



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

**Estabilidade assintótica de sistemas fracamente
dissipativos de Timoshenko**

Maridilce de Jesus Silva Brito

BELÉM-PA
2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Maridilce de Jesus Silva Brito

Estabilidade assintótica de sistemas fracamente dissipativos de Timoshenko

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Maridilce de Jesus Silva Brito como requisito parcial para obtenção do Título de Mestra em Matemática pela UFPA.

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

BELÉM-PA
2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

B862e Brito, Maridilce de Jesus Silva.
Estabilidade assintótica de sistemas fracamente dissipativos de
Timoshenko / Maridilce de Jesus Silva Brito. — 2021.
33 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-
Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Vigas de
Timoshenko. 3. Teoria de Semigrupos. 4. Estabilidade
exponencial. 5. Decaimento polinomial. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Maridilce de Jesus Silva Brito

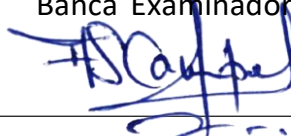
Estabilidade assintótica de sistemas fracamente dissipativos de Timoshenko

Dissertação apresentada ao curso de mestrado em Matemática e Estatística UFPA, como pré-requisito para obtenção de Título de Mestra em Matemática.

Resultado: APROVADA

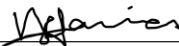
Data de defesa: 29 de Outubro de 2021

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (Orientador)

PPGME / PDM / UFPA – Campus Belém



Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias (Membro Titular Interno)

PPGME / UFPA – Campus Belém



Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (Membro Titular Externo)

PDM / UFPA – Campus Abaetetuba



Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez (Membro Titular Externo)

UFPA – Campus Bragança

*Aos meus pais: Antonio Brito e Maria Silva
e aos meus queridos e companheiros irmãos: Antonio, Cíntia e Mauri.*

AGRADECIMENTOS

Tenho imensa gratidão à minha família. Sempre acreditaram nas minhas ações e nos meus sonhos, servindo como inspiração para eu continuar lutando.

A todos os meus professores da educação básica pelo companheirismo, conselho e atenção, principalmente, à Maria Coelho, Carlos Melo, Gilvan Lira e Shirley Navegantes por serem imprescindíveis na minha opção pela Matemática.

Ao meu orientador Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo por todo apoio, confiança, sinceridade e dedicação de horas de encontros para orientação. Seus ensinamentos e conselhos foram fundamentais para minha continuidade no programa.

Aos professores: Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias, Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro e Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez por aceitarem o convite para compor a banca examinadora deste trabalho e contribuir para o enriquecimento do mesmo.

Tenho muito carinho pelos professores do curso de licenciatura em Matemática por todo apoio, ensinamento e admiração que me despertaram.

À secretaria e à coordenação do PPGME por toda a prestação de serviço que me foram realizados, mostrando-se sempre solícitos e pontuais.

Às grandes amigas que ao longo do curso eu construí, pessoas que acompanharam todas as minhas fases: vibraram com as minhas vitórias e, principalmente, ergueram-me nas derrotas.

À Universidade Federal do Pará por toda minha formação acadêmica e oportunidades de crescimento profissional.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

Resumo

BRITO, M. J. S. **Estabilidade assintótica de sistemas fracamente dissipativos de Timoshenko.** 2021. 33 p. Dissertação (Mestrado Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém – PA, 2021.

No presente trabalho nós consideramos o modelo de vigas de Timoshenko quando submetido a um mecanismo dissipativo friccional em dois problemas distintos. Num primeiro momento analisamos a boa colocação do problema, para tal utilizamos Teoria de Semigrupos. Em seguida, estudamos o comportamento da energia de soluções ao se introduzir um mecanismo dissipativo na equação do ângulo de rotação. Posteriormente, analisamos o sistema em que se apresenta uma dissipação na equação de deslocamento. Em ambos os casos, seguimos o seguinte roteiro de análise: cenário de Semigrupo; falta de estabilidade exponencial; estabilidade exponencial e decaimento polinomial. Vimos que a estabilidade exponencial somente é garantida sob a condição em que exista a igualdade das velocidades de propagação de ondas. Caso essa condição não seja satisfeita, conseguimos provar o decaimento polinomial do mesmo.

Palavras-chave: Vigas de Timoshenko, Teoria de Semigrupos, Estabilidade Exponencial, Decaimento Polinomial.

