



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

**ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA DO MÉTODO
DE DIFERENÇAS FINITAS COMPACTAS PARA
PROBLEMAS PARABÓLICOS COM ATRASO**

Wilson Rodriguês Oliveira

BELÉM-PA

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Wilson Rodrigues Oliveira

**ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA DO MÉTODO
DE DIFERENÇAS FINITAS COMPACTAS PARA
PROBLEMAS PARABÓLICOS COM ATRASO**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e, defendida por Wilson Rodrigues Oliveira como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

BELÉM-PA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48e Oliveira, Wilson Rodrigues
Estabilidade e Convergência do Método de Diferenças Finitas
Compactas para Problemas Parabólicos com Atraso / Wilson
Rodrigues Oliveira. — 2020.
ix, 76 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais,
Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. Equação Diferencial com Atraso. Equação de Difusão
Generalizada. Método de Diferenças Finitas Compactas.. 2.
Email: wroacsm17@gmail.com;
wilson.oliveira1994.wo@gmail.com. 3. Universidade Federal
do Pará-UFPA. I. Título.

CDD 518

Wilson Rodriguês Oliveira

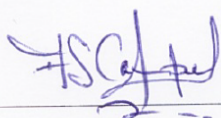
ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS COMPACTAS PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS COM ATRASO

Dissertação apresentada ao curso
de mestrado em Matemática e Estatística
UFPA, como pré-requisito para a obtenção
do Título de Mestre em Matemática

Belém, 04 de Março de 2020.

Resultado: APROVADO

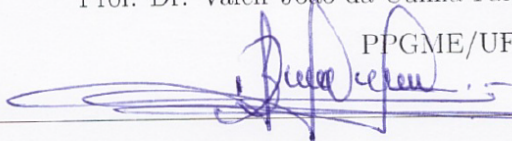
Banca Examinadora



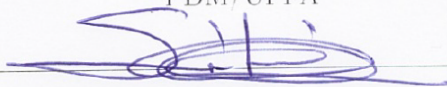
Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo -Orientador
PPGME/PDM/UFPA



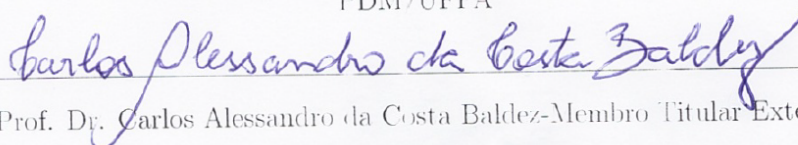
Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias-Membro Titular Interno
PPGME/UFPA



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior-Membro Titular Externo
PDM/UFPA



Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro-Membro Titular Externo
PDM/UFPA



Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez-Membro Titular Externo
UFPA-Campus Bragança

*Aos meus pais, Wilson Corrêa de Oliveira
e Orminda Maria dos Santos Rodriguês.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pelo dom da vida e por todas as maravilhas a que me proporcionou, conduzindo pelas veredas seguras nesta vida de estudos, mesmo em meio as dificuldades e obstáculos encontrados.

Aos meus pais, Wilson Corrêa de Oliveira e Maria Ormindia dos Santos Rodriguês, que apesar da distância que nos separou no período do curso, dos momentos árduos que muitas vezes a saudade me obrigou suportar, mesmo assim, deram-me força e coragem para continuar nessa jornada e que nunca deixaram de ser para mim, a mais forte razão do meu porto seguro, da confiança incontestável, no apoio contínuo e acima de tudo, no amor que sempre me transmitiram nos bons e maus momentos de desespero.

À minha namorada, Ana carla de Sarges Miranda, parceira de todas as horas e todos os momentos alegres e tristes que juntos passamos. Por todo apoio, encorajamento e acima de tudo, todo amor que me proporcionou e proporciona, sendo para mim o meu alicerce e pilar que me sustenta nessa caminhada. Obrigado pelo ombro amigo, sem o qual não poderia, também, vencer essa luta.

Aos meus amigos, parceiros de jornada e de luta.

Nesse momento apenas posso afirmar que amizade é algo que está sempre acima de qualquer outro valor terreno.

Aos meus professores, especialmente ao Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo por ter acreditado em meu potencial, para o desenvolvimento e conclusão desse trabalho que sem suas orientações, jamais poderia atingir esse patamar.

”O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Código de Financiamento 001”

Enfim, de maneira geral, a todos que me ajudaram de forma direta ou indiretamente para conclusão desse trabalho.

Resumo

O método de diferenças finitas compactas torna-se mais aceitável para aproximar o operador de difusão do que o método de diferenças finitas centrais, pois proporciona um melhor resultado de convergência na direção espacial sem aumentar o custo computacional. Neste trabalho, aplica-se o método de diferenças finitas compactas e o método- θ linear para resolver numericamente uma classe de problemas parabólicos com atraso. A estabilidade do esquema numérico totalmente discreto é investigada usando a condição do raio espectral. Quando $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, uma condição suficiente e necessária é apresentada para mostrar que o esquema numérico totalmente discreto é estável. Quando $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, mostra-se que o método numérico totalmente discreto é incondicionalmente assintoticamente estável. Além disso, a consistência e posteriormente convergência do esquema totalmente discreto é estudada. Finalmente, vários exemplos numéricos são apresentados para ilustrar nossos resultados teóricos.

Palavras-chave: Equação Diferencial com Atraso. Equação de Difusão Generalizada. Método- θ linear. Método de Diferenças Finitas Compactas.

Abstract

The compact finite difference method becomes more acceptable to approximate the diffusion operator than the central finite difference method since it gives a better convergence result in spatial direction without increasing the computational cost. In this paper, we apply the compact finite difference method and the linear θ -method to numerically solve a class of parabolic problems with delay. Stability of the fully discrete numerical scheme is investigated by using the spectral radius condition. When $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, a sufficient and necessary condition is presented to show that the fully discrete numerical scheme is stable. When $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, the fully discrete numerical method is proved to be unconditionally asymptotically stable. In addition, a consistency and more recent convergence of the fully discrete scheme is studied. Finally, several numerical examples are presented to illustrate our theoretical results.

Keywords: Differential Equation with Delay. Generalized Diffusion Equation. Linear θ - method. Compact Finite Differences Method.

Sumário

0.1	Apresentação do Problema	5
1	Preliminar	10
1.1	Aproximação por Diferenças Finitas	10
1.2	Expansões em Séries de Taylor	11
1.3	Consistência, convergência e estabilidade	13
1.3.1	Consistência	14
1.3.2	Convergência	14
1.3.3	Estabilidade	15
1.4	Uma revisão para o método- θ linear	16
1.5	Operadores diagonalizáveis	18
1.5.1	Polinômio característico	19
1.6	Problemas de estabilidade clássica	21
2	O método numérico totalmente discreto	22
2.1	Os autovalores de uma matriz tridiagonal comum	26
3	Estabilidade assintótica	28
3.1	Estabilidade: para $\theta \in [0, 1/2)$	30
3.2	Estabilidade: para $\theta \in [1/2, 1]$	44
4	Análise da convergência	52

4.1	O erro Local de Truncamento do Método- θ Numérico	56
4.2	A Convergência do Método- θ	64
5	Experimentos numéricos	65
5.1	Testes de Estabilidade	65
5.1.1	Ilustração numérica dos resultados atuais de estabilidade	65
5.1.2	Comparação com o trabalho existente	68
5.2	Testes de Convergência	70
6	Conclusão	72
	Bibliografia	76

Introdução

Por que estudar equações diferenciais com atrasos no tempo, quando tanto se sabe sobre equações sem atrasos e são muito mais fáceis? De acordo com Kuang(1993, p.3), "a resposta, é que muitos dos processos, naturais e artificiais, em biologia, medicina, química, física, engenharia, economia etc. envolvem atrasos no tempo. Goste ou não, os atrasos ocorrem com frequência, em quase todas as situações, que ignorá-los é ignorar a realidade".

Um exemplo simples da natureza é o reflorestamento. Uma floresta cortada, após o replantio, levará pelo menos 20 anos antes de atingir qualquer tipo de maturidade. Para certas espécies de árvores pode ser muito mais longo. Portanto, qualquer modelo matemático de colheita e regeneração florestal claramente deve ter atrasos de tempo embutidos nele.

Assim, em muitas aplicações assumimos que o sistema em consideração é governado por um princípio de causalidade, isto é, o estado futuro do sistema é independente do passado e é determinado exclusivamente pelo presente, Devemos ter em mente que esta é apenas uma primeira aproximação à situação real. Um modelo mais realista deve incluir parte da história passada do sistema.

Desta maneira, é evidente que atrasar equações diferenciais fornece um meio poderoso de modelar muitos fenômenos da natureza em campos científicos. Por exemplo, em *ecologia populacional*, considere $u(t)$ o número de indivíduos no instante t . Um modelo eficiente para modelar o crescimento populacional é dado por

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left[1 - \frac{u(t - \tau)}{K} \right], \quad (0.1)$$

onde r é uma constante positiva chamada crescimento intrínseco e τ é o termo de atraso, o qual pode surgir de uma grande variedade de causas, como período de incubação, duração de gestação e lenta substituição de suprimentos alimentares. Maiores detalhes sobre a Eq. (0.1),

consultar [3].

Em biologia, imagine uma população biológica composta por indivíduos adultos e juvenis. Suponha que $N(t)$ denota a densidade de adultos no tempo t . Suponha que a duração do período juvenil seja exatamente h unidade de tempo de cada indivíduo. Suponha que os adultos produzam descendentes a uma taxa per capita α e que sua probabilidade por unidade de tempo de morte seja μ . Suponha que um recém-nascido sobreviva ao período juvenil com probabilidade ρ e coloque $r = \rho\alpha$. Então, a dinâmica de N pode ser descrita pela equação diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\mu N(t) + rN(t-h), \quad (0.2)$$

que envolve um termo não-local, onde N tem argumento $(t-h)$, uma vez que os recém-nascidos se tornam adultos com algum atraso, a taxa de variação de N envolve os valores atuais e passados de N . Tais equações são chamadas de Equações diferenciais funcionais retardadas (EDFR) ou, alternativamente, Equações de atraso. Ver mais em [2].

Outros exemplos podem ser encontrados em outros ramos científicos ([1]-[4]). Uma característica principal dos modelos é que a taxa de variação da quantidade depende não apenas da situação atual, mas também da história passada e estudos detalhados do mundo real, motivam a considerar tal fato.

Ao considerar a aplicabilidade de esquemas numéricos para resolver equações diferenciais com atraso, é importante analisar a estabilidade, consistência e convergência dos métodos. Um método amplamente utilizado é aplicar o esquema numérico proposto à seguinte equação de teste

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda u + \mu u(t-\tau), \quad (0.3)$$

onde λ e μ são parâmetros, e τ é o termo de atraso. Por exemplo, Liu and Spijker [5] investigaram a estabilidade do método- θ sob a hipótese $Re(\lambda) < -|\mu|$. Guglielmi [6] considerou ainda a estabilidade dependente do atraso do método. Zhao et al. [8] estudaram a estabilidade dependente de atraso dos métodos de valor de contorno quando $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Li e Zhang [9] desenvolveram alguns métodos Runge – Kutta de alta ordem que preservam a estabilidade dependente do atraso da Eq. teste (0.3). Mais detalhes sobre isso podem ser encontrado em uma lista incompleta de referências ([10]-[17]) os livros [2] e [4] e assim por diante.

Ao se referir a alguns problemas do mundo real, a versão espacial deve ser levada em conta. Esta pesquisa produz a seguinte equação reação-difusão típica com atraso,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = C_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) + C_2 u(x, t - \tau), \quad (0.4)$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ são parâmetros e τ é o termo de atraso. Esta equação (0.4) foi objeto de estudo de alguns autores, por exemplo, Zubik-Kowal [18] estudou as propriedades de contratividade dos métodos θ . Huang e Vandewalle [19] estudaram a estabilidade dependente do atraso das EDPs com atraso. Li et al. [20] introduziram os métodos compactos de diferenças finitas para discriminar o operador de difusão e consideraram a estabilidade a longo prazo de um esquema numérico totalmente discreto. Vandewalle e Gander [21] obtiveram convergência dos métodos de Schwarz sobrepostos. Wu et al. [22] também apresentou estimativas de erros mais precisos sobre os métodos de Schwarz sobrepostos. Para mais detalhes sobre o tópico bem como suas gerações, encaminhamos os leitores a ([23]-[27]) e as referências nele contidas.

0.1 Apresentação do Problema

Neste trabalho, investiga-se através do método- θ compacto a solução numérica da equação abaixo

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = r_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) + r_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t - \tau), \quad (0.5)$$

com as seguintes condições iniciais e de contorno

$$u(x, t) = u_0(x, t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad x \in \Omega = [0, \pi]$$

$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq -\tau$, onde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ são parâmetros e τ é o termo de atraso. Tal equação, pertence à uma classe de equação de difusão, onde, entendemos por difusão, um processo natural que leva um dado sistema a uma situação de equilíbrio [40] (Ex.: substância P "espalhando-se" na água). Fisicamente, a difusão é um processo em que substâncias são transportadas de uma região muito concentrada para uma região pouco concentrada de modo aleatório por algum meio, de modo a obter um sistema completamente homogêneo. Assim sendo, podemos dizer que esse fenômeno de difusão é natural, uma vez que ocorrem a todo momento na natureza de forma contínua e intensa. Portanto, a equação

de difusão é um modelo adequado para estudar fenômenos de dispersão de substâncias no meio. No entanto, na equação (0.5) há o acréscimo do termo $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t - \tau)$, o qual sugere que tal classe de equação é mais eficiente, pois leva em consideração, possíveis atrasos nos processos difusivos, ou seja, ao colocar o termo de atraso τ tornamos o modelo mais real.

Tal equação, também é usada como equação teste e tem sido extensivamente estudada. A equação (0.5) tem natureza complexa, pois suas soluções são difíceis de serem obtidas. Tendo em vista tal fato, nos últimos anos, pesquisadores, buscam estabelecer resultados de estabilidade numérica assintótica, dentre os quais destacamos os métodos numéricos de alta ordem para suas soluções aproximadas. Neste contexto, alguns autores contribuíram e vem contribuindo com suas pesquisas. Aqui, citamos 3 artigos, com seus respectivos autores, que foram fundamentais para este trabalho. O primeiro é

Asynptotic stability analysis of the linear θ -method for linear parabolic differential equations with delay,

do autor Hongiong Tian[31]. Neste artigo, o autor estuda a estabilidade assintótica do método- θ linear para equações diferenciais funcionais parciais (EDFP) com atraso. É apresentada uma condição suficiente para que as EDFP subjacentes sejam assintoticamente estáveis. O mesmo investigou a estabilidade numérica do método- θ linear usando a condição do raio espectral. Quando $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, é estabelecida a condição

$$a + b < \frac{1}{[1 + \cos(\Delta x)](1 - 2\theta)}, \quad (0.6)$$

onde $a = \frac{r_1 \Delta t}{\Delta x^2}$ e $b = \frac{r_2 \Delta t}{\Delta x^2}$. Tal condição é suficiente e necessária para que o método- θ linear seja assintoticamente estável. Quando $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, o método- θ linear é incondicionalmente estável.

O segundo artigo é dos autores Qifeng Zhang, Mengzhe Chen, Yinghang Xu, Dinghua Xu[35], intitulado

Compact θ - method for the generalized delay diffusion equation,

no qual, tais autores estabelecem resultados de estabilidade numérica assintótica do método- θ compacto para a Eq. (0.5). Mostram que o método é assintoticamente estável se, e somente

se,

$$a + b < \frac{10 - \cos(\Delta x)}{12[1 + \cos(\Delta x)](1 - 2\theta)}, \quad \text{para } \theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (0.7)$$

e incondicionalmente assintoticamente estável para $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, respectivamente. Os resultados de convergência na norma do máximo são estudados de acordo com a análise de consistência e o Teorema de Lax, além disso, tais autores comparam a condição de estabilidade apresentada em (0.7) com (0.6), e observam

$$a + b < \frac{10 - \cos(\Delta x)}{12[1 + \cos(\Delta x)](1 - 2\theta)} < \frac{1}{[1 + \cos(\Delta x)](1 - 2\theta)}, \quad (0.8)$$

o que manifesta que maior resolução e precisão na dimensão espacial, diminui a região estável.

Um pouco antes deste último trabalho, Luiz Blanco-Cocom e Eric Ávila-Vales[32], no artigo

Convergence and stability analysis of the θ -method for delayed diffusion mathematical models,

consideraram a seguinte equação,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + a^2 c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t - \tau) + ru(x, t) + du(x, t - \tau), \quad (0.9)$$

com a seguinte condição inicial e contorno de Dirichlet,

$$u(x, t) = H(x, t), \quad \forall (x, t) \in [0, \pi] \times [-\tau, 0]$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

foi proposto o método- θ para tratar problemas mistos para equação de difusão e reação retardada. As condições para que o modelo proposto seja assintoticamente estável são estudadas. A estabilidade numérica do esquema proposto é analisada através da condição do raio espectral e, em seguida, uma condição necessária e suficiente para que o esquema seja assintoticamente estável em ambos os casos, quando $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ e quando $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ é apresentada, como vemos em (33) e (34) do artigo do Blanco[32].

Além disso, em [28], Green e Stech obtiveram exclusividade, existência local e continuação global da Eq. (0.5) Houwen e Sommeijer [29] discutiram estabilidade de alguns

esquemas preditores-corretores. Tian [30] estudou a estabilidade independente de atraso do método de Euler e Método de Crank-Nicolson. Liang [33] introduziu o método de Galerkin para discriminar a variável espacial e obteve estabilidade e convergência do método numérico discreto. Castro et al. [34] obteve convergência derivada de um método numérico explícito para resolver a equação com coeficientes variáveis no tempo.

Neste estudo, referente ao artigo de Fengyam Wu, Dongfang Li, Jinming Wen, Jinqiao Duan, cujo tema intitula este trabalho, investigamos ainda a estabilidade, consistência e consequentemente, a convergência de um método numérico totalmente discreto para resolver o problema (0.5) com as condições iniciais e de contorno dadas acima.

