \in A_1 \subset A_2$. Logo, $\gamma(A_1) = k \leq m = \gamma(A_2)$;

(ii) Sendo $\gamma(A_1) = k$ e $\gamma(A_2) = m$, então, de acordo com o que diz a Observação A.2, encontramos aplicações ímpares $\phi \in C(X, \mathbb{R}^k)$, $\varphi \in C(X, \mathbb{R}^m)$ onde $\phi(x_1) \neq 0$ para qualquer $x_1 \in A_1$ e $\varphi(x_2) \neq 0$ para qualquer $x_2 \in A_2$. Agora, considere a aplicação $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$(cuja a dimensão é $k + m$), definida por $\Psi(x) = (\phi(x), \varphi(x))$, $\forall x \in X$. Note que por ϕ e φ serem ambas contínuas e ímpares, garantimos que Ψ é uma aplicação contínua e ímpar. Além disso, $\Psi(x) \neq 0, \forall x \in A_1 \cup A_2$, o qual prova que

$$\gamma(A_1 \cup A_2) \leq k + m = \gamma(A_1) + \gamma(A_2);$$

(*iii*) Se $\gamma(\eta(A)) = n$, então existe $\phi \in C(X, \mathbb{R}^n)$ ímpar, tal que $\phi(x) \neq 0, \forall x \in \eta(A)$. Como $\eta \in C(A, X)$ é ímpar, segue que a composição $\psi = \phi \circ \eta : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e ímpar (de fato, composta de duas aplicações contínuas e ímpares é contínua e ímpar). Por outro lado, de $\phi(x) \neq 0, \forall x \in \eta(A)$, temos que $\psi(x) \neq 0, \forall x \in A$, pois $\psi = \phi \circ \eta$, com $\eta(A) \subset X$. Assim, pela definição de gênero, conclui-se que $\gamma(A) \leq n = \gamma(\eta(A))$;

(*iv*) Dado $x \in A$, devemos tomar $\varepsilon > 0$,para o qual $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(-x) = \emptyset$. Definindo $C_x = B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(-x)$ e, pelo mostrado no *exemplo 1.1*, temos $\gamma(C_x) = 1$. Visto que A é um conjunto compacto em $\mathcal{U}$, existe uma cobertura finita de conjuntos C_{xi}, para $1 \leq i \leq k$, determinados pelos pontos $x_1, \cdots, x_k$ tal que $A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq k} C_{xi}$. Por (i), temos

$\gamma(A) \leq k = \sum_{i=1}^{k} \gamma(C_{xi}) = \gamma(\bigcup_{1 \leq i \leq k} C_{xi})$, ou seja, $\gamma(A) < +\infty$.

Por outro lado, sendo $\gamma(A) = k$, por definição, existe $\phi \in C(A, R^k)$ ímpar, tal que $\phi(x) \neq 0, \forall x \in A$. Pela continuidade de ϕ, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\phi(x) \neq 0$ para qualquer $x \in U_\varepsilon(A)$, onde $U_\varepsilon(A)$ é uma vizinhança simétrica fechada de A. Assim, $\gamma(U_\varepsilon(A)) \leq k$. Agora como por (i) $A \subset U_\varepsilon(A)$ implica que $\gamma(A) \leq \gamma(U_\varepsilon(A))$, temos que $\gamma(U_\varepsilon(A)) = \gamma(\overline{U_\varepsilon(A)}) = \gamma(A)$, concluindo assim a prova de (iv). □

Em seguida, vamos mostrar uma propriedade fundamental na teoria sobre gênero, o qual inclusive o seu corolário se faz útil para a demonstração de um dos resultados principais apresentado no capítulo 3.

Teorema A.3. Considere $X = \mathbb{R}^N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e simétrico, onde $0 \in \Omega$. Seja $\partial\Omega$ a fronteira de Ω. Então, vale que $\gamma(\partial\Omega) = N$.

Demonstração. Note que a função identidade $I : \partial\Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $I(x) = x, \forall x \in \partial\Omega$ trata-se de uma aplicação contínua, ímpar que satisfaz a seguinte condição $I(x) \neq 0, \forall x \in \partial\Omega$, já que $0 \notin \partial\Omega$. Por isso, via a definição de gênero, resulta que $\gamma(\partial\Omega) \leq N$.

Agora suponha por contradição que ocorra $\gamma(\partial\Omega) = k < N$, assim existe $\phi \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$

ímpar, com $\phi(x) \neq 0$, $\forall x \in \partial\Omega$. Podemos assumir a aplicação estendida $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, tal que $\varphi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_k(x), 0, \cdots, 0)$. Obviamente que devido a caracterização de ϕ, a aplicação φ será igualmente contínua e ímpar, e conserva a propriedade $\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \partial\Omega$ (ou seja, $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$). Isso revela que o grau topológico $deg(\varphi, \Omega, 0)$ está bem definido.