Abstract

BRITO, M. J. S. **Asymptotic stability of systems weakly Timoshenko's dissipatives.** 2021. 33 p. Dissertação (Mestrado Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém – PA, 2021.

In the present work we consider the Timoshenko beam model when submitted to a frictional dissipative mechanism in two distinct problems. At first, we analyze the correctness of the problem, for which we use Semigroup Theory. Next, we study the behavior of the energy of solutions by introducing a dissipative mechanism into the rotation angle equation. Afterwards, we analyze the system in which a dissipation is presented in the displacement equation. In both cases, we followed the following analysis script: Semigroup scenario; lack of exponential stability; exponential stability and polynomial decay. We have seen that exponential stability is only guaranteed under the condition that the propagation speeds of waves are equal. If this condition is not satisfied, we can prove its polynomial decay.

Keywords: Timoshenko Beams, Semigroup Theory, Exponential Stability, Polynomial Decay.

1	INTRODUÇÃO	1
2	MODELOS DISSIPATIVOS DE VIGAS DE TIMOSHENKO	5
2.1	Resultados Preliminares	5
2.2	Introdução do problema geral	6
2.3	Cenário de Semigrupos	6
2.3.1	Funcional de Energia do Sistema	9
3	DISSIPACÃO NA EQUAÇÃO DE ROTAÇÃO: $\alpha = 0$ E $\beta > 0$	11
3.1	Falta de Estabilidade Exponencial	11
3.2	Estabilidade Exponencial	13
3.3	Decaimento Polinomial	19
4	DISSIPACÃO NA EQUAÇÃO DE DESLOCAMENTO: $\alpha > 0$ E $\beta = 0$	21
4.1	Falta de Estabilidade Exponencial	22
4.2	Estabilidade Exponencial	23
4.3	Decaimento Polinomial	29
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	31
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	33

INTRODUÇÃO

A humanidade busca constantemente o aprimoramento de suas técnicas e tecnologias em termos de durabilidade, baixo custo e eficiência. Existem vários problemas em aberto nas engenharias, porém é necessário mais de um tipo de profissional para então analisar e julgar todos os aspectos físicos e químicos de um certo material. Uma dessas aplicações será abordada no presente trabalho sob a ótica do campo da Matemática.

Estamos nos referindo à então chamada *Teoria de Vigas de Timoshenko*, no qual é a teoria desenvolvida pelo engenheiro ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko em parceria com o físico e matemático austríaco Paul Ehrenfest, que modela o comportamento de uma viga através das Equações Diferenciais Parciais levando em conta a deformação por cisalhamento e os efeitos rotacionais da flexão, tornando plausível a descrição do comportamento de vigas grossas ou vigas que estão submetidas a excitação de alta frequência quando o comprimento de onda se aproxima da espessura da viga.

Desse modo, podemos nos questionar: Como a Matemática pode nos ajudar com esse tipo de análise para o comportamento das vigas? Naturalmente, as vigas e as placas sofrem alterações ao longo do tempo, como por exemplo, com a mudança de temperatura que provoca a dilatação ou contração do material, alterando assim a sua estrutura física. Entretanto, é possível amenizar os efeitos dessa mudança. É importante ressaltar que nosso interesse é voltado para modelos dissipativos, isto é, são modelos matemáticos que liberam energia. Seguindo essa linha de raciocínio, temos a finalidade de estudar e implementar mecanismos que amenizem as vibrações que podem surgir nessas vigas. Em outras palavras, estamos falando do conceito de estabilização, que nos auxilia em muitas análises sobre o sistema.

O Problema

O presente trabalho inspira-se nos resultados do modelo de vigas de Timoshenko apresentados nos artigos publicados Almeida Júnior, Santos & Muñoz Rivera [1] e Muñoz Rivera & Racke [2] cuja intenção é analisar o comportamento da energia dos modelos de dissipação. Em linguagem matemática, podemos descrever as vibrações transversais de uma viga pelas seguintes equações

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha \varphi_t = 0; \quad (1.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta \psi_t = 0. \quad (1.2)$$

Para esse modelo de vigas de Timoshenko, denotamos o deslocamento transversal da superfície média da placa de cada ponto do corpo de coordenadas $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ definidos por $\varphi = \varphi(x, t)$; enquanto que o

ângulo de rotação de um filamento da placa é indicado por $\psi = \psi(x, t)$. Além disso, também consideramos ρ é a densidade do material, além de $\rho_1 = \rho A$ e $\rho_2 = \rho I$, em que A é a área de seção transversal e I é o segundo momento de inércia na seção; κ simboliza o fator de correção do cortante $\varphi_x - \psi$; $b = b(x)$ indica o módulo de rigidez à flexão; e por fim, α e β denotam as constantes positivas de dissipação.