O método de diferenças finitas compactas é usado para discretizar o operador de difusão e o método- θ linear para discretizar a equação (0.5). Empregando a condição do raio espectral, discutimos a estabilidade do esquema numérico totalmente discreto. É mostrado que quando $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, o esquema numérico é assintoticamente estável sob a restrição de tamanho de passo,

$$\frac{1}{6} + (a + b)(1 - 2\theta) < \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)}, \quad (0.10)$$

por outro lado, quando $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, o esquema numérico proposto é incondicionalmente estável. Então, através do Teorema de Lax a convergência do esquema numérico totalmente discreto é obtido.

O método proposto é de $O(\Delta x^4)$ ordem na direção espacial. Dá melhor resultado de convergência do que o método central de diferenças finitas de segunda ordem padrão sem aumentar o custo computacional.

Os autores do artigo estudado neste trabalho[7], obtiveram resultados semelhantes aos de Zhang et. al. [35], no entanto, os resultados de estabilidade para $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ em [35] dados em (0.7) são diferentes da exibida em (0.10), e questionáveis. Fato este confirmado ao longo do trabalho. Portanto, verificamos que a região de estabilidade do presente trabalho é menor que a de (0.7).

O artigo está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, o qual denominamos de preliminar, devidamente pelo fato deste tratar de conceitos relevantes ao entendimento deste trabalho, tais como: Aproximações por Diferenças finitas, Expansões em Séries de Taylor, Consistência, Convergência e Estabilidade, uma revisão para o Método θ - Linear,

bem como Operadores Diagonalizáveis.

No Capítulo 2, apresentamos o método numérico totalmente discreto para resolver o teste Eq. (0.5).

No Capítulo 3, discutimos a estabilidade do método proposto em duas seções, respectivamente para $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ e $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

No Capítulo 4, estudamos a convergência do método em questão, fazendo uso da análise de estabilidade do capítulo precedente, via Teorema de Lax.

No Capítulo 5, fazemos vários exemplos numéricos para ilustrar os resultados teóricos. Finalmente, conclusões e discussões estão resumidas no Capítulo 6.

Capítulo 1

Preliminar

1.1 Aproximação por Diferenças Finitas

Consideremos uma Equação Diferencial Parcial (EDP), buscamos a solução computacional nos pontos de uma região R , usando técnicas numéricas de solução. Note que, não é possível tratar a região R como contínua, devido esta possuir infinitos pontos, enquanto que o método obtém solução em alguns pontos escolhidos, isto é, discretizamos o domínio, ou seja, dividimos o mesmo em N pontos, formando um conjunto de pontos discretos, denominado de *malha*, na qual obtiremos a solução.

Definição 1.1. (*Equação de Diferenças Finitas-EDF*)

É uma equação algébrica resultante do processo que consiste de escrever os termos da EDP em função dos pontos da malha, obtendo expressões denominadas de aproximações por diferenças finitas.

A **EDF** é escrita para cada ponto da região discretizada em que desejamos calcular a solução do problema. Resolvendo as EDFs, encontramos a solução aproximada do problema, cuja mesma é passível de erros, inerentes de vários fatores, como por exemplo, arredondamentos nos cálculos computacional.

1.2 Expansões em Séries de Taylor

As aproximações de diferenças finitas têm como base as expansões em séries de Taylor de uma função u . Supondo que u seja contínua no intervalo $[a, b]$ de interesse e que possua derivadas até ordem n contínuas nesse intervalo, o Teorema de Taylor, permite escrever, para todo ponto $x \in [a, b]$,

$$u(x) = u(x_0) + \Delta x \frac{du}{dx}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3}(x_0) + \cdots + R_n, \quad (1.1)$$

em que $\Delta x = x - x_0$ e R_n é o resto, definido como

$$R_n = \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n u}{dx^n}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Por vezes, consideramos malhas unidimensionais, em que os pontos são igualmente espaçados, sendo assim, se x_{i-1} , x_i são pontos de tal malha, podemos definir $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $\forall i$.

Suponha que, desejamos determinar a primeira derivada de uma função u no ponto $x_i = x_0 + i\Delta x$, a qual será denotada por $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i$. Expandindo $u(x_i + \Delta x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_i , temos

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i + \cdots, \quad (1.2)$$

de onde vem,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} + \left[-\frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i - \cdots \right]. \quad (1.3)$$

A expressão (1.3) indica que a primeira derivada é igual ao quociente

$$\frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x},$$

mais os termos da série de Taylor até R_n

$$ELT = \left[-\frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i - \cdots \right]. \quad (1.4)$$

Ao conjunto desses termos é dado o nome de *Erro Local de Truncamento (ELT)*.

Esse erro aparece devido à utilização de um número finito de termos na série de Taylor.

Observação 1.1.

O ELT varia com a redução do espaçamento Δx , isto é, com o refinamento da malha.

Lembrando que $\frac{\partial^j u}{\partial x^j}$ são contínuas em $[a, b]$ para $j = 1, 2, \dots, N$, logo existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right| \leq C, \quad 1 \leq j \leq N$$

considerando $0 < \Delta x < 1$, podemos supor que o termo dominante do ELT será o primeiro, isto é, aquele com a menor potência de Δx .

Afirmção 1.1. *O primeiro termo do ELT exerce maior influência sobre a solução numérica.*

Com efeito, note que

$$\begin{aligned} |ELT| &\leq C \left[\frac{\Delta x}{2!} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots \right] = C\Delta x \left[\frac{1}{2!} + \frac{\Delta x}{3!} + \dots \right] \\ &= C\Delta x S(\Delta x) \leq CP\Delta x, \end{aligned}$$

onde $S(\Delta x) = \left[\frac{1}{2!} + \frac{\Delta x}{3!} + \dots \right]$ e $P > 0$ é tal que $P = \max_{x \in (0,1)} |S(\Delta x)|$. Assim definindo $K = CP$, segue

$$|ELT| \leq K\Delta x \tag{1.5}$$

A desigualdade (1.5) sugere que esse erro decresce de forma linear com o refinamento da malha. Dessa forma, os termos do ELT (1.4) serão representados por $\mathcal{O}(\Delta x)$.

Observação 1.2. *Para simplificar a notação usamos u_i para $u(x_i)$.*

Com isso, a expressão (1.3) é dada por,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \tag{1.6}$$

A expressão (1.6) de diferenças finitas representa uma aproximação de primeira ordem para a primeira derivada de u , e dizemos que esta aproximação de diferenças é progressivas ou avançadas, pois utiliza um ponto adiante de x_i .

Podemos obter de forma semelhante uma outra aproximação de diferenças finitas para a primeira derivada de u , através da expansão de $u(x_i - \Delta x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_i , obtendo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (1.7)$$

Note que a expressão (1.7) utiliza um ponto atrás, í. é, x_{i-1} , desta razão, a mesma é denominada de aproximação por diferenças atrasadas.

Também, podemos obter aproximação de $\mathcal{O}(\Delta x)^2$ para a primeira derivada de u , dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2, \quad (1.8)$$

obtida através da manipulação conveniente da expansão em séries de Taylor de $u(x_i \pm \Delta x)$. Tal aproximação é denominada de aproximação por diferenças centrais.

Ainda utilizando as expansões de $u(x_i \pm \Delta x)$ em séries de Taylor, podemos combiná-las para que a primeira derivada de u seja eliminada, e desta maneira, obtemos a seguinte aproximação para a segunda derivada de u ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2, \quad (1.9)$$

para maiores detalhes, consulte [41].

1.3 Consistência, convergência e estabilidade

Quando resolvemos uma EDP numericamente, é natural questionar se a solução calculada se aproxima, de alguma forma, da solução real da EDP. Essa não é uma pergunta sem sentido, pois, na seção (1.2), vimos que o ELT influencia na qualidade da aproximação numérica de derivadas parciais.

Em outras palavras, pretendemos saber se as EDF's associadas as expressões da EDP's, são de fato, boas representantes da solução real da EDP. Como será apresentado a seguir, a resposta a essa pergunta depende da consistência das EDF's com as EDP's, estabilidade e convergência do método numérico empregado.

1.3.1 Consistência

Às vezes é possível aproximar uma equação parabólica ou hiperbólica por um esquema de diferença finita que é estável, (isto limita a amplificação de todos os componentes das condições iniciais), mas que tem uma solução que converge para a solução de uma equação diferencial diferente quando os comprimentos de malha tendem a zero. Tal esquema de diferença é dito ser inconsistente ou incompatível com a equação diferencial parcial e um exemplo pode ser encontrado em (Smith [37] pag. 41)

A importância real do conceito de consistência reside em um teorema de Lax, que afirma que se uma equação linear de diferenças finitas é consistente com um problema de valor inicial linear propriamente dito, então a estabilidade garante a convergência. A consistência pode ser definida de duas formas equivalentes, mas ligeiramente diferentes.

Como dito antes, quanto maior for o refinamento da malha, menor será o ELT, isto equivale a afirmar que, quando $\Delta x \rightarrow 0$, o ELT tende a zero, e recuperamos, a partir da EDF, a EDP.

Definição 1.2.

Uma Equação discreta (EDF) é consistente com a equação diferencial parcial, se seu ELT tende a zero quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$.

1.3.2 Convergência

Sabemos que, se a discretização for consistente, então, quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, o ELT se anula e recuperamos a EDP original. E como isso afeta a solução da EDP após um número arbitrário de passos no tempo? Caso a solução numérica no domínio de interesse u_j^k se aproxime da solução exata $U(x_j, t_k)$ da EDP, conforme $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, dizemos que o método numérico é convergente. Mais precisamente, temos

Definição 1.3.

Seja u_j^k a solução numérica da EDP e $U(x_j, t_k)$, $\forall x_j, t_k$ solução exata, dizemos que o método numérico é convergente se, u_j^k aproxima-se de $U(x_j, t_k)$ quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, ou ainda,

$$\max_{1 \leq j \leq N-1} |u_j^k - U(x_j, t_k)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

1.3.3 Estabilidade

Um método numérico estável é aquele no qual quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificados sem limite. Portanto, como afirma Fletcher (1992), o conceito de estabilidade está relacionado ao crescimento, ou diminuição dos erros introduzidos nos cálculos.

E quais são essas perturbações e erros? Exemplos mais diretos são condições de fronteira ou iniciais aproximadas de forma incorreta, e acúmulo dos erros de arredondamento cometidos pelo computador durante os cálculos.

Em relação à estabilidade dos métodos numéricos, eles podem ser classificados em:

- 1 Condicionalmente estáveis: para fornecerem soluções numéricas estáveis, devem satisfazer uma condição de estabilidade.
- 2 Incondicionalmente estáveis: não necessitam satisfazer quaisquer critérios de estabilidade para produzirem soluções estáveis.
- 3 Incondicionalmente instáveis: não existem valores de Δt que permitem a eles fornecerem soluções estáveis.

Observação 1.3. *A convergência tratada na seção antecedente é extremamente importante, no entanto, difícil de ser demonstrada diretamente. Em geral, fazemos uso do seguinte teorema, que afirma: "para a solução numérica de um problema linear bem posto, por uma discretização consistente, a estabilidade do método numérico é condição necessária e suficiente para convergência.*

$$\text{Consistência} + \text{Estabilidade} \Rightarrow \text{Convergência}.$$

Teorema 1.1. *(Teorema de Lax [36]) .*

Para o esquema de diferenças finitas lineares, é convergente se for consistente e estável em relação ao valor inicial. Além disso, se o ELT satisfizer $\|e^k\| = \mathcal{O}(\Delta t^\alpha + \Delta x^\beta)$, têm-se

$$\|U_j^k - u_j^k\| = \mathcal{O}(\Delta t^\alpha + \Delta x^\beta),$$

onde,

$$\|e^k\| = \max_{1 \leq j, k \leq N-1} |U_j^k - u_j^k|.$$

1.4 Uma revisão para o método- θ linear

O **método- θ linear** é um dos métodos numéricos importantes para EDOs, que é 1° ordem se $\theta \neq \frac{1}{2}$ ou de 2° ordem se $\theta = \frac{1}{2}$. Para descrevermos brevemente, considere um problema de modelo simples, cuja equação representa o fluxo de calor em um meio homogêneo imutável, de extensão finita, sem fonte de calor. Supomos que seja dado condições de contorno homogêneas de Dirichlet, isto é, a solução dada é zero em cada extremidade do intervalo, para todos os valores de t . Depois de mudar para variáveis adimensionais restringimos o problema em, encontrar $u(x, t)$ definido para $x \in [0, 1]$ e $t \geq 0$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{para } t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1.11)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{para } t > 0, \quad (1.12)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1. \quad (1.13)$$

Discretizando o domínio da equação (1.11), escrevendo Δx e Δt para os espaçamentos espacial e temporal, respectivamente. Então, temos

$$(x_j = j\Delta x, \quad t_k = k\Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.14)$$

assim, usando aproximações por diferenças finitas avançadas para a derivada do tempo e centradas para a derivada de espaço de segunda ordem, e obtemos a partir de (1.11) a seguinte equação

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{(\Delta x)^2}, \quad (1.15)$$

resulta na seguinte EDF

$$u_j^{k+1} = u_j^k + a(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k), \quad (1.16)$$

onde,

$$a = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (1.17)$$

Observamos da equação (1.16), que o cálculo de qualquer valor do nível de tempo $k + 1$, é necessário de 3 pontos do nível de tempo k , por esse motivo, tal equação é chamada de

esquema de diferenças explícitas.

Através da equação (1.11) podemos ainda, obter uma outra aproximação, com cálculos mais sofisticados aplicados em uma diferença de tempo para trás.

Se substituirmos a diferença de tempo de avançada pela diferença de tempo de regressiva, a diferença de espaço permanece a mesma, obtemos o esquema

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}, \quad (1.18)$$

ou equivalentemente, temos para a como definido em (1.17) a equação,

$$-au_{j+1}^{k+1} + (1 + 2a)u_j^{k+1} - au_{j-1}^{k+1} = u_j^k, \quad (1.19)$$

ou ainda, usando a seguinte notação

$$\delta_x^2 u_j^k = u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k, \quad (1.20)$$

podemos reescrever (1.18) da seguinte maneira,

$$u_j^{k+1} - u_j^k = a\delta_x^2 u_j^{k+1}, \quad (1.21)$$

este é um exemplo de um esquema **implícito** para a equação (1.11), que não é tão fácil como o esquema explícito descrito anteriormente. Esse esquema envolve três valores desconhecidos no nível de tempo $k + 1$. O que dificulta o cálculo de u_j^{k+1} , no entanto o mesmo pode ser obtidos por outros recursos, não pertinentes aqui.

Vimos acima, que as equações (1.15) e (1.18) são aproximações numéricas para a equação (1.11), na primeira usamos os pontos u_{j-1}^k, u_j^k e u_{j+1}^k , para aproximar u_j^{k+1} , enquanto que na segunda, fizemos uso de u_j^k, u_{j-1}^{k+1} e u_{j+1}^{k+1} , sendo assim, uma generalização natural é uma aproximação que usa todos esses seis pontos. Isso pode ser considerado como tendo uma média ponderada das duas fórmulas. Como a diferença de tempo nos lados esquerdos é a mesma, obtemos o esquema de seis pontos

$$u_j^{k+1} - u_j^k = a[\theta\delta_x^2 u_j^{k+1} + (1 - \theta)\delta_x^2 u_j^k], \quad j = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (1.22)$$

Nesta, consideramos $\theta \in [0, 1]$. E note que, por um lado, quando $\theta = 0$, recuperamos através da equação (1.22), o **esquema de Euler explícito**, por outro lado, quando $\theta = 1$, tal equação nos fornece o **esquema de Euler implícito**. Para qualquer $\theta \neq 0$, temos um sistema tridiagonal para resolver $\{u_j^{k+1}\}$, obtido a partir de (1.22).

O esquema dado na equação (1.22) é denominado de **método- θ linear**. E, este será de suma importância no que segue.

1.5 Operadores diagonalizáveis

Um operador é uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$, onde V é um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Se $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ e B é uma base de V , então a matriz $[T]_B$ pertence $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Aqui, procuramos informações sobre T a partir de $[T]_B$, ou seja, desejamos obter uma base B de V tal que certas informações sobre T possam ser facilmente obtidas à partir de $[T]_B$.

Sabemos que, se $[T]_B$ for diagonal, informações sobre o núcleo de T e seu posto são facilmente obtidos. Então, o objetivo é procurar condições sobre T para que exista uma base B de V de tal forma que $[T]_B$ seja *diagonal*.

Definição 1.4.

Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e suponha que exista uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que a matriz $[T]_B$ tenha a forma diagonal, isto é, tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Da definição de $[T]_B$, vem

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

isto é, a imagem de qualquer vetor da base B por T é um múltiplo do vetor.

Definições 1.1.

Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear

- (a) Um autovalor de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$.
- (b) Se λ é um autovalor de T , então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de autovetor de T associado a λ . Denota-se por $\text{Aut}_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores a λ .
- (c) Suponha que $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$. Diz-se que T é diagonalizável se existir uma base B tal que $[T]_B$ é diagonal, o que é equivalente a dizer que existe uma base formada por autovetores de T .

1.5.1 Polinômio característico

Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, onde V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. Apresentamos agora um método que permite descobrir todos os seus autovalores, caso os tenha.

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ for um autovalor de T , então existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, o que é equivalente a dizer que $(\lambda I_d - T)(v) = 0$, onde $I_d : V \longrightarrow V$ é transformação identidade em V . Segue então,

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \Leftrightarrow \text{Nuc}(\lambda I_d - T) \neq 0$$

Proposição 1.1.

Se λ um autovalor do operador linear $T : V \longrightarrow V$, então

$$\text{Aut}_T(\lambda) = \text{Nuc}(T - \lambda I_d).$$

Demonstração. (c.f [38]). ■

Lema 1.1.

Uma Matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível se e somente se $\det A \neq 0$.

Demonstração. (c.f [38] pag. 35). ■

Lema 1.2.

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre \mathbb{K} e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então, T é injetora se e somente se $\text{Nuc}T = \{0\}$.

Demonstração. (c.f [38] pag. 85). ■

Lema 1.3.

Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão $n \geq 1$ sobre \mathbb{K} e considere bases B e B' de U e V , respectivamente. Uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ é um isomorfismo se e somente se a matriz $[T]_{B,B'}$ for invertível.

Demonstração. (c.f [38]). ■

Seja C uma base qualquer de V e considere a matriz $[\lambda I_d - T]_C$ do operador $(\lambda I_d - T) \in L(V, V)$ nesta base. Segue dos Lemas (1.1), (1.2) e (1.3) que

$$\text{Nuc}(\lambda I_d - T) \neq 0 \Leftrightarrow [\lambda I_d - T]_C \text{ não é invertível} \Leftrightarrow \det([\lambda I_d - T]_C) = 0. \quad (1.23)$$

A relação (1.23) dá uma ideia de como podemos determinar os autovalores de um dado operador T .