Desde que φ é ímpar e aplicando o resultado do Teorema de Borsuk–Ulam, implica que $deg(\varphi, \Omega, 0) = 1\,(mod 2)$. Conforme a continuidade de $deg(\varphi, \Omega, .)$, segue-se que dado $\varepsilon > 0$, implica que $deg(\varphi, \Omega, z) = 1\,(mod 2)$, $\forall z \in B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^N : |z| < \varepsilon\}$. Daí, como $deg(\varphi, \Omega, z) \neq 0$, para todo $z \in B_\varepsilon$, temos que $\varphi(x) = z$, e consequentemente $\phi(x) = z$ tem solução em Ω, para qualquer $z \in B_\varepsilon$, isto é $B_\varepsilon \subset \phi(\Omega)$. Isto significa que $\mathbb{R}^N \supset B_\varepsilon \subset \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^k$, o que contradiz o fato de $k < N$. Portanto, $\gamma(\partial\Omega) = N$. □

Corolário A.1. Seja S^{N-1} a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Então, vale que $\gamma(S^{N-1}) = N$. Além disso, quando X for de dimensão infinita e separável e S a esfera unitária em X, então temos que $\gamma(S) = +\infty$.

Exemplo A.4. Se $A \in \mathcal{U}$ e existe um homeomorfismo ímpar $h : A \longrightarrow S^{N-1}$, então $\gamma(A) = N$, em particular $\gamma(S^{N-1}) = N$.

De fato, desde que $h : A \longrightarrow S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ é uma aplicação contínua e ímpar, resulta que $\gamma(A) \leq N$. Caso $\gamma(A) = j < N$ então existe uma aplicação ímpar $\phi \in C(A, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$ e, portanto determinamos a aplicação composta ímpar e contínua $\varphi = \phi \circ h^{-1} : S^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^j \setminus \{0\}$. Logo, defini-se uma extensão $\varphi' : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^j$ de φ ainda ímpar e contínua (ver Teorema de Tietze). Sendo assim, consideramos a aplicação $\hat{\varphi} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, dada por $\hat{\varphi}(x) = (\varphi'_1(x), \varphi'_2(x), \cdots, \varphi'_j(x), 0, \cdots, 0)$. Deste modo a aplicação $\hat{\varphi}$ é ímpar e contínua, pois foi obtida a partir de φ', o qual é ímpar e contínua.

Por outro lado, definindo $\varphi_0 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por $\varphi_0(x) = b$, onde $b = (b_1, b_2, \cdots, b_j, \cdots, b_N) \in \mathbb{R}^N$ é tal que $b_i \neq 0$, para algum $j + 1 \leq i \leq N$.

Observe que as aplicações $\hat{\varphi}$ e φ_0 são homotópicas, pois $H : \mathbb{R}^N \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ definida por

$$H(x,t) = (1-t)\hat{\varphi}(x) + t\varphi_0(x)$$

é contínua, $H(x,0) = \hat{\varphi}(x)$ e $H(x,1) = \varphi_0(x)$.

Por outro lado, para cada $t \in [0,1]$, temos que

$$\begin{aligned} H(x,t) &= (1-t)\hat{\varphi}(x) + t\varphi_0(x) = (1-t)\hat{\varphi}(x) + tb = \\ &= \Big((1-t)\varphi_1'(x) + tb_1, (1-t)\varphi_2'(x) + tb_2, \cdots, (1-t)\varphi_j'(x) + tb_j, tb_{j+1}, \cdots, tb_N\Big) \neq 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in S^{N-1}$. Logo, $0 \notin H([0,1] \times S^{N-1}, \mathbb{R}^N)$.

Portanto, $deg(\hat{\varphi}, B_1(0), 0) = deg(\varphi_0, B_1(0), 0) = 0$. Mas isto contraria o Teorema de Borsuk. Logo, afirmamos que $\gamma(A) = N$, e está provado o exemplo.

A seguir um teorema devido a Clark.

Teorema A.4. Seja $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale. Além disso, suponha que:

(i) J é limitado inferiormente e par;

(ii) Existe um conjunto compacto $K \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(K) = k$ e $\sup_{x \in K} J(x) < J(0) = 0$.

Então, J possui pelo menos k pares distintos de pontos críticos e seus valores críticos correspondentes são menores que $J(0)$.

Para mais informações a respeito deste método variacional sobre gênero consultar Ambrosetti e Malchiodi [2], Castro [15], G. Costa [18] e Krasnoselskii [27].

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C. O.; Corrêa, F. J. S. A. & Ma, T. F., *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*. Computers Mathematics with Applications, volume 49,nº 1, 2005, 85–93.

[2] Ambrosetti, A. & Malchiodi, A., *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*. Cambridge Stud. Adv. Math. 14, 2007.