Adicionamos ao sistema (1.1)–(1.2) as condições de contorno Dirichlet-Neumann

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0; \quad \forall t > 0. \quad (1.3)$$

e também as condições iniciais seguintes

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x); \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x); \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x); \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad \forall x \in (0, L). \quad (1.4)$$

para deixar o problema mencionado acima mais completo.

Trabalhos em Destaque

A condição que garante a propriedade de estabilidade exponencial foi identificada pela primeira vez por Soufyane [8], no qual mostra a necessidade de se verificar a igualdade das velocidades de propagação de onda. E desde então é utilizada em outros trabalhos, como por exemplo em Muñoz Rivera & Racke [2], onde ratificaram esta condição e também fizeram uso da técnica de Semigrupos para provar a estabilidade exponencial.

Os autores, deste último trabalho citado, analisam um sistema de Timoshenko não linear como um problema de valor de contorno inicial em um domínio limitado unidimensional, estando presente um mecanismo dissipativo por amortecimento friccional apenas na equação do ângulo de rotação, isto é,

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \sigma_1(\varphi_x, \psi)_x = 0, \quad (1.5)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - \chi(\psi_x)_x + \sigma_2(\varphi_x, \psi) + d\psi_t = 0, \quad (1.6)$$

onde consideram que as funções φ, ψ dependem do par $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$.

No primeiro momento, é dada uma demonstração alternativa para a estabilidade exponencial do caso linear do problema, ou seja, do sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \sigma_1(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.7)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + d\psi_t = 0. \quad (1.8)$$

com as condições de contorno Dirichlet-Neumann (1.3) e as condições iniciais (1.4). Posteriormente, provam a estabilidade polinomial de forma mais geral. Além disso, é realizado uma investigação para a estabilidade exponencial para o caso não linear, que é o objetivo principal do texto.

A estabilidade exponencial também foi mostrada no trabalho de Raposo, Ferreira, Santos & Castro [3]. Na ocasião, não foi necessário a condição envolvendo as velocidades de propagação porque foi usado a técnica de Semigrupos em acordo com o Método de Energia para operadores lineares.

Em Almeida Júnior, Santos & Muñoz Rivera [1], foi estudado o sistema em que se apresenta um *damping* na equação de deslocamento. Com isso, obtiveram resultados similares aos de Muñoz Rivera & Racke [2], mas foi usado o Método de Energia para obter a estabilidade exponencial. Ainda sobre o artigo Almeida Júnior, Santos & Muñoz Rivera [1], mostraram que o sistema é estável exponencialmente

somente quando as velocidades das ondas forem as mesmas. Se essa condição não é satisfeita, provaram que os sistemas de Timoshenko são polinomialmente estáveis, proporcionando a taxa de decaimento ideal.

Vamos acompanhar o raciocínio que predomina o texto anterior. Um modelo simples que descreve a vibração transversal de uma viga foi desenvolvido em 1921. As equações governantes de tal modelo podem ser expressas por

$$\rho A \varphi_{tt}(x, t) = S_x(x, t), \quad (1.9)$$

$$\rho I \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) - S(x, t), \quad (1.10)$$

onde x é a distância ao longo da linha de centro da viga na sua configuração de equilíbrio e t indica a variável de tempo. A função φ denota o deslocamento vertical da linha de centro da viga e a função ψ a rotação das fibras verticais na viga. Usaram ρ para a densidade do material de massa, M para o momento fletor, S para a força de cisalhamento, A para a área da seção transversal e I para o segundo momento da área da seção transversal.

As relações de tensão-deformação para o comportamento elástico da viga são dadas por

$$M(x, t) = EI \psi_x(x, t), \quad (1.11)$$

$$S(x, t) = kAG(\varphi_x + \psi)(x, t), \quad (1.12)$$

onde E denota o módulo de Young, G o módulo de rigidez e k o fator de cisalhamento. Considerando o acoplamento das equações (1.9)–(1.10) e (1.11)–(1.12), Timoshenko estabeleceu as seguintes equações diferenciais parciais para vibrações mecânicas no plano de feixes sem a presença de qualquer mecanismo dissipativo

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.13)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.14)$$

onde estamos assumindo que $\rho_1 = \rho A$, $\kappa = kGA$, $\rho_2 = \rho I$ e $b = EI$. A estabilidade de sistemas do tipo Timoshenko (em domínios limitados) tem recebido muita atenção nos últimos anos, e um grande número de resultados relativos à decadência uniforme e assintótica de energia foi estabelecido.