A equivalência em (1.23) pode ser reescrita como

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \Leftrightarrow \lambda \text{ é uma raiz de } \det([xI_d - T]_C)$$

Observação 1.4. (c. f [38], pag. 136)

$\det([xI_d - T]_C)$ é um polinômio mônico de grau n sobre \mathbb{K} , independente da escolha da base C .

Definição 1.5. (Polinômio Característico)

Sejam V um \mathbb{K} - espaço vetorial de dimensão finita, $T \in L(V, V)$ um operador linear e C uma base de V . O polinômio $\det([xI_d - T]_C)$ é chamado de Polinômio Característico de T e o designamos por $P_T(x)$.

Da discussão acima, concluímos, que os autovalores de T , caso existam, serão raízes de seu polinômio característico.

Definição 1.6.

O conjunto $\sigma(A)$ de todos os autovalores de A , onde A denota uma matriz $A = (\alpha_{ij})$ é chamado de espectro de A .

1.6 Problemas de estabilidade clássica

Desejamos nesta seção apresentar uma condição necessária e suficiente para que uma equação de diferença seja estável, tal condição está relacionada com uma classe de polinômios denominados de "Polinômios de Schur", a razão da denominação é devido aos mesmos terem sido estudados por Schur. Em verdade, exibimos, um critério de estabilidade para esta classe de polinômios peculiares.

Em estudos envolvendo equações diferenciais, por vezes, devido a dificuldade de se obter a solução exata da EDP, aproximamos a solução desta pela solução de uma equação de diferenças, no entanto, há a possibilidade dessa equação de diferença não ser estável, embora a equação diferencial seja estável. Por isso, em ambos os casos é importante conhecer as propriedades de cada equação.

Segundo Duffin [39], "A estabilidade de uma equação de diferença também é governada por um polinômio característico associado. Então as soluções de uma equação de diferença desaparecem no infinito positivo se todas as raízes do polinômio característico estiverem em valor absoluto menos que a unidade".

Definição 1.7. [35]

Um polinômio é chamado Polinômio de Schur se o módulo de todos os zeros do polinômio característico for menor que 1.

Definição 1.8. [39](Critério de Estabilidade para Polinômios de Schur)

Uma equação de diferença linear com coeficientes constantes é estável se todas as raízes do polinômio característico estiverem dentro do círculo unitário.

Desta maneira, concluímos de (1.7) e (1.8) que , uma equação de diferença linear com coeficientes constantes é estável se o polinômio característico associado a essa for um polinômio de Schur.

Capítulo 2

O método numérico totalmente discreto

Neste capítulo, apresentamos o método numérico totalmente discreto para o problema da equação

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = r_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + r_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t - \tau).$$

Sejam $\Delta t = \frac{\tau}{m}$ e $\Delta x = \frac{\pi}{N}$, o tamanho de passo temporal e espacial respectivamente. Assim, temos $m = \frac{\tau}{\Delta t}$ e $N = \frac{\pi}{\Delta x}$, onde m e N são dois inteiros positivos. Definimos os pontos da malha $t_k = k\Delta t$, $k = -m, -m + 1, -m + 2, \dots$, $x_j = j\Delta x$, $j = 0, 1, \dots, N$, $\Omega_\tau = \{t_k; k = -m, -m + 1, \dots\}$ e $\Omega_h = \{x_j; 0 \leq j \leq N\}$. Seja u_j^k a aproximação numérica de $u(x_j, t_k)$ e $\nu = \{u_j^k; 0 \leq j \leq N, k \geq -m\}$ o espaço de funções de grade definido em $\Omega_h \times \Omega_\tau$. Para funções de grade $u \in \nu$, definiremos as seguintes aproximações numéricas para as derivadas correspondentes, isto é, as seguintes notações

$$\delta_t u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} \quad \text{Diferenças Progressivas}$$

$$\delta_x^2 u_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{\Delta x^2} \quad \text{Diferenças centrais de 2º ordem}$$

$$u_j^{k+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^k + u_j^{k+1}}{2}$$

e definimos o seguinte operador linear de diferenças compactas

$$\mathcal{A}_h(u_j^k) = \begin{cases} \frac{u_{j+1}^k + 10u_j^k + u_{j-1}^k}{12}, & j = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_j^k, & j = 0, N. \end{cases} \quad (2.1)$$

Aplicando o método de diferenças finitas compactas para discretizar o operador de difusão e o método- θ linear à equação (0.5), temos

$$\mathcal{A}_h(\delta_t u_j^k) = r_1[(1-\theta)\delta_x^2 u_j^k + \theta\delta_x^2 u_j^{k+1}] + r_2[(1-\theta)\delta_x^2 u_j^{k-m} + \theta\delta_x^2 u_j^{k-m+1}] \quad (2.2)$$

onde $j = 1, 2, \dots, N-1$, $k = 0, 1, \dots$, e as condições iniciais e de contorno são

$$u_j^k = u_0(x_j, t_k), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad k = -m, -m+1, \dots, 0,$$

$$u_0^k = u_N^k = 0, \quad k = -m, -m+1, \dots,$$

usando as notações apresentadas na equação (2.2), segue

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h\left(\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t}\right) &= r_1 \left[(1-\theta) \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right] + \\ &+ r_2 \left[(1-\theta) \frac{u_{j+1}^{k-m} - 2u_j^{k-m} + u_{j-1}^{k-m}}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j+1}^{k+1-m} - 2u_j^{k+1-m} + u_{j-1}^{k+1-m}}{\Delta x^2} \right], \end{aligned}$$

usando a definição do operador em (2.1), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^{k+1} + 10u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{12\Delta t} - \frac{u_{j+1}^k + 10u_j^k + u_{j-1}^k}{12\Delta t} &= \\ r_1 \left[(1-\theta) \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right] &+ \\ r_2 \left[(1-\theta) \frac{u_{j+1}^{k-m} - 2u_j^{k-m} + u_{j-1}^{k-m}}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j+1}^{k+1-m} - 2u_j^{k+1-m} + u_{j-1}^{k+1-m}}{\Delta x^2} \right], & \end{aligned}$$

fazendo $a = \frac{r_1 \Delta t}{\Delta x^2}$ e $b = \frac{r_2 \Delta t}{\Delta x^2}$, a equação acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^{k+1} + 10u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{12} - \frac{u_{j+1}^k + 10u_j^k + u_{j-1}^k}{12} &= \\ a \left[(1-\theta)(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + \theta(u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) \right] &+ \\ b \left[(1-\theta)(u_{j+1}^{k-m} - 2u_j^{k-m} + u_{j-1}^{k-m}) + \theta(u_{j+1}^{k+1-m} - 2u_j^{k+1-m} + u_{j-1}^{k+1-m}) \right], & \end{aligned}$$

de onde, podemos obter a seguinte equação de diferenças finitas (EDF) associado à equação (2.2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{12} - a\theta\right) (u_{j-1}^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}) &+ \left(\frac{5}{6} + 2a\theta\right) u_j^{k+1} = \left(\frac{1}{12} + a(1-\theta)\right) (u_{j+1}^k + u_{j-1}^k) \\ &+ \left(\frac{5}{6} - 2a(1-\theta)\right) u_j^k + b(1-\theta)(u_{j+1}^{k-m} + u_{j-1}^{k-m}) - 2b(1-\theta)u_j^{k-m} \\ &+ b\theta(u_{j+1}^{k-m+1} + u_{j-1}^{k-m+1}) - 2b\theta u_j^{k-m+1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Novamente no intuito de simplificar as contas, definimos

$$\alpha = \frac{1}{12} - a\theta, \quad \beta = \frac{5}{6} + 2a\theta, \quad \gamma = \frac{1}{12} + a(1-\theta), \quad \lambda = \frac{5}{6} - 2a(1-\theta) \quad (2.4)$$

$$\xi = b(1-\theta), \quad \varphi = 2b(1-\theta), \quad \eta = b\theta \quad e \quad \mu = 2b\theta \quad (2.5)$$

Assim, podemos reescrever a equação (2.3), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \alpha u_{j-1}^{k+1} + \beta u_j^{k+1} + \alpha u_{j+1}^{k+1} &= \gamma u_{j+1}^k + \lambda u_j^k + \gamma u_{j-1}^k + \xi u_{j+1}^{k-m} - \varphi u_j^{k-m} \\ &+ \xi u_{j-1}^{k-m} + \eta u_{j+1}^{k-m+1} - \mu u_j^{k-m+1} + \eta u_{j-1}^{k-m+1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Agora, escrevemos a equação (2.6), para todos os $N - 2$ pontos x_j , da malha na qual pretendemos determinar u_j^k . Desta maneira, para cada $k = 1, 2, \dots$ fixo, obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} \text{Para } j = 1 &\Rightarrow \alpha u_0^{k+1} + \beta u_1^{k+1} + \alpha u_2^{k+1} = \gamma u_2^k + \lambda u_1^k + \gamma u_0^k + \\ &+ \xi u_2^{k-m} - \varphi u_1^{k-m} + \xi u_0^{k-m} + \eta u_2^{k-m+1} - \mu u_1^{k-m+1} + \eta u_0^{k-m+1} \\ \text{Para } j = 2 &\Rightarrow \alpha u_1^{k+1} + \beta u_2^{k+1} + \alpha u_3^{k+1} = \gamma u_3^k + \lambda u_2^k + \gamma u_1^k + \\ &+ \xi u_3^{k-m} - \varphi u_2^{k-m} + \xi u_1^{k-m} + \eta u_3^{k-m+1} - \mu u_2^{k-m+1} + \eta u_1^{k-m+1} \\ \text{Para } j = 3 &\Rightarrow \alpha u_2^{k+1} + \beta u_3^{k+1} + \alpha u_4^{k+1} = \gamma u_4^k + \lambda u_3^k + \gamma u_2^k + \\ &+ \xi u_4^{k-m} - \varphi u_3^{k-m} + \xi u_2^{k-m} + \eta u_4^{k-m+1} - \mu u_3^{k-m+1} + \eta u_2^{k-m+1} \\ &\vdots \\ \text{Para } j = N - 1 &\Rightarrow \alpha u_{N-2}^{k+1} + \beta u_{N-1}^{k+1} + \alpha u_N^{k+1} = \gamma u_N^k + \lambda u_{N-1}^k + \gamma u_{N-2}^k + \\ &+ \xi u_N^{k-m} - \varphi u_{N-1}^{k-m} + \xi u_{N-2}^{k-m} + \eta u_N^{k-m+1} - \mu u_{N-1}^{k-m+1} + \eta u_{N-2}^{k-m+1} \end{aligned}$$

Como os valores u_0^{k+1} e u_N^{k+1} são condições de fronteira e, portanto, conhecidos, a primeira e a última equação devem ser apropriadamente modificadas, resultando em

$$\begin{aligned}
\text{Para } j = 1 &\Rightarrow \beta u_1^{k+1} + \alpha u_2^{k+1} = -\alpha u_0^{k+1} \gamma u_2^k + \lambda u_1^k + \gamma u_0^k + \\
&\quad + \xi u_2^{k-m} - \varphi u_1^{k-m} + \xi u_0^{k-m} + \eta u_2^{k-m+1} - \mu u_1^{k-m+1} + \eta u_0^{k-m+1} \\
\text{Para } j = 2 &\Rightarrow \alpha u_1^{k+1} + \beta u_2^{k+1} + \alpha u_3^{k+1} = \gamma u_3^k + \lambda u_2^k + \gamma u_1^k + \\
&\quad + \xi u_3^{k-m} - \varphi u_2^{k-m} + \xi u_1^{k-m} + \eta u_3^{k-m+1} - \mu u_2^{k-m+1} + \eta u_1^{k-m+1} \\
\text{Para } j = 3 &\Rightarrow \alpha u_2^{k+1} + \beta u_3^{k+1} + \alpha u_4^{k+1} = \gamma u_4^k + \lambda u_3^k + \gamma u_2^k + \\
&\quad + \xi u_4^{k-m} - \varphi u_3^{k-m} + \xi u_2^{k-m} + \eta u_4^{k-m+1} - \mu u_3^{k-m+1} + \eta u_2^{k-m+1} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Para } j = N - 1 &\Rightarrow \alpha u_{N-2}^{k+1} + \beta u_{N-1}^{k+1} = -\alpha u_N^{k+1} \gamma u_N^k + \lambda u_{N-1}^k + \gamma u_{N-2}^k + \\
&\quad + \xi u_N^{k-m} - \varphi u_{N-1}^{k-m} + \xi u_{N-2}^{k-m} + \eta u_N^{k-m+1} - \mu u_{N-1}^{k-m+1} + \eta u_{N-2}^{k-m+1}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Este conjunto de equações (2.7) do esquema numérico totalmente discreto pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha & \cdots & \vdots \\ \vdots & \alpha & \beta & \alpha & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \cdots & & \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ u_3^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & \lambda & \gamma & \cdots & \vdots \\ \vdots & \gamma & \lambda & \gamma & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & \cdots & & \gamma & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \\ \vdots \\ u_{N-1}^k \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} -\varphi & \xi & 0 & \cdots & 0 \\ \xi & -\varphi & \xi & \cdots & \vdots \\ \vdots & \xi & -\varphi & \xi & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \xi \\ 0 & \cdots & & \xi & -\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{k-m} \\ u_2^{k-m} \\ u_3^{k-m} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu & \eta & 0 & \cdots & 0 \\ \eta & -\mu & \eta & \cdots & \vdots \\ \vdots & \eta & -\mu & \eta & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \eta \\ 0 & \cdots & & \eta & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{k+1-m} \\ u_2^{k+1-m} \\ u_3^{k+1-m} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1-m} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Desta maneira, tendo em vista os valores de β , α , λ , γ , μ , η , φ e ξ são dados como em (2.4) e (2.5), definindo os operadores lineares $\phi_0, \phi_1, \phi_m, \phi_{m+1} : \mathbb{M}_{N-1} \longrightarrow \mathbb{M}_{N-1}$ dadas

por

$$\begin{aligned}\phi_0(M) &= \left(\frac{5}{6} + 2a\theta\right) I_{n-1} + \left(\frac{1}{12} - a\theta\right) M \\ \phi_1(M) &= \left(\frac{5}{6} - 2a(1-\theta)\right) I_{n-1} + \left(\frac{1}{12} + a(1-\theta)\right) M \\ \phi_m(M) &= 2b\theta I_{n-1} - b\theta M \\ \phi_{m+1}(M) &= 2b(1-\theta)I_{n-1} - b(1-\theta)M,\end{aligned}$$

O método totalmente discreto (2.2) pode ser reescrito na forma matricial como

$$\phi_0(S)U^{k+1} = \phi_1(S)U^k - \phi_m(S)U^{k+1-m} - \phi_{m+1}(S)U^{k-m}, \quad (2.8)$$

onde,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}, \quad (2.9)$$

e $U^k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_{N-1}^k)^T$.

2.1 Os autovalores de uma matriz tridiagonal comum

Os autovalores de uma matriz $N \times N$ da forma,

$$\begin{bmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b \\ & & & & c & a \end{bmatrix}_{N \times N},$$

denominados de λ_j , com $j = 1, 2, \dots, N$, são dados pela seguinte fórmula

$$\lambda_j = a + 2\{\sqrt{bc}\} \cos \frac{j\pi}{N+1}, \quad (2.10)$$

onde $a, b, c \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. A prova pode ser encontrada na pag. 154 de [37].

De posse deste resultado (2.10) e do fato que, $\pi = N\Delta x$, segue que os autovalores da matriz S dada em (2.9) são obtidos pela seguinte equação,

$$\lambda_j = 2 \cos(j\Delta x), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.11)$$

o que implica,

$$|\lambda_j| < 2, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

Capítulo 3

Estabilidade assintótica

É apontado em [31] que a solução trivial do problema (0.5) é assintoticamente estável se $r_1 > r_2 > 0$. Assim, investigamos neste capítulo a estabilidade numérica do método proposto sob esta condição.

Definição 3.1.

Um método numérico aplicado ao problema (0.5) é chamado *assintoticamente estável em relação a solução de equilíbrio* se a sua solução aproximada u_j^k correspondente a qualquer função função $u_0(x, t)$ satisfaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^k| \rightarrow 0.$$

A condição do raio espectral garante que solução de equilíbrio de (2.8) é assintoticamente estável se, e somente se, o polinômio característico

$$P_m^\theta(z) = \det\{\phi_0(S)z^{m+1} - \phi_1(S)z^m + \phi_m(S)z + \phi_{m+1}(S)\},$$

é um polinômio de Schur.

Por cálculos diretos, podemos escrever

$$P_m^\theta(z) = \prod_{\lambda_j \in \sigma[S]} \{\phi_0(\lambda_j)z^{m+1} - \phi_1(\lambda_j)z^m + \phi_m(\lambda_j)z + \phi_{m+1}(\lambda_j)\},$$

onde λ_j são os autovalores da matriz S .

Portanto, o esquema numérico totalmente discreto (2.2) é assintoticamente estável em

relação à solução de equilíbrio se, e somente se,

$$P_{m,j}^\theta(z) = \phi_0(\lambda_j)z^{m+1} - \phi_1(\lambda_j)z^m + \phi_m(\lambda_j)z + \phi_{m+1}(\lambda_j), \quad (3.1)$$

é um polinômio de Schur para todo $m \geq 1$.