[3] Ambrosetti, A. & Rabinowitz, P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*. J. Funct. Anal. 14, 1973, 349-381.

[4] Applebaum, D., *Lévy processes and stochastic calculus*. 2nd edn, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Volume. 116, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

[5] Autuori, G. & Pucci, P., *Elliptic problems involving the fractional Laplacian in* $\mathbb{R}^N$. J. Differential Equations 255(8), 2013, 2340–2362.

[6] Bertoin, J., *Lévy processes*. Cambridge Tracts in Mathematics, Volume 121, Cambridge Univ. Press, Cambridge. 1996.

[7] Bisci, G. M. & Pansera, B. A., *Three weak solutions for nonlocal fractional equations*. Adv. Nonlinear Stud. 14, 2014, 591–601.

[8] Bisci, G. M.; Radulescu, V. D. & Servadei, R., *Variational Methods for Non-local Fractional Problems*. Cambridge University Press. Enc. Math and its Appl. 162, 2016.

[9] Bisci, G. M. & Repovs, D., *On doubly nonlocal fractional elliptic equations*. Rend. Lincei. Mat. Appl. 26, 2015,161-176.

[10] Bisci, G. M. & Repovs, D., *Existence and localization of solutions for nonlocal fractional equations*. Asymptot. Anal., 90 (2014), 367–378.

[11] Bisci, G. M. & Servadei, R., *A bifurcation result for non-local fractional equations*. Anal. Appl. 13(4), 2015, 371–394.

[12] Brézis, H., *Analyse fonctionelle: Théorie et applications*. Masson, Paris. 1983.

[13] Brézis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2011.

[14] Caffarelli, L., *Non-local diffusions, drifts and games*. In: Nonlinear Partial Differential Equations: The Abel Symposium 2010, Abel Symposia, H. Holden and K.H. Karlsen, eds, Volume 7, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2012, 37–52.

[15] Castro, A., *Metodos variacionales y analisis functional no linear*. In: X Coloquio Colombiano de Matemática, 1980.

[16] Clark, D. C., *A variant of the Lusternik-Schnirelman theory*. Indiana Univ. Math. J. 22, 1972, 65–74.

[17] Cont, R. & Tankov, P., *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[18] Costa, D. G., *Tópicos em análise não-linear e aplicações às equações diferenciais*. In: Escola Latino-Americana de Matemática, 1986.

[19] Costa, A. C. R. & Pereira, F., *On a systems involving fractional Kirchhoff-type equations and Krasnoselskii's genus*. Math. Meth. Appl. Sci. 2018, 1-13.

[20] Di Nezza, E.; Palatucci, G. & Valdinoci, E., *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*. Bull. Sci. Math. 136, 2012, 521–573.

[21] Faria, L. F. O.; Miyagaki, O. H.; Pereira, F. R.; Squassina, M. & Zhang, C., *The Brezis-Nirenberg problem for nonlocal systems*. Adv. Nonlinear Anal,5, 2016, 85–103.

[22] Figueiredo, G. M.; Bisci, G. M. & Servadei, R., *On a fractional Kirchhoff-type equation via Krasnoselskii's genus*. Asymptot. Anal. 94, 2015, 347–361.

[23] Fiscella, A. & Valdinoci, E., *A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator*. Nonlinear Anal. 94, 2014, 156-170.

[24] Fiscella, A., *Infinitely many solutions for a critical Kirchhoff type problem involving a fractional operator*. Differential Integral Equations, Volume 29, Number 5/6, 2016, 513–530.

[25] Fiscella, A.; Bisci, G. M. & Servadei, R., *Bifurcation and multiplicity results for critical nonlocal fractional Laplacian problems*. Bull. Sci. Math., Volume 140, 2016, 14–35.

[26] Kirchhoff, G., *Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1883.

[27] Krasnoselskii, M. A., *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. MacMillan, New York, 1964.

[28] Lions, J.L., *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*. International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro, 1977- 1978, 284-346.

[29] Ma, T. F. & Rivera, J. E. M., *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem.* Applied Mathematics Letters, volume 16, no. 2, 2003, 243–248.

[30] Ros-Oton, X. & Serra, J., *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: Regularity up to the boundary*. J. Math. Pures Appl. (9)101, 2014, 275–302.

[31] Servadei, R. & Valdinoci, E., *Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators*. J. Math. Anal. Appl. 389, 2012, 887–898.

[32] Servadei, R. & Valdinoci, E., *On the spectrum of two different fractional operators*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 144, 2014, 831–855.

[33] Servadei, R. & Valdinoci, E., *Variational methods for non-local operators of elliptic type*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 33, 2013, 2015–2137.

[34] Willem, M., *Minimax Theorems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhauser.v.24, 1996.