O objetivo dos autores é de usar a quantidade mínima de mecanismos dissipativos para obter a estabilidade exponencial para um sistema de Timoshenko. O modelo que eles consideraram foi

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \varphi_t = 0, \quad (1.15)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.16)$$

onde o amortecimento é eficaz apenas no deslocamento φ . Mostraram que os sistemas de Timoshenko (1.15)–(1.16) são exponencialmente estáveis se, e somente se, as velocidades das ondas forem iguais. Quando, em geral, as velocidades das ondas não são as mesmas, provaram que os sistemas de Timoshenko são polinomialmente estável com taxa de decaimento ideal. É importante notar que em toda a literatura, a taxa ótima de decaimento polinomial para os sistemas Timoshenko não foram considerados.

Objetivos

O rumo do presente texto é direcionado para propriedades assintóticas de vigas de Timoshenko, em que se espera analisar a solução de cada sistema dissipativo, ou seja, verificar se a dissipação induzida é forte o suficiente para estabilizar o sistema por meio de alguns mecanismos de dissipação e de qual tipo a taxa

de decaimento pode ser obtida. Nesse sentido, desejamos obter o controle do comportamento assintótico de soluções do sistema e, para isso, devemos estudar e julgar se é um controle de ordem exponencial ou de ordem polinomial.

Organização do Trabalho

No capítulo 2, teremos resultados principais como elementos da Teoria de Semigrupos e a exibição do funcional de energia do sistema que servirão de base para o desenvolvimento dos demais capítulos.

Usando um termo dissipativo em cada equação, obtemos tranquilamente a estabilidade exponencial, mas o que acontece se usarmos apenas um termo dissipativo? Buscamos responder a essa pergunta no capítulo 3, onde estudamos a particularidade do sistema (1.1)–(1.2) para o caso em que $\alpha > 0$ e $\beta = 0$. Assim, tratamos de alguns resultados preliminares e lançamos mão dos lemas técnicos para provar a estabilidade exponencial do mesmo sistema quando se tem a igualdade das velocidades de propagação de onda. Caso contrário, não conseguimos obter a tão desejada estabilidade exponencial. Agora, se considerarmos a diferença das velocidades podemos garantir um decaimento polinomial para o sistema e ainda obter o que chamamos de taxa ótima.

Seguindo para o capítulo 4, obtemos o caso em que $\alpha = 0$ e $\beta > 0$, isto é, onde a dissipação encontra-se apenas na equação de deslocamento. Para desenvolver a análise do mesmo, nos baseamos no texto de Almeida Júnior, Santos & Muñoz Rivera [1], porém usamos a Teoria de Semigrupos ao invés do Método de Energia.

MODELOS DISSIPATIVOS DE VIGAS DE TIMOSHENKO

2.1 Resultados Preliminares

Para desenvolver a teoria, vamos necessitar dos seguintes teoremas notáveis.

Teorema 2.1

Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -Semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert H . Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \quad (2.1)$$

e

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty \quad (2.2)$$

onde $\rho(A)$ é o conjunto resolvente do operador A .

Teorema 2.2

Seja $S(t)$ um C_0 -Semigrupo no espaço de Hilbert H com operador A tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então,

$$\frac{1}{|\lambda|^\alpha} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (2.3)$$

Consideraremos a existência, unicidade e regularidade de soluções para o sistema

$$-\rho_1 \varphi_{tt} + \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \alpha \varphi_t = f; \quad (2.4)$$

$$-\rho_2 \psi_{tt} + b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x + \psi) - \beta \psi_t = g; \quad (2.5)$$

com f e g funções dadas e as constantes positivas ρ_1 , ρ_2 , κ , α , β e b .

A existência e unicidade de solução fraca é garantida pelo lema de Lax-Milgram.

Teorema 2.3

Dado $(f, g) \in L(0, L) \times L(0, L)$, o sistema (2.4)–(2.5) possui uma única solução fraca.