Substituindo $\phi_0(\lambda_j)$, $\phi_1(\lambda_j)$, $\phi_m(\lambda_j)$, $\phi_{m+1}(\lambda_j)$ em $P_{m,j}^\theta(z)$, temos

$$\begin{aligned} P_{m,j}^\theta(z) &= \left[\frac{10}{12} + 2a\theta + \left(\frac{1}{12} - a\theta \right) \lambda_j \right] z^{m+1} - \left\{ \frac{10}{12} - 2a(1-\theta) + \left[\frac{1}{12} + a(1-\theta) \right] \lambda_j \right\} z^m \\ &\quad + (2b\theta - b\theta\lambda_j)z + 2b(1-\theta) - b(1-\theta)\lambda_j, \\ &= \left[\frac{10}{12} + \frac{2}{12} - \frac{2}{12} + 2a\theta + \left(\frac{1}{12} - a\theta \right) \lambda_j \right] z^{m+1} \\ &\quad - \left\{ \frac{10}{12} + \frac{2}{12} - \frac{2}{12} - 2a(1-\theta) + \left[\frac{1}{12} + a(1-\theta) \right] \lambda_j \right\} z^m + \\ &\quad + 2b\theta z - b\theta z\lambda_j + 2b - 2b\theta - b\lambda_j + b\theta\lambda_j, \\ &= \left[1 + 2 \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) - \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) \lambda_j \right] z^{m+1} - \\ &\quad - \left\{ 1 - \left[\frac{2}{12} + 2a(1-\theta) \right] + \left[\frac{1}{12} + a(1-\theta) \right] \lambda_j \right\} z^m + \\ &\quad + 2b\theta z + 2b(1-\theta) - b\theta z\lambda_j - b(1-\theta)\lambda_j, \\ &= \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) \right] z^{m+1} - \left\{ 1 - \left[\frac{1}{12} + a(1-\theta) \right] (2 - \lambda_j) \right\} z^m + \\ &\quad + (2b - b\lambda_j)[\theta z] + (1 - \theta)[2b - b\lambda_j], \end{aligned}$$

o que acarreta na seguinte equação,

$$P_{m,j}^\theta(z) = \left[\left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) \right] z - \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1-\theta) \right) (2 - \lambda_j) \right] \right] z^m - \{-b(2 - \lambda_j)[\theta z + (1 - \theta)]\} \quad (3.2)$$

definindo,

$$\mu_j(z) = \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) \right] z - \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1-\theta) \right) (2 - \lambda_j) \right], \quad (3.3)$$

e

$$\nu_j(z) = -b(2 - \lambda_j)[\theta z + (1 - \theta)], \quad (3.4)$$

então, podemos reescrever a equação (3.2) como,

$$P_{m,j}^\theta(z) = \mu_j(z)z^m - \nu_j(z). \quad (3.5)$$

Para provar nossos resultados principais, basta fazer uso do seguinte Lema.

Lema 3.1. (cf. [5])

Seja $\gamma_m(z) = \mu(z)z^m - \nu(z)$ um polinômio, onde $\mu(z)$ e $\nu(z)$ são polinômios de grau constante. Então, o polinômio $\gamma_m(z)$ é um polinômio de Schur para todo $m \geq 1$ se, e somente se, as seguintes condições ocorrem

$$(i) \quad \mu(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$$

$$(ii) \quad |\nu(z)| \leq |\mu(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1$$

$$(iii) \quad \gamma_m(z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1$$

3.1 Estabilidade: para $\theta \in [0, 1/2]$

Pelo Lema (3.1), obtemos o seguinte resultado para $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$

Teorema 3.1.

Supondo que $r_1 > r_2 > 0$. Então o método de diferenças finitas (2.2) é assintoticamente estável com respeito a solução de equilíbrio para $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ se, e somente se,

$$\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)(a + b) < \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)}. \quad (3.6)$$

Demonstração. (\Leftarrow)

A prova da parte suficiente do resultado principal depende fortemente do Lema (3.1) e consiste de 2 passos

Passo 1: Verificamos o item (i) do Lema (3.1).

Com efeito, segue de $\mu_j(z) = 0$ que

$$\left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right]z - \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right)(2 - \lambda_j)\right] = 0,$$

isto é,

$$z = \frac{1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right] (2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j)} \Rightarrow |z| = \left| \frac{1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right] (2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j)} \right|,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{1 - \left[\frac{1}{12} + a - a\theta \right] (2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j)} \right| \\ &= \left| \frac{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} - a \right) (2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j)} \right| \\ &= \left| \frac{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) - a(2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j)} \right|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|z| = \left| 1 - \frac{a(2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j)} \right|. \quad (3.7)$$

Mostraremos que $|z| < 1$.

Inicialmente, note que

$$1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) = 1 - \frac{1}{12}(2 - \lambda_j) + a\theta(2 - \lambda_j) > 1 - \frac{1}{12}(2 - \lambda_j) > \frac{2}{3},$$

ou seja,

$$1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) > \frac{2}{3} > 0, \quad (3.8)$$

pois, como $a > 0$ e $\theta \geq 0$ implica $a\theta \geq 0$ e sendo,

$$|\cos(j\Delta x)| < 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N-1,$$

desde que, $\lambda_j = 2 \cos(j\Delta x)$, temos $0 < 2 - \lambda_j < 4$. De onde, obtemos

$$0 < \frac{2 - \lambda_j}{12} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < 1 - \frac{2 - \lambda_j}{12} < 1. \quad (3.9)$$

Além disso, para $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, vem que $1 - 2\theta > 0$. Assim, aplicando a condição (3.6) podemos verificar

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a &< \frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a + (1 - 2\theta)b = \frac{1}{6} + (1 - 2\theta)(a + b) \\ &< \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)} = \frac{2}{2 + 2\cos(\Delta x)} \\ &\leq \frac{2}{2 + 2\cos(j\Delta x)} \leq \frac{2}{2 - 2\cos(j\Delta x)} = \frac{2}{2 - \lambda_j}, \end{aligned}$$

uma vez que, no intervalo $[0, \pi]$, a função cosseno é decrescente, logo para $j = 1, 2, \dots, N - 1$, é verdade que

$$\cos(\Delta x) \geq \cos(j\Delta x) \Rightarrow \frac{1}{\cos(\Delta x)} \leq \frac{1}{\cos(j\Delta x)}$$

Em resumo,

$$\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a < \frac{1}{6} + (1 - 2\theta)(a + b) < \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)} \leq \frac{2}{2 - \lambda_j} \quad (3.10)$$

Portanto, segue

$$\begin{aligned} (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right] - 2 &< 0 \quad (3.11) \\ -2 + (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a - 2\theta a \right] &< 0 \\ -2 + \left(\frac{1}{6} - 2\theta a \right) (2 - \lambda_j) + a(2 - \lambda_j) &< 0 \\ -2 - 2 \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) + a(2 - \lambda_j) &< 0 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$-2 \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) \right] < -a(2 - \lambda_j) \quad (3.12)$$

o que acarreta em

$$-2 < -\frac{a(2-\lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)}. \quad (3.13)$$

Note que, segue de (3.8)

$$\begin{aligned} 1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j) > 0 &\Rightarrow \frac{1}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)} > 0 \\ \Rightarrow \frac{a(2-\lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)} > 0 &\Rightarrow -\frac{a(2-\lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)} < 0. \end{aligned}$$

Logo concluímos, fazendo uso de (3.13)

$$-2 < -\frac{a(2-\lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)} < 0, \quad (3.14)$$

ou ainda,

$$-1 < 1 - \frac{a(2-\lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)} < 1,$$

ou seja,

$$|z| = \left| 1 - \frac{a(2-\lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)} \right| < 1. \quad (3.15)$$

Passo 2: Para verificação dos itens restantes do lema (3.1), introduzimos a função de variável complexa

$$w = \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} = \frac{\left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)\right]z - \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1-\theta)\right)(2-\lambda_j)\right]}{-b(2-\lambda_j)[\theta z + (1-\theta)]}, \quad (3.16)$$

gostaríamos de obter uma expressão envolvendo $\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w|$, mais precisamente desejamos mostrar que $\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| \geq 1$. Para tal, iniciamos este passo isolando z em (3.16), í. é,

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2-\lambda_j)\right]z &= -wb(2-\lambda_j)[\theta z + (1-\theta)] + \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1-\theta)\right)(2-\lambda_j)\right] \\ &= -wb(2-\lambda_j)\theta z - wb(2-\lambda_j)(1-\theta) + \\ &\quad + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1-\theta)\right](2-\lambda_j)\right), \end{aligned}$$

o que acarreta em,

$$\left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) + wb(2 - \lambda_j)\theta \right] z = -wb(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right] (2 - \lambda_j) \right),$$

de onde resulta que,

$$z = \frac{-wb(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right) (2 - \lambda_j) \right]}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) + wb(2 - \lambda_j)\theta}. \quad (3.17)$$

Tomando o módulo de ambos os lados de (3.17) e supondo $|z| = 1$, temos

$$1 = |z| = \left| \frac{-wb(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right) (2 - \lambda_j) \right]}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) + wb(2 - \lambda_j)\theta} \right|,$$

ou seja,

$$\left| -wb(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right] (2 - \lambda_j) \right) \right| = \left| 1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) + wb(2 - \lambda_j)\theta \right|. \quad (3.18)$$

Definindo $w = x + yi$ de (3.18) acima, vem

$$\left| -(x + yi)b(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right] (2 - \lambda_j) \right) \right| = \left| 1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) + (x + yi)b(2 - \lambda_j)\theta \right|,$$

ou ainda,

$$\left| x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right] (2 - \lambda_j) \right) + [-yb(2 - \lambda_j)(1 - \theta)]i \right| = \left| x[b(2 - \lambda_j)\theta] + \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) \right] + [yb(2 - \lambda_j)\theta]i \right|. \quad (3.19)$$

Definindo,

$$P = x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) + [-yb(2 - \lambda_j)(1 - \theta)]i$$

e

$$Q = x[b(2 - \lambda_j)\theta] + \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right] + [yb(2 - \lambda_j)\theta]i$$

Então, por (3.19) devemos ter que $P = Q$ ou $P = -Q$.

Para $P = Q$, vem

$$\begin{aligned} x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) + [-yb(2 - \lambda_j)(1 - \theta)]i = \\ = x[b(2 - \lambda_j)\theta] + \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right] + [yb(2 - \lambda_j)\theta]i, \end{aligned}$$

igualando as partes reais da equação acima, segue

$$\begin{aligned} x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) = x[b(2 - \lambda_j)\theta] + \\ + \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right], \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] - x[b(2 - \lambda_j)\theta] = \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right] - \\ - \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right)(2 - \lambda_j)\right], \end{aligned}$$

portanto,

$$x[(-2b + b\lambda_j)(1 - \theta) - (2b\theta - b\theta\lambda_j)] = \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) + \left[\frac{1}{12} + a - a\theta\right](2 - \lambda_j),$$

desta obtemos,

$$\begin{aligned} x[-2b + b\lambda_j + 2b\theta - b\theta\lambda_j - 2b\theta + b\theta\lambda_j] = \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) - \\ - \left[\left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) - a(2 - \lambda_j)\right], \end{aligned}$$

assim,

$$x[-2b + b\lambda_j] = a(2 - \lambda_j) \Rightarrow x = -\frac{a}{b}.$$

Além disso, igualando as partes imaginárias, vem

$$\begin{aligned} -yb(2 - \lambda_j)(1 - \theta) &= yb(2 - \lambda_j)\theta \Rightarrow -yb(1 - \theta) = yb\theta \\ \Rightarrow -yb + yb\theta &= yb\theta \Rightarrow yb = 0 \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $P = -Q$, í. é.,

$$\begin{aligned} x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) + [-yb(2 - \lambda_j)(1 - \theta)]i = \\ -x[b(2 - \lambda_j)\theta] - \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right] + [-yb(2 - \lambda_j)\theta]i, \end{aligned}$$

igualando as partes reais da equação acima, temos

$$\begin{aligned} x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) = \\ -x[b(2 - \lambda_j)\theta] - \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x[(-2b + 2\lambda_j)(1 - \theta)] + x[b(2 - \lambda_j)\theta] = \\ -\left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right] - \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right), \end{aligned}$$

de onde, vem

$$x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + b(2 - \lambda_j)\theta] = -2 - \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) + \left[\frac{1}{12} + a - a\theta\right](2 - \lambda_j),$$

colocando em evidência $b(2 - \lambda_j)$ no lado esquerdo e distribuindo no lado direito, segue

$$x\{b(2 - \lambda_j)[\theta - (1 - \theta)]\} = -2 - \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) - \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) + a(2 - \lambda_j),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x\{b(2 - \lambda_j)[2\theta - 1]\} &= -2 - 2\left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) + a(2 - \lambda_j) \\ \therefore x\{b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)\} &= 2 + 2\left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) - a(2 - \lambda_j) \\ &= 2 - (2 - \lambda_j)\left[a - 2a\theta + \frac{1}{6}\right] \\ &= \frac{2 - (2 - \lambda_j)\left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta)\right]}{b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)}, \end{aligned}$$

temos ainda, igualando as partes imaginárias, que

$$\begin{aligned} -yb(2 - \lambda_j)(1 - \theta) &= -yb(2 - \lambda_j)\theta \Rightarrow -yb(1 - \theta) = -yb\theta \\ \therefore -yb + yb\theta + yb\theta &= 0 \Rightarrow -yb + 2yb\theta = 0 \Rightarrow y(2b\theta - b) = 0 \Rightarrow y = 0, \end{aligned}$$

pois $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. E, como $a, b > 0$ e $0 < 2 - \lambda_j < 4$, vem

$$\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| = \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| = \min \left\{ \frac{a}{b}, \left| \frac{2 - (2 - \lambda_j)\left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta)\right]}{b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)} \right| \right\}.$$

Em seguida, analisamos os 2 casos diferentes possíveis

Caso A_1 : $\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| = \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| = \frac{a}{b}$

Desde que, $r_1 > r_2 > 0$,

$$\Delta tr_1 > \Delta tr_2 > 0 \Rightarrow \frac{\Delta tr_1}{\Delta x^2} > \frac{\Delta tr_2}{\Delta x^2} > 0 \Rightarrow a > b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 1.$$

Logo, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, temos

$$\left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| \geq \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| = \frac{a}{b} > 1,$$

de onde, obtemos

$$|\mu_j(z)| > |\nu_j(z)|.$$

O que prova o ítem **(ii)** do Lema (3.1).

Além disso, desde que

$$|z| = 1 \Rightarrow |z^m| = 1 \Rightarrow |\mu_j(z)z^m| = |\mu_j(z)||z^m| = |\mu_j(z)|$$

Assim, como

$$|\mu_j(z)| > |\nu_j(z)| \Rightarrow |\mu_j(z)| - |\nu_j(z)| > 0$$

decorre da desigualdade triângular, que

$$\begin{aligned} 0 < |\mu_j(z)| - |\nu_j(z)| &= |\mu_j(z)z^m| - |\nu_j(z)| \leq ||\mu_j(z)z^m| - |\nu_j(z)|| \\ &\leq |\mu_j(z)z^m - \nu_j(z)| = |\gamma_m(z)| \Rightarrow \gamma_m(z) \neq 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. O que verifica o item **(iii)** do Lema (3.1). Agora considere o segundo caso

Caso A_2 :

$$\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| = \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| = \frac{\left| 2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] \right|}{b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)}.$$

Pela condição(3.6),temos,

$$\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)(a + b) < \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)},$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a + (1 - 2\theta)b &< \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)} \\ \therefore [1 + \cos(\Delta x)] \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a + (1 - 2\theta)b \right] &< 1 \\ \therefore [1 + \cos(\Delta x)] \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right] + [1 + \cos(\Delta x)](1 - 2\theta)b &< 1 \\ \Rightarrow 1 - [1 + \cos(\Delta x)] \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right] &> [1 + \cos(\Delta x)](1 - 2\theta)b \\ \therefore \frac{1 - [1 + \cos(\Delta x)] \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right]}{[1 + \cos(\Delta x)](1 - 2\theta)b} &> 1. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Além disso, de (3.10), segue

$$\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a < \frac{2}{2 - \lambda_j} \Rightarrow (2 - \lambda_j) \left[(1 - 2\theta)a + \frac{1}{6} \right] < 2. \quad (3.21)$$

Agora usando o fato que

$$\begin{aligned} \cos(j\Delta x) &\geq \cos[(N - 1)\Delta x], \quad \forall j = 1, 2, \dots, N - 1 \\ \therefore -2 \cos(j\Delta x) &\leq -2 \cos[(N - 1)\Delta x], \quad \forall j = 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Somando as 2 à desigualdade acima, resulta

$$2 - 2 \cos(j\Delta x) \leq 2 - 2 \cos[(N - 1)\Delta x],$$

o que implica,

$$2 - \lambda_j \leq 2[1 + \cos(\Delta x)], \quad (3.22)$$

a desigualdade (3.22), advém da simetria da função cosseno. De (3.21) segue ainda

$$-(2 - \lambda_j) \left[(1 - 2\theta)a + \frac{1}{6} \right] > -2 \Rightarrow 2 - (2 - \lambda_j) \left[(1 - 2\theta)a + \frac{1}{6} \right] > 0,$$

assim, de (3.20) e (3.22), concluímos

$$\begin{aligned} \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| &= \frac{2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right]}{b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)} \geq \frac{2 - 2[1 + \cos(\Delta x)] \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right]}{2b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)} \\ &= \frac{1 - [1 + \cos(\Delta x)] \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right]}{[1 + \cos(\Delta x)](1 - 2\theta)b} > 1. \end{aligned}$$

Logo, para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, temos

$$\left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| \geq \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| > 1,$$

o que verifica a condição **(ii)** do lema (3.1), o procedendo da mesma maneira ao caso anterior, verificamos que a condição **(iii)** do Lema (3.1), é satisfeita.

Portanto, tanto no **Caso** A_1 e **Caso** A_2 as condições do Lema (3.1) ocorrem, pelo mesmo, concluímos que o método (2.2) é assintoticamente estável com respeito à solução de

equilíbrio.

(\Rightarrow) Para mostrar a parte necessária usamos contradição. E a prova consiste de 2 casos

Caso B_1 : Primeiramente, suponha que

$$\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)(a + b) = \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)}. \quad (3.23)$$

Considerando $z = -1$, portanto satisfazendo o fato de que $|z| = 1$, para $j = N - 1$, temos de (3.5) que

$$P_{m,N-1}^\theta(-1) = \mu_{N-1}(-1)(-1)^m - \nu_{N-1}(-1), \quad (3.24)$$

onde de (3.3), vem

$$\begin{aligned} \mu_{N-1}(-1) &= \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_{N-1}) \right] (-1) - \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right) (2 - \lambda_{N-1}) \right], \\ &= -1 - \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_{N-1}) - 1 + \left[\frac{1}{12} + a - a\theta \right] (2 - \lambda_{N-1}), \\ &= -2 - \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_{N-1}) + \left(\frac{1}{12} - a\theta \right) (2 - \lambda_{N-1}) + a(2 - \lambda_{N-1}), \\ &= -2 - 2 \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_{N-1}) + a(2 - \lambda_{N-1}), \\ &= -2 + \left[\frac{1}{6} - 2a\theta + a \right] (2 - \lambda_{N-1}) \\ \mu_{N-1}(-1) &= -2 + \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] (2 - \lambda_{N-1}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

e de (3.4), segue

$$\nu_{N-1}(-1) = -b(2 - \lambda_{N-1})[\theta(-1) + (1 - \theta)] = -b(2 - \lambda_{N-1})(1 - 2\theta), \quad (3.26)$$

substituindo (3.25) e (3.26) em (3.24), obtemos

$$P_{m,N-1}^\theta(-1) = \left[-2 + \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] (2 - \lambda_{N-1}) \right] (-1)^m - [-b(2 - \lambda_{N-1})(1 - 2\theta)],$$

o que é satisfeito para todo $m \geq 1$. De acordo com o Lema (3.1), em particular, para um

dado m par, segue

$$\begin{aligned} P_{m,N-1}^\theta(-1) &= -2 + \left[\frac{1}{6} + a(1-2\theta) \right] (2 - \lambda_{N-1}) + b(2 - \lambda_{N-1})(1-2\theta) \\ &= -2 + \left[\frac{1}{6}(2 - \lambda_{N-1}) + (1-2\theta)(a+b)(2 - \lambda_{N-1}) \right] \\ &= -2 + \left[\frac{1}{6} + (1-2\theta)(a+b) \right] (2 - \lambda_{N-1}), \end{aligned}$$

usando a hipótese (3.23) e o fato de que $\cos(\Delta x) = -\cos[(N-1)\Delta x]$, obtemos

$$P_{m,N-1}^\theta(-1) = -2 + \frac{2 - \lambda_{N-1}}{1 + \cos(\Delta x)} = -2 + \frac{2 - 2\cos[(N-1)\Delta x]}{1 + \cos(\Delta x)} \quad (3.27)$$

$$= -2 + \frac{2[1 + \cos(\Delta x)]}{1 + \cos(\Delta x)} = -2 + 2 = 0 \quad (3.28)$$

$$\therefore P_{m,N-1}^\theta(-1) = 0. \quad (3.29)$$

Logo, para $|z| = 1$, temos que $P_{m,N-1}^\theta(-1) = 0$, o que implica

$$\gamma_m(-1) = \mu_{N-1}(-1)(-1)^m - \nu_{N-1}(-1) = P_{m,N-1}^\theta(-1) = 0,$$

isto é, $\gamma_m(-1) = 0$ para $|z| = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Logo, a condição **(iii)** do Lema (3.1) não se sustenta, como consequência, o método (2.3) não é assintoticamente estável.

Caso B_2 : Agora, suponha que

$$\frac{1}{6} + (1-2\theta)(a+b) > \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)}. \quad (3.30)$$

Seja $j = N-1$, $z = -1 \Rightarrow |z| = 1$ e m par, então de (3.4), obtemos

$$\nu_{N-1}(-1) = -b(2 - \lambda_{N-1})[\theta(-1) + (1-\theta)] = -b(2 - \lambda_{N-1})(1-2\theta) < 0,$$

isto é,

$$|\nu_{N-1}(-1)| = b(2 - \lambda_{N-1})(1-2\theta).$$

Por outro lado, de (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\mu_{N-1}(-1) &= \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_{N-1}) \right] (-1) - \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right) (2 - \lambda_{N-1}) \right] \\
&= -1 - \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_{N-1}) - \left[1 - \left(\frac{1}{12} + a(1 - \theta) \right) (2 - \lambda_{N-1}) \right] \\
&= -2 + \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] (2 - \lambda_{N-1}).
\end{aligned}$$

Note que pela hipótese (3.30) e pelo seguinte fato

$$\begin{aligned}
-1 < -\cos[(N-1)\Delta x] < 1 &\Rightarrow -2 < -2\cos[(N-1)\Delta x] < 2 \\
\therefore 0 < 2 - 2\cos[(N-1)\Delta x] < 4 &\Rightarrow 0 < 2 - \lambda_{N-1} = 2[1 + \cos(\Delta x)] < 4,
\end{aligned}$$

segue, para $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, por um lado

$$(2 - \lambda_{N-1}) < 4 \Rightarrow (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] < 4 \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right],$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
-2 + (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] &< -2 + \frac{4}{6} + 4a(1 - 2\theta) \\
\therefore \mu_{N-1}(-1) = -2 + (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] &< -\frac{4}{3} + 4a - 8\theta,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\mu_{N-1}(-1) < 4a - \frac{4}{3}.$$

Por outro lado, note

$$\begin{aligned}
r_1 > r_2 > 0 &\Rightarrow a > b > 0 \Rightarrow 2a > a + b > a \\
\therefore \frac{1}{3} + 2a(1 - 2\theta) &> \frac{1}{6} + 2a(1 - 2\theta) > \frac{1}{6} + (a + b)(1 - 2\theta) \\
&> \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)} \\
\therefore 2 \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] &> \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)} \\
\therefore 2(1 + \cos(\Delta x)) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] &> 1 \Rightarrow (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] > 1 \\
\therefore -2 + (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] &> -1.
\end{aligned}$$

Em resumo, temos

$$-1 < \mu_{N-1}(-1) = -2 + (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] < 4a - \frac{4}{3}. \quad (3.31)$$

Aqui consideramos o caso $\mu_{N-1}(-1) < 0$, i. é,

$$|\mu_{N-1}(-1)| = - \left[-2 + (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] \right] = 2 - (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right].$$

Pela suposição (3.30) e $2 - \lambda_{N-1} = 2[1 + \cos \Delta x]$, segue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a + (1 - 2\theta)b &> \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)} \\ \therefore \frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a &> \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)} - b(1 - 2\theta) \\ \therefore (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right] &> \left[\frac{1}{1 + \cos(\Delta x)} - b(1 - 2\theta) \right] (2 - \lambda_{N-1}), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right] &> \frac{2 - \lambda_{N-1}}{1 + \cos(\Delta x)} - b(1 - 2\theta)(2 - \lambda_{N-1}) \\ &= \frac{2[1 + \cos(\Delta x)]}{1 + \cos(\Delta x)} - b(1 - 2\theta)(2 - \lambda_{N-1}) \\ &= 2 - b(1 - 2\theta)(2 - \lambda_{N-1}) \\ \therefore -(2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right] &< -2 + b(1 - 2\theta)(2 - \lambda_{N-1}) \\ \therefore 2 - (2 - \lambda_{N-1}) \left[\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)a \right] &< b(1 - 2\theta)(2 - \lambda_{N-1}), \end{aligned}$$

isto é,

$$|\nu_{N-1}| > |\mu_{N-1}(-1)|, \quad (3.32)$$

o que implica que a condição **(ii)** do Lema (3.1) não é satisfeita. Portanto, o método (2.2) não é assintoticamente estável.

Combinando os **Casos** B_1 e B_2 , concluímos que a condição (3.6) é necessária para a estabilidade assintótica. O que completa a demonstração do resultado principal. ■

Observação 3.1. Quando os autores deste artigo preparavam-se para enviar a versão revisada do artigo, um deles descobriu que Zhang et. al [35] investigava o modelo (2.2) e obteve resultados semelhantes.

No entanto, a condição de estabilidade em $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ em [35] é diferente das apresentadas aqui e questionável. Este fato será confirmado no próximo capítulo.

3.2 Estabilidade: para $\theta \in [1/2, 1]$

No Teorema (3.1) da seção anterior, provamos que, quando $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, o esquema numérico totalmente discreto é assintoticamente estável sob a restrição de tamanho de passo. No próximo resultado, mostraremos que, quando $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, o esquema numérico proposto é incondicionalmente estável.

Teorema 3.2.

Suponha que $r_1 > r_2 > 0$. Então o método numérico totalmente discreto é incondicionalmente assintoticamente estável com respeito a solução trivial para $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Demonstração.

Assim como no Teorema (3.1), aqui faremos uso do Lema (3.1) para verificar a estabilidade assintótica. E a prova consiste de 2 passos.

Passo 1: Desta forma, iniciamos com a verificação do item (i) do Lema (3.1).

Analogamente aos cálculos feitos no Teorema precedente para se obter (3.7), encontramos

$$|z| = \left| 1 - \frac{a(2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)} \right| \quad (3.33)$$

recorde ainda da equação (3.8), isto é,

$$1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) > \frac{2}{3} > 0, \quad (3.34)$$

vale para $\theta \in \left[1, \frac{1}{2}\right]$. Além disso, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 &\Leftrightarrow 1 \leq 2\theta \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -2\theta \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2\theta \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -a \leq a(1 - 2\theta) \leq 0, \end{aligned}$$

assím,

$$\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \leq \frac{1}{6}. \quad (3.35)$$

Por outro lado, sabemos que

$$0 < 2 - \lambda_j \Rightarrow \frac{1}{2 - \lambda_j} > 0 \Rightarrow \frac{2}{2 - \lambda_j} > 0.$$

Objetivamos mostrar que

$$\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) < \frac{2}{2 - \lambda_j}. \quad (3.36)$$

Para tal, note que usando (3.35), basta mostrar que $\frac{1}{6} < \frac{2}{2 - \lambda_j}$. Com efeito, como visto no Teorema (3.1), pela equação (3.9)

$$\begin{aligned} 0 < \frac{2 - \lambda_j}{12} < \frac{1}{3} &\Rightarrow 0 < \frac{2 - \lambda_j}{12} < 1 \\ \Rightarrow \frac{2 - \lambda_j}{2} < 6 &\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{2 - \lambda_j}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

portanto, de (3.35) e (3.37) obtemos (3.36).

Segue de (3.36) que

$$\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) < \frac{2}{2 - \lambda_j} \Rightarrow (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] - 2 < 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} -2 + (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a - 2a\theta \right] &< 0 \\ \therefore -2 + \left(\frac{1}{6} - 2a\theta \right) (2 - \lambda_j) + a(2 - \lambda_j) &< 0 \\ \therefore -2 - 2 \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) + a(2 - \lambda_j) &< 0 \\ \therefore -2 \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j) \right] &< -a(2 - \lambda_j), \end{aligned}$$

portanto,

$$-2 < -\frac{a(2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12} \right) (2 - \lambda_j)}, \quad (3.38)$$

o que é exatamente a desigualdade obtida em (3.13). Então, procedendo como no

teorema (3.1), mostramos

$$|z| = \left| 1 - \frac{a(2 - \lambda_j)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)} \right| < 1. \quad (3.39)$$

Portanto, a condição (i) do Lema (3.1) é satisfeita para $j = 1, 2, \dots, N - 1$

Passo 2: Agora verificamos os itens (ii) e (iii) do Lema (3.1), os quais dividimos em 2 casos

Caso I: $\theta = \frac{1}{2}$. Considere a função de variável complexa w , introduzida em (3.16). Para $\theta = \frac{1}{2}$, obtemos

$$w = - \frac{\left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j)\right] z - \left(1 - \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{2}a\right] (2 - \lambda_j)\right)}{b(2 - \lambda_j)\left[\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right]},$$

Ou seja,

$$w = - \frac{\left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j)\right] z - \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right)}{\frac{b}{2}(2 - \lambda_j)[z + 1]}. \quad (3.40)$$

Pretendemos obter uma expressão envolvendo mínimo, i é, $\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w|$, mais precisamente, mostrar que

$$\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| \geq 1.$$

Primeiramente, isolamos z em (3.40), como o segue

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j)\right] z &= -w \frac{b}{2} (2 - \lambda_j) (z + 1) + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right) \\ &= -w \frac{b}{2} (2 - \lambda_j) z - w \frac{b}{2} (2 - \lambda_j) + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right), \end{aligned}$$

de onde, vem

$$\left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j)\right] z + w \frac{b}{2} (2 - \lambda_j) z = -w \frac{b}{2} (2 - \lambda_j) + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right),$$

portanto,

$$z = \frac{-w \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right)}{1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j) + w \frac{b}{2}(2 - \lambda_j)}.$$

Tomando o módulo de ambos os lados e fazendo $|z| = 1$, temos

$$1 = |z| = \left| \frac{-w \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right)}{1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j) + w \frac{b}{2}(2 - \lambda_j)} \right|$$

De onde, obtemos

$$\left| -w \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right) \right| = \left| \left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j)\right] + w \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right|.$$

Definindo $w = x + yi$, da igualdade acima, vem

$$\begin{aligned} \left| -(x + yi) \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right) \right| &= \\ &= \left| \left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j)\right] + (x + yi) \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right|, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \left| x \left[-\frac{b}{2}(2 - \lambda_j)\right] + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right) + \left[-y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j)\right] i \right| &= \\ \left| x \left[\frac{b}{2}(2 - \lambda_j)\right] + \left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j)\right] + \left[y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j)\right] i \right|, \end{aligned} \quad (3.41)$$

definindo, P e Q como o segue

$$P = x \left[-\frac{b}{2}(2 - \lambda_j)\right] + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a\right] (2 - \lambda_j)\right) + \left[-y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j)\right] i,$$

$$Q = x \left[\frac{b}{2}(2 - \lambda_j)\right] + \left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6}\right) (2 - \lambda_j)\right] + \left[y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j)\right] i.$$

Então, por (3.41) devemos ter que $P = Q$ ou $P = -Q$. Assim, para $P = Q$, temos

$$\begin{aligned} x \left[-\frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a \right] (2 - \lambda_j) \right) + \left[-y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] i = \\ = x \left[\frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] + \left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6} \right) (2 - \lambda_j) \right] + \left[y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] i, \end{aligned}$$

igualando as partes reais, têm-se

$$x \left[-\frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a \right] (2 - \lambda_j) \right) = x \left[\frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] + \left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6} \right) (2 - \lambda_j) \right],$$

isto é,

$$\begin{aligned} x \left[-\frac{b}{2}(2 - \lambda_j) - \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] &= 1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6} \right) (2 - \lambda_j) - 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a \right] (2 - \lambda_j) \\ \Rightarrow x[-b(2 - \lambda_j)] &= \frac{1}{2}(2 - \lambda_j) - \frac{1}{12}(2 - \lambda_j) + \frac{1}{12}(2 - \lambda_j) + \frac{1}{2}(2 - \lambda_j) \\ \therefore x &= \frac{a(2 - \lambda_j)}{-b(2 - \lambda_j)} \Rightarrow x = -\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Além disso, igualando as partes imaginárias, segue

$$\begin{aligned} -y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) &= y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \Rightarrow -y \frac{b}{2} = y \frac{b}{2} \\ \Rightarrow -y \frac{b}{2} - y \frac{b}{2} &= 0 \Rightarrow -yb = 0 \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, supondo agora que $P = -Q$, i. é,

$$\begin{aligned} x \left[-\frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] + \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} + a \right] (2 - \lambda_j) \right) + \left[-y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] i = \\ = -x \left[\frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] - \left[1 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{6} \right) (2 - \lambda_j) \right] - \left[y \frac{b}{2}(2 - \lambda_j) \right] i, \end{aligned}$$

igualando as partes reais, chegamos a uma contradição, logo não está definido. Portanto,

$$\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| = \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| = \frac{a}{b}.$$

E analogamente, como fizemos na prova do Teorema (3.1), concluímos que os itens **(ii)** e **(iii)** do Lema (3.1) são verdadeiros.

Logo, pelo Lema (3.1), temos que o método de diferenças finitas compacto Crank-Nicholson é assintoticamente estável com respeito a solução de equilíbrio.

Caso II: $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, De acordo com a função de variável complexa w , introduzida em (3.16), isto é,

$$w = \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} = \frac{\left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right]z - \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right)}{-b(2 - \lambda_j)[\theta z + (1 - \theta)]}.$$

Isolando z na equação acima, temos

$$z = \frac{-wb(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right)}{1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) + wb(2 - \lambda_j)\theta},$$

tomando o módulo em ambos os lados e admitindo que $|z| = 1$, obtemos

$$\left| -wb(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) \right| = \left| 1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) + wb(2 - \lambda_j)\theta \right|,$$

definindo $w = x + yi$ da equação acima, vem

$$\left| -(x + yi)b(2 - \lambda_j)(1 - \theta) + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) \right| = \left| 1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j) + (x + yi)b(2 - \lambda_j)\theta \right|$$

ou ainda,

$$\left| x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) + [-yb(2 - \lambda_j)(1 - \theta)]i \right| = \left| x[b(2 - \lambda_j)\theta] + \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right] + [yb(2 - \lambda_j)\theta]i \right|, \quad (3.42)$$

definindo,

$$P = x[-b(2 - \lambda_j)(1 - \theta)] + \left(1 - \left[\frac{1}{12} + a(1 - \theta)\right](2 - \lambda_j)\right) + [-yb(2 - \lambda_j)(1 - \theta)]i$$

e,

$$Q = x[b(2 - \lambda_j)\theta] + \left[1 + \left(a\theta - \frac{1}{12}\right)(2 - \lambda_j)\right] + [yb(2 - \lambda_j)\theta]i.$$

Logo, por (3.42) temos que $P = Q$ ou $P = -Q$. Para $P = Q$, fazendo os mesmos cálculos do teorema (3.1), igualando as partes reais e imaginárias, obtemos $x = -\frac{a}{b}$ e $y = 0$, respectivamente.

Agora, para $P = -Q$, novamente procedendo da mesma forma do teorema precedente, igualando as partes reais e imaginárias, encontramos $x = \frac{2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right]}{b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)}$ e $y = 0$, respectivamente. Portanto, notando que $(2 - \lambda_j) > 0$, para todo $j = 1, 2, \dots, N - 1$ e além disso, $\frac{1}{2} < \theta \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 - 2\theta < 0$. Portanto, $|b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)| = -b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)$, assim

$$\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| = \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| = \min \left\{ \frac{a}{b}, \left| \frac{2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right]}{-b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)} \right| \right\}.$$

O objetivo agora é mostrar que

$$\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| = \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| = \frac{a}{b},$$

para tal, observe que o mesmo estará demonstrado, provando que

$$\frac{a}{b} \leq \left| \frac{2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right]}{-b(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)} \right|,$$

isto é,

$$\left| 2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] \right| \geq -a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta). \quad (3.43)$$

Então, afim de verificar (3.43), por propriedades de módulo, é suficiente mostrar que as seguintes desigualdades ocorrem

$$2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] \geq -a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta),$$

e

$$2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] \geq a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta).$$

Com efeito, como já visto na seção antecedente, temos que

$$\begin{aligned} 0 < 2 - \lambda_j < 4 &\Rightarrow 2 - \lambda_j < 12 \Rightarrow \frac{1}{6}(2 - \lambda_j) < 2 \\ \therefore 2 - \frac{1}{6}(2 - \lambda_j) &> 0, \end{aligned}$$

somando $-a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta)$ à desigualdade acima, vem

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{6}(2 - \lambda_j) - a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) &\geq -a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) \\ \therefore 2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] &\geq -a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} 2 \geq 1 &\Rightarrow 2a \geq a \Rightarrow 2a(2 - \lambda_j) \geq a(2 - \lambda_j) \\ \therefore 2a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) &\leq a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) \\ \therefore 2a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) + \frac{1}{6}(2 - \lambda_j) &\leq a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) + \frac{1}{6}(2 - \lambda_j), \end{aligned} \quad (3.45)$$

notando a seguinte desigualdade,

$$\frac{1}{6}(2 - \lambda_j) + a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) < 2 + a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) < 2,$$

e usando-a em (3.45), segue

$$\begin{aligned} 2a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) + \frac{1}{6}(2 - \lambda_j) &\leq (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] < 2 \\ \therefore 2 - \frac{1}{6}(2 - \lambda_j) &\geq 2a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) \\ \therefore 2 - \frac{1}{6}(2 - \lambda_j) - a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) &\geq a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta) \\ \therefore 2 - (2 - \lambda_j) \left[\frac{1}{6} + a(1 - 2\theta) \right] &\geq a(2 - \lambda_j)(1 - 2\theta), \end{aligned} \quad (3.46)$$

de (3.44) e (3.46) segue o resultado de (3.43). E conseqentemente, temos

$$\min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} |w| = \min_{|z|=1, z \in \mathbb{C}} \left| \frac{\mu_j(z)}{\nu_j(z)} \right| = \frac{a}{b},$$

desta verificamos as condições **(ii)** e **(iii)** do Lema (3.1). Findando a demonstração. \blacksquare

Capítulo 4

Análise da convergência

Neste capítulo, estudamos a convergência do método(2.2), fazendo uso da análise de estabilidade do capítulo precedente, via teorema de Lax, para tal iniciamos com um estudo do Erro Local de Truncamento-ELT e, posteriormente, a consistência do método- θ numérico é verificada.

Lema 4.1.

Suponha que para cada $k = 0, 1, 2 \dots$ fixo tenhamos $u(x, t_k) \in C^6[x_{j-1}, x_{j+1}]$ e considere o operador \mathcal{A}_h dado em (2.1), têm-se

$$\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) = \delta_x^2 u_j^k + \frac{\Delta x^4}{480} \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_1, t_k)}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_2, t_k)}{\partial x^6} \right], \quad (4.1)$$

onde $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq \Delta x$.

Demonstração.

Com efeito, usando expansão de Taylor com o resto da integral, notamos que

$$\begin{aligned} u(x_{j+1}, t_k) &= u(x_j, t_k) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \dots + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^6}{5!} \int_0^1 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k)(1-s)^5 ds, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t_k) &= u(x_j, t_k) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) - \dots + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) - \\ &\quad - \frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^6}{5!} \int_0^1 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k)(1-s)^5 ds. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Somando as equações (4.2) e (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}
u(x_{j+1}, t_k) + u(x_{j-1}, t_k) &= 2u(x_j, t_k) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \\
&\quad + \frac{(\Delta x)^6}{120} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^5 ds \\
\frac{1}{\Delta x^2} [u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k] &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \\
&\quad + \frac{(\Delta x)^4}{120} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^5 ds,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\delta_x^2 u_j^k &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \\
&\quad + \frac{(\Delta x)^4}{120} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^5 ds. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Similarmente, por expansão de Taylor com resto da integral, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j+1}, t_k) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \Delta x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \\
&\quad + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^4}{3!} \int_0^1 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) (1-s)^3 ds \quad (4.5)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j-1}, t_k) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) - \Delta x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) - \\
&\quad - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^4}{3!} \int_0^1 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) (1-s)^3 ds, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

somando as equações (4.5) e (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j+1}, t_k) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j-1}, t_k) &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \\
&\quad + \frac{(\Delta x)^4}{6} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^3 ds,
\end{aligned}$$

de onde, segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j+1}, t_k) + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j-1}, t_k) = 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^4}{6} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^3 ds,$$

a equação acima acarreta em,

$$\frac{1}{12} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j+1}, t_k) + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j-1}, t_k) \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^4}{72} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^3 ds,$$

ou seja,

$$\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^4}{72} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^3 ds, \quad (4.7)$$

subtraindo (4.4) de (4.7), segue

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) - \delta_x^2 u_j^k &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) + \\ &\frac{(\Delta x)^4}{72} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^3 ds - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) - \\ & - \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t_k) - \frac{(\Delta x)^4}{120} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^5 ds, \end{aligned}$$

pela linearidade da integral, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) - \delta_x^2 u_j^k &= \\ &\frac{(\Delta x)^4}{360} \int_0^1 \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + s\Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - s\Delta x, t_k) \right] (1-s)^3 [5 - 3(1-s)^2] ds. \end{aligned}$$

Agora, definindo

$$g(s) = (1-s)^3 [5 - 3(1-s)^2],$$

prova-se que $g(s) \geq 0$, $\forall s \in [0, 1]$, bem como $\int_0^1 (1-s)^3 [5 - 3(1-s)^2] ds = \frac{3}{4} > 0$ e,

além disso, por hipótese $\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$ é contínua, pois $u(x_j, t_k) \in C^6[x_{j-1}, x_{j+1}]$. Dessa maneira, as condições do 2º Teorema do valor médio para integrais são satisfeitas, logo, pelo mesmo, existe $\alpha \in (0, 1)$, tal que

$$\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) - \delta_x^2 u_j^k = \frac{(\Delta x)^4}{360} \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + \alpha \Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - \alpha \Delta x, t_k) \right] \int_0^1 (1-s)^3 [5 - 3(1-s)^2] ds,$$

ou seja,

$$\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) - \delta_x^2 u_j^k = \frac{(\Delta x)^4}{480} \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + \alpha \Delta x, t_k) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - \alpha \Delta x, t_k) \right]. \quad (4.8)$$

Fazendo, $\xi_1 = \alpha \Delta x$ e $\xi_2 = \alpha \Delta x$, temos $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq \Delta x$, e da equação (4.8) segue a igualdade dada na equação (4.1) e o Lema (4.1) fica provado. ■

Lema 4.2.

Seja $h > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ duas constantes positivas. Temos

(a) Se $g(x) \in C^2[c-h, c+h]$, então

$$g(c) = \frac{1}{2} [g(c-h) + g(c+h)] - \frac{h^2}{2} g''(\xi_0), \quad c-h < \xi_0 < c+h. \quad (4.9)$$

(b) Se $g(x) \in C^2[c, c+h]$, então

$$g'(c) = \frac{1}{h} [g(c+h) - g(c)] - \frac{h}{2} g''(\xi_1), \quad c < \xi_1 < c+h. \quad (4.10)$$

(c) Se $g(x) \in C^2[c-h, c]$, então

$$g'(c) = \frac{1}{h} [g(c) - g(c-h)] + \frac{h}{2} g''(\xi_2), \quad c-h < \xi_2 < c. \quad (4.11)$$

(d) Se $g(x) \in C^3[c-h, c+h]$, então

$$g'(c) = \frac{1}{2h} [g(c+h) - g(c-h)] - \frac{h^2}{6} g'''(\xi_3), \quad c-h < \xi_3 < c+h. \quad (4.12)$$

(e) Se $g(x) \in C^4[c - h, c + h]$, então

$$g''(c) = \frac{1}{h^2} [g(c + h) - 2g(c) + g(c - h)] - \frac{h^2}{12} g^{(4)}(\xi_4), \quad c - h < \xi_4 < c + h. \quad (4.13)$$

Demonstração.

Vamos provar o item (a) do Lema (4.2), os demais são verificados, com raciocínios análogos, através de expansões em séries de Taylor.

Com efeito, usando expansão de Taylor, podemos escrever

$$g(c + h) = g(c) + hg'(c) + \frac{h^2}{2} g''(\xi_1), \quad c < \xi_1 < c + h. \quad (4.14)$$

Por outro lado, também por expansão de Taylor, temos

$$g(c - h) = g(c) - hg'(c) + \frac{h^2}{2} g''(\xi_2), \quad c - h < \xi_2 < c, \quad (4.15)$$

somando as equações (4.14) e (4.15), vem

$$g(c + h) + g(c - h) = 2g(c) + h^2 g''(\xi_0), \quad c - h < \xi_0 < c + h, \quad (4.16)$$

de onde, isolando $g(c)$ segue a equação (4.9) pretendida. ■

4.1 O erro Local de Truncamento do Método- θ Numérico

Definição 4.1.

O método numérico é consistente se $|ELT| = \mathcal{O}(\Delta t^\alpha + \Delta x^\beta)$, $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$.

Suponha que a solução $u(x, t)$ da eq. (0.5), suas derivadas em relação a x e t suficientemente regulares. Seja $\{u_j^k, j = 1, 2, \dots, N - 1, k = -m, -m + 1, \dots\}$ a solução numérica do esquema totalmente discreto (2.2), satisfazendo a condição de limitação,

$$\left| \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} u(x, t) \right| \leq C, \quad \forall j, k \geq 0,$$

onde C é uma constante independente do espaço e do tamanho do passo do tempo.

O estudo do Erro Local de Truncamento (ELT) será analisado em 2 casos, como detalhamos a seguir

Caso 1: $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, consideremos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} ELT_j^k(\theta) = & \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) - \delta_t u_j^k \right) - \\ & - r_1 \left\{ \mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) \right] - [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^k] \right\} \\ & - r_2 \left\{ \mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1-m}) + (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k-m}) \right] - [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1-m} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^{k-m}] \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

O Erro Local de Truncamento para o esquema- θ apresentado em (4.17) é dado por

$$ELT_u = |ELT_j^k|.$$

Usando expansão por séries de Taylor, vem

$$u(x_j, t_{k+1}) = u(x_j, t_k) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi),$$

ou seja,

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi),$$

isolando $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k)$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi), \quad 0 \leq \xi \leq \Delta t,$$

lembrando que $\delta_t u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t}$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) = \delta_t u_j^k - \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi), \quad 0 \leq \xi \leq \Delta t, \quad (4.18)$$

logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) - \delta_t u_j^k \right) &= \mathcal{A}_h \left(-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi) \right) \\ &= -\frac{\Delta t}{2} \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi) \right),\end{aligned}$$

passando o módulo em ambos os lados, vem

$$\left| \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) - \delta_t u_j^k \right) \right| = \frac{\Delta t}{2} \left| \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi) \right) \right|. \quad (4.19)$$

Agora, de acordo com o Lema (4.1) e expansão de Taylor, segue

$$\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) = \delta_x^2 u_j^k + \frac{\Delta x^4}{480} \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_1, t_k)}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_2, t_k)}{\partial x^6} \right], \quad (4.20)$$

onde $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq \Delta x$. Similarmente, pelo mesmo Lema (4.1), obtemos

$$\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \right) = \delta_x^2 u_j^{k+1} + \frac{\Delta x^4}{480} \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_3, t_{k+1})}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_4, t_{k+1})}{\partial x^6} \right], \quad (4.21)$$

onde $0 \leq \xi_3, \xi_4 \leq \Delta x$. Multiplicando (4.20) e (4.21) por $(1-\theta)$ e θ , respectivamente, temos

$$\mathcal{A}_h \left((1-\theta) \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) = (1-\theta) \delta_x^2 u_j^k + (1-\theta) \frac{\Delta x^4}{480} \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_1, t_k)}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_2, t_k)}{\partial x^6} \right] \quad (4.22)$$

$$\mathcal{A}_h \left(\theta \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \right) = \theta \delta_x^2 u_j^{k+1} + \theta \frac{\Delta x^4}{480} \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_3, t_{k+1})}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_4, t_{k+1})}{\partial x^6} \right], \quad (4.23)$$

somando as equações (4.22) e (4.23), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + (1-\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) \right] &= [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1} + (1-\theta) \delta_x^2 u_j^k] + \\ &+ \theta \frac{\Delta x^4}{480} \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_3, t_{k+1})}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_4, t_{k+1})}{\partial x^6} \right] + \\ &+ (1-\theta) \frac{\Delta x^4}{480} \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_1, t_k)}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_2, t_k)}{\partial x^6} \right].\end{aligned}$$

Agora definindo M como abaixo, vem

$$M = \max \left\{ \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + \xi_1, t_k), \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - \xi_2, t_k), \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j + \xi_3, t_{k+1}), \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j - \xi_4, t_{k+1}) \right\}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) \right] - [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^k] \right| \leq \\ & \quad + \theta \frac{\Delta x^4}{480} \left| \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_3, t_{k+1})}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_4, t_{k+1})}{\partial x^6} \right] \right| + \\ & \quad + (1 - \theta) \frac{\Delta x^4}{480} \left| \left[\frac{\partial^6 u(x_j + \xi_1, t_k)}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u(x_j - \xi_2, t_k)}{\partial x^6} \right] \right| \end{aligned}$$

Fazendo uso de (4.24) e da condição de limitação, segue

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) \right] - [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^k] \right| \leq \\ & \quad \theta \frac{\Delta x^4}{480} \cdot 2M + (1 - \theta) \frac{\Delta x^4}{480} \cdot 2M = \frac{\Delta x^4}{240} M, \end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $r_1 > 0$, vem

$$r_1 \left| \mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) \right] - [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^k] \right| \leq r_1 \frac{\Delta x^4}{240} M. \quad (4.25)$$

Com um tratamento análogo, podemos obter

$$r_2 \left| \mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1-m}) + (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k-m}) \right] - [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1-m} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^{k-m}] \right| \leq r_2 \frac{\Delta x^4}{240} M. \quad (4.26)$$

Portanto, fazendo decorre da desigualdade triangular e da expressão (4.17), segue

$$\begin{aligned} ELT_u &= |ELT_j^k| \leq \left| \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) - \delta_t u_j^k \right) \right| + \\ & \quad + r_1 \left| \mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1}) + (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) \right] - [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^k] \right| + \\ & \quad + r_2 \left| \mathcal{A}_h \left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k+1-m}) + (1 - \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{k-m}) \right] - [\theta \delta_x^2 u_j^{k+1-m} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^{k-m}] \right|, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
ELT_u &\leq \frac{\Delta t}{2} \left| \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi) \right) \right| + r_1 \frac{\Delta x^4}{240} M + r_2 \frac{\Delta x^4}{240} M \\
&= \frac{\Delta t}{2} \left| \mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_k + \xi) \right) \right| + \frac{\Delta x^4}{240} M(r_1 + r_2)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Caso 2: $\theta = \frac{1}{2}$. Aqui faremos diferente, isto é, mostraremos como se constrói o esquema de diferenças assintoticamente incondicionalmente estável com ordem de convergência $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ para o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = r_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + r_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t - \tau), & x \in \Omega = [0, \pi], \quad t > 0 \\ u(x, t) = u_0(x, t), & -\tau \leq t \leq 0, \quad x \in \Omega = [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq -\tau \end{cases}, \tag{4.28}$$

onde τ é o termo de atraso e $r_1, r_2 > 0$ são as constantes que expressam os coeficientes de difusão. Além disso, recorde das notações

$$\delta_t u_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t}; \quad u_j^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_j^k + u_j^{k+1}),$$

bem como do operador linear de diferenças compactas \mathcal{A}_h definido na equação (2.1) dado por

$$\mathcal{A}_h(u_j^k) = \begin{cases} \frac{u_{j+1}^k + 10u_j^k + u_{j-1}^k}{12}, & j = 1, 2, \dots, N-1 \\ u_j^k, & j = 0, N. \end{cases} \tag{4.29}$$

Vamos a construção do esquema do método (2.2) para $\theta = \frac{1}{2}$, conhecido como Método de Crank-Nicholson Compacto (MCNC).

Considere a primeira equação do sistema(4.28) aplicada no ponto $(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})$, í. é,

$$\frac{\partial u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t} = r_1 \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2} + r_2 \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \tau)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq j \leq N; \quad 0 \leq k \leq M. \tag{4.30}$$

Usando o Lema (4.2), mais precisamnete os itens (4.9) e (4.12), temos

$$\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \right] - \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^2}, \quad \theta'_{jk} \in (t_k, t_{k+1}), \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \tau)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k-m})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1-m})}{\partial x^2} \right] - \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta''_{jk})}{\partial t^2}, \quad \theta''_{jk} \in (t_{k-m}, t_{k+1-m}), \quad (4.32)$$

e

$$\frac{\partial u(x_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t} = \delta_t U_j^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^3 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^3}, \quad \theta'_{jk} \in (t_k, t_{k+1}), \quad (4.33)$$

substituindo as equações (4.31) e (4.33) na equação (4.30), segue

$$\begin{aligned} \left[\delta_t U_j^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^3 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^3} \right] &= \frac{r_1}{2} \left[\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \right] \\ &\quad - r_1 \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^2} + \frac{r_2}{2} \left[\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k-m})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1-m})}{\partial x^2} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta''_{jk})}{\partial t^2}, \quad 1 \leq j \leq N-1; 0 \leq k \leq M-1, \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde $\theta'_{jk}, \theta''_{jk} \in (t_k, t_{k+1})$ e $\theta''_{jk} \in (t_{k-m}, t_{k+1-m})$. Da equação acima resulta que

$$\begin{aligned} \delta_t U_j^{k+\frac{1}{2}} - \frac{r_1}{2} \left[\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \right] - \frac{r_2}{2} \left[\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k-m})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1-m})}{\partial x^2} \right] &= \\ = \left[\frac{1}{24} \frac{\partial^3 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^3} - \frac{r_1}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^2} - \frac{r_2}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta''_{jk})}{\partial t^2} \right] \Delta t^2, & \quad (4.35) \\ 1 \leq j \leq N-1; 0 \leq k \leq M-1, & \end{aligned}$$

aplicando o operador \mathcal{A}_h em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h \delta_t U_j^{k+\frac{1}{2}} - \frac{r_1}{2} \left[\mathcal{A}_h \frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} + \mathcal{A}_h \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \right] - \frac{r_2}{2} \left[\mathcal{A}_h \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k-m})}{\partial x^2} + \mathcal{A}_h \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1-m})}{\partial x^2} \right] &= \\ = \mathcal{A}_h \left[\frac{1}{24} \frac{\partial^3 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^3} - \frac{r_1}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^2} - \frac{r_2}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta''_{jk})}{\partial t^2} \right] \Delta t^2, & \quad (4.36) \\ 1 \leq j \leq N-1; 0 \leq k \leq M-1, & \end{aligned}$$

usando o Lema (4.1), temos

$$\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} \right) = \delta_x^2 U_j^k + \frac{\Delta x^4}{480} \frac{\partial^6 u(\xi_{jk}, t_k)}{\partial x^6}, \quad (4.37)$$

onde $\xi_{jk} \in (x_{j-1}, x_{j+1})$. Bem como, pelo mesmo Lema (4.1), obtemos

$$\mathcal{A}_h \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \right) = \delta_x^2 U_j^{k+1} + \frac{\Delta x^4}{480} \frac{\partial^6 u(\xi_{j,k+1}, t_{k+1})}{\partial x^6}, \quad (4.38)$$

onde $\xi'_{j,k+1} \in (x_{j-1}, x_{j+1})$. Somando as equações (4.37) e (4.38) e depois dividindo por 2, vem

$$\mathcal{A}_h \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_k)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1})}{\partial x^2} \right) \right] = \frac{1}{2} (\delta_x^2 U_j^k + \delta_x^2 U_j^{k+1}) + \frac{\Delta x^4}{480} \frac{\partial^6 u(\bar{\xi}_{jk}, \bar{t}_{kj})}{\partial x^6}, \quad (4.39)$$

onde $\bar{\xi}_{jk} \in (j_{-1}, x_{j+1})$, $\bar{t}_{kj} \in (t_k, t_{k+1})$. Analogamente, obtemos

$$\mathcal{A}_h \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u(x_j, t_{k-m})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_j, t_{k+1-m})}{\partial x^2} \right) \right] = \frac{1}{2} (\delta_x^2 U_j^{k-m} + \delta_x^2 U_j^{k+1-m}) + \frac{\Delta x^4}{480} \frac{\partial^6 u(\widehat{\xi}_{j,k-m}, \widehat{t}_{k-m,j})}{\partial x^6}, \quad (4.40)$$

onde $\widehat{\xi}_{j,k-m} \in (j_{-1}, x_{j+1})$, $\widehat{t}_{k-m,j} \in (t_k, t_{k+1})$.

Substituindo as equações (4.39) e (4.40) em (4.36) e notando que podemos escrever,

$$\delta_x^2 U_j^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\delta_x^2 U_j^k + \delta_x^2 U_j^{k+1}); \quad \delta_x^2 U_j^{k+\frac{1}{2}-m} = \frac{1}{2} (\delta_x^2 U_j^{k-m} + \delta_x^2 U_j^{k+1-m}),$$

temos,

$$\mathcal{A}_h \delta_t U_j^{k+\frac{1}{2}} - r_1 \delta_x^2 U_j^{k+\frac{1}{2}} - r_2 \delta_x^2 U_j^{k+\frac{1}{2}-m} = ELLT_j^{k+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq j \leq N-1; \quad 0 \leq k \leq M-1, \quad (4.41)$$

onde

$$\begin{aligned} ELLT_j^{k+\frac{1}{2}} &= \mathcal{A}_h \left[\frac{1}{24} \frac{\partial^3 u(x_j, \theta_{jk})}{\partial t^3} - \frac{r_1}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta'_{jk})}{\partial t^2} - \frac{r_2}{8} \frac{\partial^2 u(x_j, \theta''_{jk})}{\partial t^2} \right] \Delta t^2 + \\ &+ \left[\frac{r_1}{480} \frac{\partial^6 u(\bar{\xi}_{jk}, \bar{t}_{kj})}{\partial x^6} + \frac{r_2}{480} \frac{\partial^6 u(\widehat{\xi}_{j,k-m}, \widehat{t}_{k-m,j})}{\partial x^6} \right] \Delta x^4. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Notando as condições iniciais e de contorno, isto é,

$$U_j^k = u_0(x_j, t_k), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad k = -m, -m+1, \dots, 0 \quad (4.43)$$

$$U_0^k = U_N^k = 0, \quad k = -m, -m+1, \dots, M. \quad (4.44)$$

Omitindo o pequeno termo $ELLT_j^{k+\frac{1}{2}}$ em (4.41)-(4.44) e substituindo U_j^k por u_j^k , temos o

seguinte esquema de diferenças

$$\mathcal{A}_h \delta_t u_j^{k+\frac{1}{2}} = r_1 \delta_x^2 u_j^{k+\frac{1}{2}} + r_2 \delta_x^2 u_j^{k+\frac{1}{2}-m}, \quad 1 \leq j \leq N-1; \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4.45)$$

$$u_j^k = u_0(x_j, t_k), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad k = -m, -m+1, \dots, 0 \quad (4.46)$$

$$u_0^k = u_N^k = 0, \quad k = -m, -m+1, \dots, M. \quad (4.47)$$

Seja,

$$C_1 = \left\{ \frac{r_1}{480} \max_{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^6 u(x, t)}{\partial x^6} \right| + \frac{r_2}{480} \max_{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^6 u(x, t - \tau)}{\partial x^6} \right| \right\}, \quad (4.48)$$

e

$$C_2 = \left\{ \frac{1}{24} \max_{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} \right| + \frac{r_1}{8} \max_{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right| + \frac{r_2}{8} \max_{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right| \right\}, \quad (4.49)$$

assim, defina uma constante $C_3 > 0$ dada por

$$C_3 = \max\{C_1, C_2\}, \quad (4.50)$$

então, temos

$$|ELT_j^{k+\frac{1}{2}}| \leq C_3(\Delta t^2 + \Delta x^4), \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad 0 \leq k \leq M-1. \quad (4.51)$$

Observação 4.1.

Entre todos os esquemas de diferenças construídos até aqui, o esquema de diferenças (4.45)-(4.47) atinge a ordem mais alta do erro local de truncamento. Portanto, o esquema de diferenças (4.45)-(4.47) é chamado de esquema de diferenças compactas.

No geral, considerando as equações (4.27) e (4.51) existe uma constante C para tornar o ELT do método- θ compacto satisfatório, isto é, temos

$$|ELT(\theta)| = \begin{cases} C(\Delta t + \Delta x^4), & \theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ C(\Delta t^2 + \Delta x^4), & \theta = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.52)$$

Uma combinação de (4.52) e a Definição (4.1), temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *O método- θ compacto dado na equação (2.2) é consistente.*

4.2 A Convergência do Método- θ

Agora, usando teorema de equivalência de Lax, Pode-se obter o seguinte teorema

Teorema 4.2.

Suponha que a solução $u(x,t)$ da eq. (0.5), suas derivadas em relação a x e t suficientemente regulares. Seja $\{u_j^k, j = 1, 2, \dots, N-1, k = -m, -m+1, \dots\}$ a solução numérica do esquema totalmente discreto (2.2). Além disso, suponha que as suposições dos teoremas (3.1) e (3.2) ocorra, e ainda, que a condição de limitação é satisfeita,

$$\left| \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} u(x,t) \right| \leq C, \quad 0 \leq j \leq 6, \quad 0 \leq k \leq 3, \quad C > 0,$$

onde C é uma constante independente do espaço e do tamanho do passo do tempo. Então, o método- θ é convergente, isto é, a equação de diferença admite uma única solução satisfatória e, além disso, temos para $k = 1, 2, \dots$

$$\|e^k\| \leq \begin{cases} C(\Delta t + \Delta x^4), & \theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ C(\Delta t^2 + \Delta x^4), & \theta = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.53)$$

onde,

$$e^k = [u_1^k - U_1^k, u_2^k - U_2^k, \dots, u_{N-1}^k - U_{N-1}^k]^T$$

e $U_j^k = u(x_j, t_k)$, $j = 0, 1, \dots$, $k = -m, -m+1, \dots$ e

$$\|e^k\| = \max |u_j^k - U_j^k|$$

Capítulo 5

Experimentos numéricos

Nesta seção, apresentamos várias experiências numéricas para ilustrar a estabilidade e a convergência do método numérico proposto.

5.1 Testes de Estabilidade

A estabilidade do método proposto é testada através da resolução da Eq. (0.5), isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = r_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) + r_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t - \tau), \quad (5.1)$$

com as seguintes condições iniciais e de contorno

$$\begin{cases} u(x, t) = \sin(x), & -\tau \leq t \leq 0, & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq -\tau. \end{cases}$$

5.1.1 Ilustração numérica dos resultados atuais de estabilidade

Definimos o parâmetro $r_1 = 1.5$, $r_2 = 1$ e $\tau = 1$. Nesse caso, a solução de equilíbrio do Problema (0.5) é assintoticamente estável. Aplicamos o método proposto com $\theta = 0$ e diferentes etapas para resolver o problema. Primeiro, definimos $\Delta x = \frac{\pi}{10}$ e $\Delta t = \frac{1}{30}$, o que implica que

$$\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)(a + b) > \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)}.$$

As soluções numéricas com as etapas fornecidas são mostradas na figura (5.1), conforme apresentada abaixo.

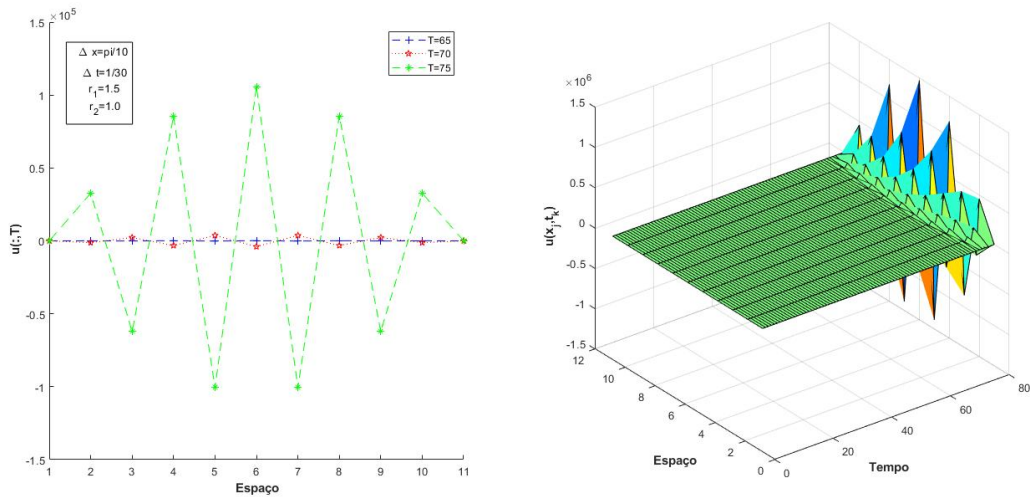


Figura 5.1: $\theta = 0, \tau = 1$, Instável

Claramente, as soluções numéricas não são assintoticamente estáveis. Segundo, estabelecemos $\Delta x = \frac{\pi}{10}$ e $\Delta t = \frac{1}{100}$, de onde segue

$$\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)(a + b) < \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)}.$$

As soluções numéricas com os tamanhos das etapas são mostradas na Fig. (5.2) abaixo

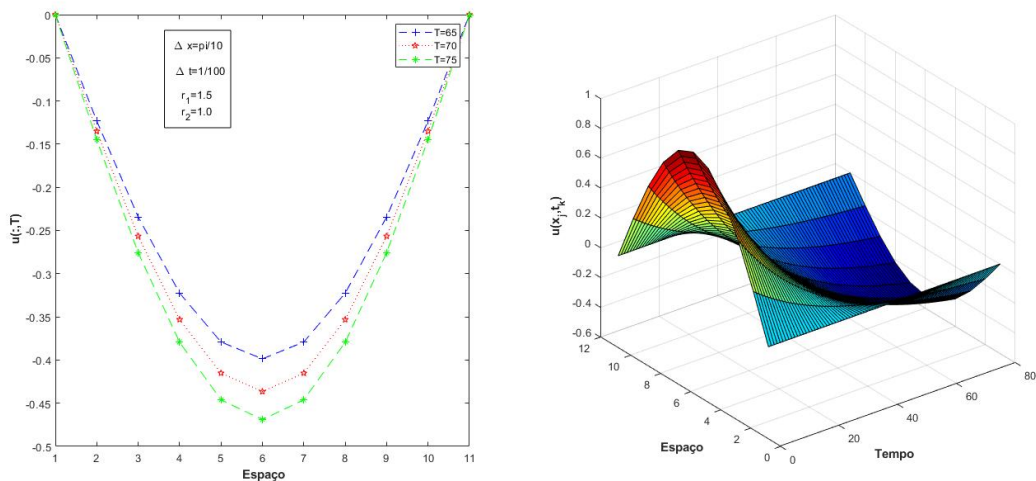


Figura 5.2: $\theta = 0, \tau = 1$, Estável

O gráfico indica que as soluções numéricas são assintoticamente estáveis. Esses resultados concordam com os resultados teóricos do Teorema (3.1).

Em seguida, aplicamos o método proposto com $\theta = \frac{1}{2}$ ou $\theta = 1$ e diferentes etapas para resolver o problema. Os resultados numéricos são mostrados nas figuras (5.3)-(5.6),

respectivamente. Estas figuras mostram que a solução numérica é assintoticamente estável. E eles confirmam o resultado teórico no Teorema (3.2).

Portanto, de acordo com as imagens apresentadas acima, os estudos referente a estabilidade do método proposto, está bem posto.

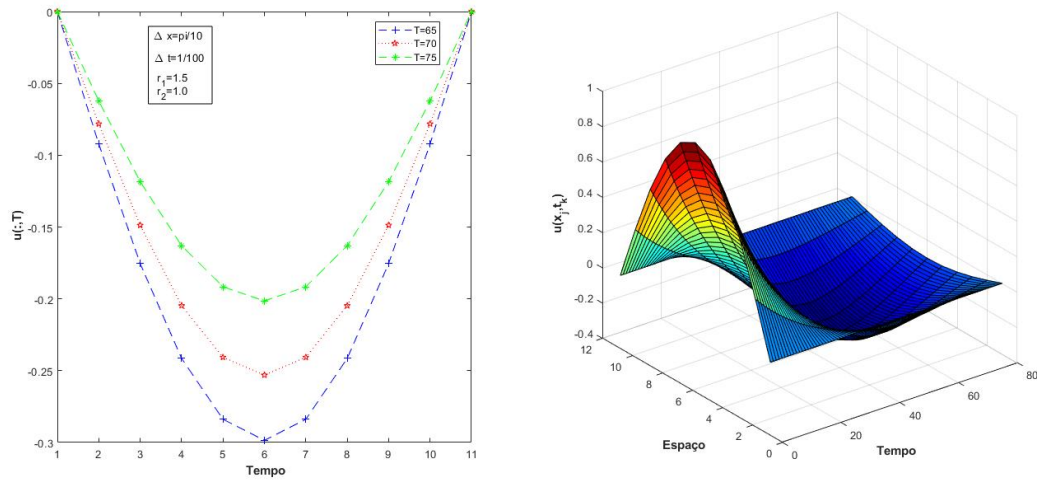


Figura 5.3: $\theta = \frac{1}{2}$, $\tau = 1$, Estável

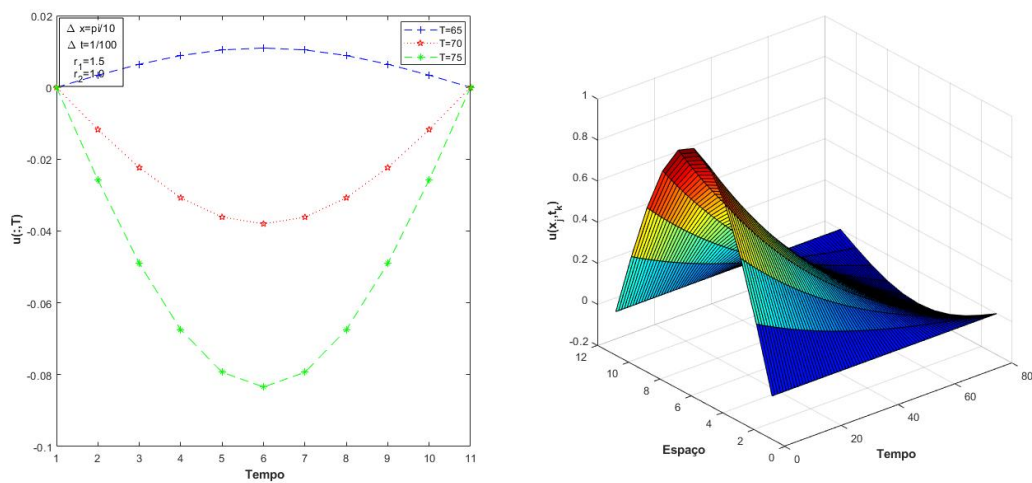
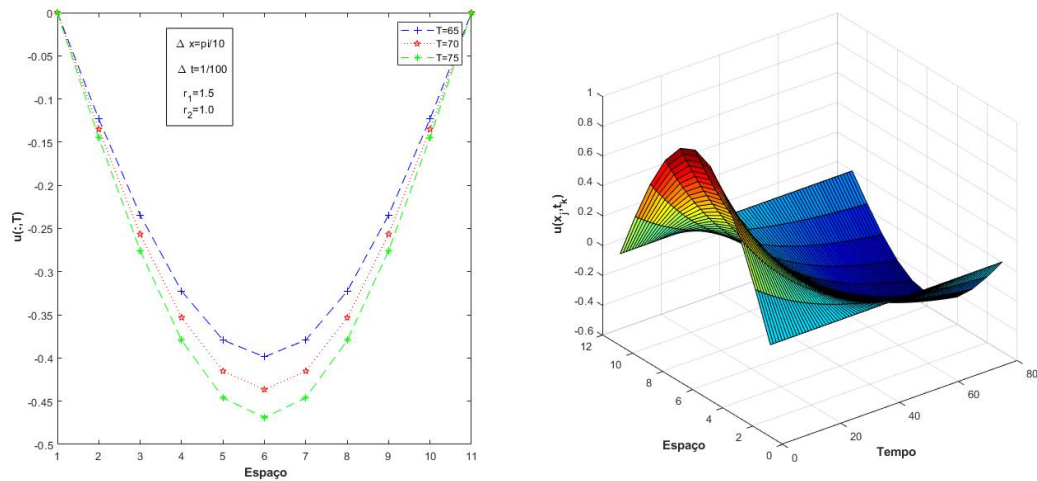
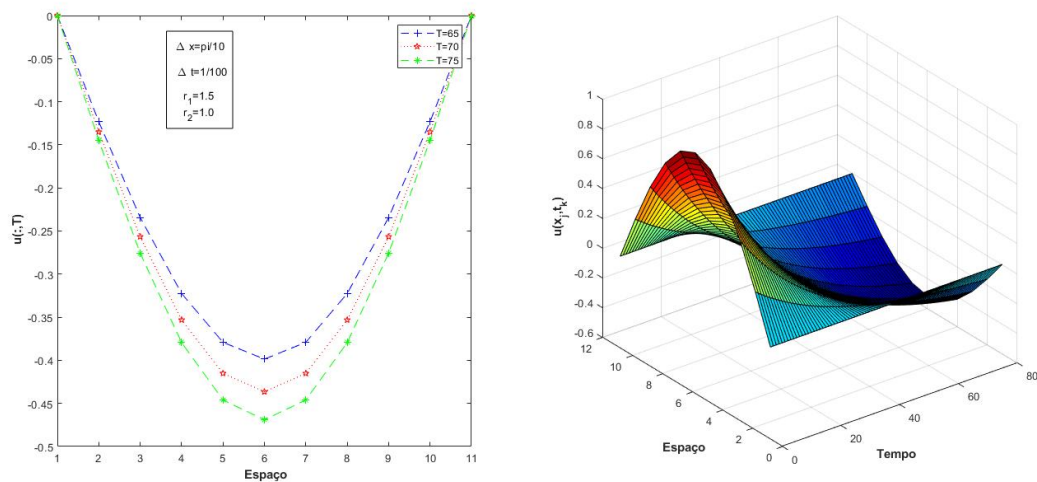


Figura 5.4: $\theta = \frac{1}{2}$, $\tau = 1$, Estável

Figura 5.5: $\theta = 1$, $\tau = 1$, EstávelFigura 5.6: $\theta = 1$, $\tau = 1$, Estável

5.1.2 Comparação com o trabalho existente

Em [35], os autores investigaram o modelo (0.5) usando o mesmo método numérico (2.2). Quando, $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ é mostrado que o esquema numérico totalmente discreto (2.2) é assintoticamente estável em relação à solução de equilíbrio, se e somente se,

$$(a + b) < \frac{10 - \cos(\Delta x)}{12(1 + \cos(\Delta x))(1 - 2\theta)}. \quad (5.2)$$

O resultado acima é diferente do nosso. Nossa condição de estabilidade assintótica pode ser reescrita como

$$(a + b) < \frac{1}{(1 + \cos(\Delta x))(1 - 2\theta)} - \frac{1}{6(1 - 2\theta)}. \quad (5.3)$$

Sustraindo o lado direito de (5.2) do lado direito de (5.3), obtemos

$$\frac{1}{(1 + \cos(\Delta x))(1 - 2\theta)} - \frac{1}{6(1 - 2\theta)} - \frac{10 - \cos(\Delta x)}{12(1 + \cos(\Delta x))(1 - 2\theta)} = \frac{-\cos(\Delta x)}{12(1 + \cos(\Delta x))(1 - 2\theta)} < 0.$$

Portanto, a região de estabilidade do presente trabalho é menor que a de (5.2). Apresentaremos um teste numérico para mostrar que o resultado da estabilidade em $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ em [35] é questionável.

No teste numérico, ainda escolhemos o parâmetro $r_1 = 1.5$, $r_2 = 1$ e $\tau = 1$ para que a solução trivial do problema (0.5) seja assintoticamente estável. Aplicamos o método proposto com $\theta = 0$, $\Delta x = \frac{\pi}{10}$ e $\Delta t = \frac{1}{66}$. Nesse caso,

$$(a + b) = 0.38379236228183 > \frac{1}{(1 + \cos(\Delta x))(1 - 2\theta)} - \frac{1}{6(1 - 2\theta)} = 0.345876148801792,$$

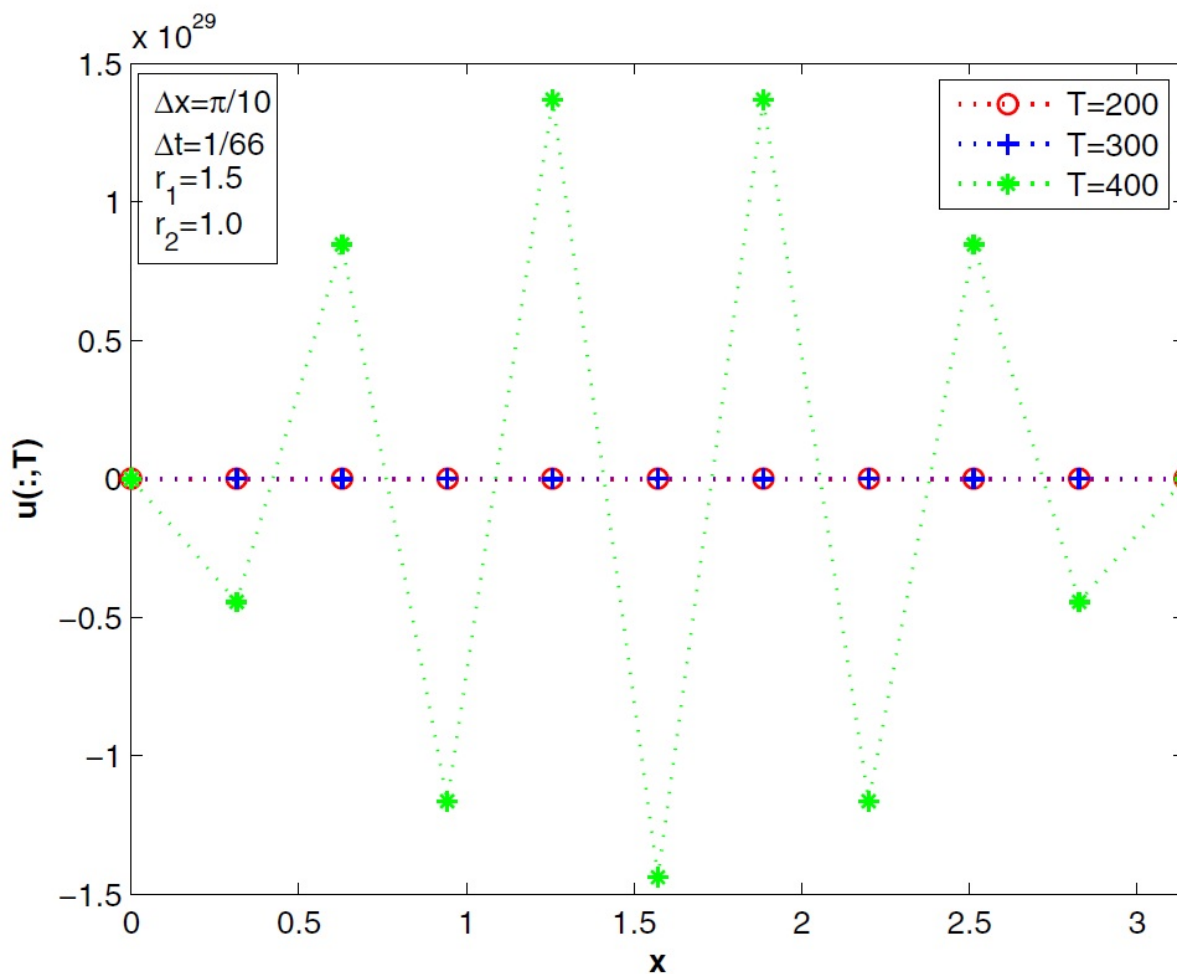
o que implica que as soluções numéricas não são assintoticamente estáveis de acordo com a nossa condição, dada em (5.3). No entanto, verificamos facilmente que

$$(a + b) = 0.38379236228183 < \frac{10 - \cos(\Delta x)}{12(1 + \cos(\Delta x))(1 - 2\theta)} = 0.386497580846087,$$

o que implica que as soluções numéricas serão assintoticamente estáveis de acordo com a condição (5.2) em [35].

Agora, aplicamos o método proposto com $\theta = 0$, $\Delta x = \frac{\pi}{10}$ e $\Delta t = \frac{1}{66}$ para resolver o problema. As soluções numéricas são plotadas na Fig. 7. Podemos observar que as soluções numéricas não são assintoticamente estáveis. Os resultados confirmaram ainda mais nossas conclusões.

Fonte: Wu, Fengyan and Li, Dongfang and Wen, Jinming and Duan, Jinqiao, 2018. Stability and Convergence of compact finite difference method for parabolic problems with delay, Appl. Math. Comput., Elsevier, vol. 322(C), pages 129-139.

Figura 5.7: $\theta = 0$, $\tau = 1$, Instável

5.2 Testes de Convergência

Tentamos mostrar um teste de precisão para a seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = r_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + r_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t - \tau) + h(x, t), \quad (5.4)$$

com a condição inicial e o termo adicionado $h(x, t) = \sin x (-e^{-t} + r_1 e^{-t} + r_2 e^{-(t-\tau)})$ especificado para que a solução exata seja $u(x, t) = e^{-t} \sin(x)$.

Aqui, tomamos os parâmetros $r_1 = 1$, $r_2 = 0.5$, $\tau = 0.5$ e resolvemos o problema em $[0, \pi] \times [0, 2]$ com diferentes tamanhos de etapas espaciais e temporais $(\Delta x = \frac{\pi}{N}, \Delta t = \frac{\tau}{m})$. Consideramos $\Delta t \approx \Delta x^4$ se $\theta = 1$ e $\Delta t \approx \Delta x^2$ se $\theta = \frac{1}{2}$ quando o método da diferença compacta (2.2) é aplicado para resolver o problema. Além disso, também testamos o problema usando os métodos propostos em [30, 31], onde o método da diferença finita

central é aplicado para discretizar o operador de difusão e o método- θ é aplicado para discretar o sistema resultante. Os resultados obtidos podem ser encontrados na seguinte referência[7].

Em resumo, tais resultados implicam ainda que o método compacto de diferenças finitas fornece um melhor resultado de convergência na direção espacial, em verdade temos

Tabela 1

Estabilidade e order de convergência dos diferentes métodos			
	$\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$	$\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$	Order de convergência
Método em [30, 31]	$(1 - 2\theta)(a + b) < \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)}$	Incondicionalmente estável	2
Método (2.2)	$\frac{1}{6} + (1 - 2\theta)(a + b) < \frac{1}{1 + \cos(\Delta x)}$	Incondicionalmente estável	4

Capítulo 6

Conclusão

Neste estudo, o método de diferença finita compacta e o método- θ linear são aplicados à equação teste (0.5), resultando no método descrito na equação eq (2.2), onde neste investigamos a estabilidade, consistência e convergência do método numérico totalmente discreto. Os resultados obtidos melhoram os de [35]. Também comparamos a estabilidade do presente método com a do método em [30, 31] e mostramos os resultados na [Tabela 1](#). Embora a região de estabilidade do presente método (2.2) seja menor apenas quando $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, o presente método(2.2) é altamente competitivo, pois fornece um melhor resultado de convergência na direção espacial, sem aumentar o custo computacional.

Perspectivas futuras

No futuro, esperamos aplicar o método para resolver alguns problemas importantes do mundo real em ciências e tecnologias, por exemplo, os modelos matemáticos em [1, 2, 3]. Acreditamos que o estudo de equações diferenças com atraso, além de inovador, abre um leque de possibilidades para a construção de métodos numéricos mais realista, possibilitando assim, uma melhor aproximação da solução exata de EDP's.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Brunner, *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [2] O. Diekmann , S.A.V. Gils , S.M.V. Lunel , H.O. Walther, *Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Springer, Berlin, 1995.
- [3] J. Wu, *Theory and Application of Partial Functional Differential Equation*, Applied Mathematical Sciences, vol. 119, Springer, 1996.
- [4] A. Bellen , M. Zennaro, *Numerical Methods for Delay Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [5] M. Liu , M.N. Spijker , *The stability of the θ -methods in the numerical solutions of delay differential equations*, IMA J. Numer. Anal. 10 (1990) 31–48.
- [6] N. Guglielmi , *Delay dependent stability regions of θ -methods for delay differential equations*, IMA J. Numer. Anal. 18 (1998) 399–418.
- [7] Wu, Fengyan and Li, Dongfang and Wen, Jinming and Duan, Jinqiao, 2018. Stability and Convergence of compact finite difference method for parabolic problems with delay, Appl. Math. Comput., Elsevier, vol. 322(C), pages 129-139.
- [8] J. Zhao , Y. Fan , Y. Xu , *Delay-dependent stability analysis of symmetric boundary value methods for linear delay integro-differential equations*, Numer. Algorithms 69 (2015) 321–336.
- [9] D. Li , C. Zhang , *Construction of high-order Runge–Kutta methods which preserve delay-dependent stability of DDE*, Appl. Math. Comput. 280 (2016) 168–179.

- [10] C.W. Cryer , *Highly stable multistep methods for retarded differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974) 788–797.
- [11] M. Zennaro , *P-stability of Runge–Kutta methods for delay differential equations*, Numer. Math. 49 (1986) 305–318.
- [12] N. Guglielmi , E. Hairer , *Order stars and stability for delay differential equations*, Numer. Math. 83 (1999) 371–383.
- [13] C. Zhang , S. Vandewalle , *Stability criteria for exact and discrete solutions of neutral multidelay-integro-differential equations*, Adv. Comput. Math. 28 (4) (2008) 383–399.
- [14] D. Li , C. Zhang , *Superconvergence of a discontinuous Galerkin method for first-order linear delay differential equations*, J. Comput. Math. 29 (2011) 574–588.
- [15] D. Li , C. Zhang , *L^∞ error estimates of discontinuous Galerkin methods for delay differential equations*, Appl. Numer. Math. 82 (2014) 1–10 .
- [16] W. Wang , *On a-stable one-leg methods for solving nonlinear Volterra functional differential equations*, Appl. Math. Comput. 117 (2017) 50–68.
- [17] W. Wang , *Stability of solutions of nonlinear neutral differential equations with piecewise constant delay and their discretizations*, Appl. Math. Comput. 219 (2013) 4590–4600.
- [18] B. Zubik-Kowal , *Stability in the numerical solution of linear parabolic equations with a delay term*, BIT Numer. Math. 41 (2001) 191–206.
- [19] C. Huang , S. Vandewalle , *Unconditionally stable difference methods for delay partial differential equations*, Numer. Math. 122 (2012) 579–601.
- [20] D. Li , C. Zhang , J. Wen , *A note on compact finite difference method for reaction–diffusion equations with delay*, Appl. Math. Model. 39 (2015) 1749–1754.
- [21] S. Vandewalle , M.J. Gander , *Optimized overlapping Schwarz methods for parabolic PDEs with time-delay*, Lect. Notes. Comput. Sci. Eng. 40 (2005) 291–298 .
- [22] S. Wu , T. Huang , S. Wu , *Convergence analysis of the overlapping Schwarz waveform relaxation algorithm for reaction–diffusion equations with time delay*, IMA. J. Numer. Anal. 32 (2012) 632–671.

- [23] Q. Zhang , D. Li , C. Zhang , D. Xu , *Multistep finite difference schemes for the variable coefficient delay parabolic equations*, J. Differ. Equ. Appl. 22 (6) (2016) 745–765.
- [24] Q. Zhang , C. Zhang , L. Wang , *The compact and Crank–Nicolson ADI schemes for two-dimensional semilinear multidelay parabolic equations*, J. Comput. Appl. Math. 306 (2016) 217–230.
- [25] D. Li , C. Zhang , *Nonlinear stability of discontinuous Galerkin methods for delay differential equations*, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 457–461.
- [26] D. Li , C. Zhang , M. Ran , *A linear finite difference scheme for generalized time fractional Burgers equation*, Appl. Math. Model. 40 (2016) 6069–6081.
- [27] D. Li , H. Liao , W. Sun , J. Wang , J. Zhang , *Analysis of L1-Galerkin FEMs for time fractional nonlinear parabolic problems*, Commu. Comput. Phys. 23 (2018) . In press
- [28] D. Green , H.W. Stech , *Diffusion and hereditary effects in a class of population models in differential equations and applications in ecology*, Epidemics, and Population Problems, Academic Press, New York, 1981 .
- [29] P.J. Van der Houwen , B.P. Sommeijer , C.T.H. Baker , *On the stability of predictor–corrector methods for parabolic equations with delay*, IMA J. Numer. Anal. 6 (1986) 1–23.
- [30] H. Tian , *Asymptotic stability of numerical methods for linear delay parabolic differential equations*, Comput. Math. Appl. 56 (2008) 1758–1765.
- [31] H. Tian , *Asymptotic stability analysis of the linear θ -method for linear parabolic differential equations with delay*, J. Differ. Equ. Appl. 15 (2009) 473–487.
- [32] L. Blanco-Cocom , E. Avila Vales , *Convergence and stability analysis of the θ -method for delayed diffusion mathematical models*, Appl. Math. Comput. 231 (2014) 16.25 .
- [33] H. Liang , *Convergence and asymptotic stability of Galerkin methods for linear parabolic equations with delay*, Appl. Math. Comput. 15 (2015) 160–178.
- [34] M.A. Castro , F. Rodriguez , J. Cabrera , J.A. Martin , *Difference schemes for time-dependent heat conduction models with delay*, Int. J. Comput. Math. 91 (2014) 53–61 .

- [35] Q. Zhang , M.Chen , Y. Xu , D. Xu , *Compact θ -method for the generalized delay diffusion equation*, Appl. Math. Comput. 316 (2018) 357–369 .
- [36] J.W. Thomas , *Numerical partial differential equations: finite difference methods*, in: Texts in Applied Mathematics, vol. 22, Springer, Berlin, 1995.
- [37] SMITH, G. D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations - Finite Difference Methods*
- [38] Coelho, F. U, *Um Curso de Álgebra Linear/ Flávio Ulhoa Coelho, Mary Lilian Lourenço- 2. ed. rev. e ampl., 3, reimp. -São Paulo;2013.*
- [39] Duffin, R. J, *ALGORITHMS FOR CLASSICAL STABILITY PROBLEMS*, SIAM REVIEW, Vol. 11, April 1969
- [40] HOLMES, M. H., *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations* . 1st ed. Springer, 2000, capítulo 6.
- [41] FORTUNA, Armando de Oliveira. Técnicas computacionais para dinâmica dos fluídos: conceitos básicos e aplicações. [S.l: s.n.], 2000.