2.2 Introdução do problema geral

Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R} e $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Trabalharemos com o seguinte modelo dissipativo de uma placa fina unidimensional de Timoshenko

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha \varphi_t = 0; \quad (2.6)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta \psi_t = 0; \quad (2.7)$$

definido para cada par $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$.

Aqui levaremos em consideração que as seguintes funções representam:

- $\varphi = \varphi(x, t)$: o deslocamento transversal da superfície média da placa;
- $\psi = \psi(x, t)$: o ângulo de rotação de um filamento da placa.

Outras considerações a respeito das constantes já introduzidas: ρ é a densidade do material, além de $\rho_1 = \rho A$ e $\rho_2 = \rho I$, em que A é a área de seção transversal e I é o momento de inércia na seção; κ simboliza o fator de correção do cortante $\varphi_x - \psi$; $b = b(x)$ indica o módulo de rigidez à flexão; e por fim, α e β denotam as constantes positivas de dissipação.

Adicionamos ao sistema (2.6)-(2.7) as condições de contorno Dirichlet-Neumann

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0; \quad \forall t > 0. \quad (2.8)$$

e também as condições iniciais seguintes

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x); \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x); \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x); \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad \forall x \in (0, L). \quad (2.9)$$

para deixar o problema mencionado acima mais completo.

2.3 Cenário de Semigrupos

Analisaremos, nesta seção, a existência e unicidade de soluções fortes para o sistema de equações de Timoshenko via Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares. Queremos escrever o sistema (2.6)-(2.9) na forma do problema de Cauchy

$$\begin{cases} A\mathbf{U} = \mathbf{U}_t \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \end{cases}. \quad (2.10)$$

Inicialmente, consideremos a (possível) solução do sistema por $\mathbf{U} := (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T$ e o dado inicial do problema $\mathbf{U}_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T$. Para obter a matriz do operador diferencial A (ou seja, que satisfaz $A\mathbf{U} = \mathbf{U}_t$) basta usar as equações

$$\varphi_{tt} = \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\alpha}{\rho_1} \varphi_t \quad \text{e} \quad \psi_{tt} = \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2} \psi_t, \quad (2.11)$$

da seguinte forma

$$\mathbf{U}_t = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\alpha}{\rho_1} \varphi_t \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2} \psi_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & -\frac{\alpha}{\rho_1} I_d & \frac{\kappa}{\rho_1}(\cdot)_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}(\cdot)_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}(\cdot)_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2} I_d & -\frac{\beta}{\rho_2} I_d \end{pmatrix}}_{:= A} \cdot \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix},$$

onde I_d representa a transformação identidade, já os símbolos $(\cdot)_x$ e $(\cdot)_{xx}$ são os operadores derivadas parciais em x de primeira ordem e de segunda ordem, respectivamente.

Daqui em diante, iremos assumir as seguintes notações: $\mathbf{u} = \varphi_t$, $\mathbf{v} = \psi_t$,

$$L_*^2(0, L) := \left\{ f \in L^2(0, L); \int_0^L f(x) dx = 0 \right\} \text{ e } H_*^1(0, L) := H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L).$$

Sob estas condições, adotaremos o espaço de Hilbert \mathbf{H} por

$$\mathbf{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

para comportar os elementos

$$\mathbf{U} := (\varphi, \mathbf{u}, \psi, \mathbf{v})^T \text{ e } \mathbf{V} := (\varphi', \mathbf{u}', \psi', \mathbf{v}')^T$$

no qual se define o produto interno

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle &:= \left\langle (\varphi, \mathbf{u}, \psi, \mathbf{v})^T, (\varphi', \mathbf{u}', \psi', \mathbf{v}')^T \right\rangle \\ &= \rho_1 \int_0^L \mathbf{u} \overline{\mathbf{u}'} dx + \rho_2 \int_0^L \mathbf{v} \overline{\mathbf{v}'} dx + \mathbf{b} \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x'} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{(\varphi_x' + \psi')} dx \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, induz a seguinte norma

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{H}}^2 = \|(\varphi, \mathbf{u}, \psi, \mathbf{v})^T\|_{\mathbf{H}}^2 = \rho_1 \int_0^L |\mathbf{u}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\mathbf{v}|^2 dx + \mathbf{b} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L |(\varphi_x + \psi)|^2 dx$$

O domínio do operador A é indicado por

$$D(A) := H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_*^1(0, L).$$

no qual é denso em \mathbf{H} . Além disso, a configuração do operador A indica ser um operador dissipativo. De fato, acompanhe o desenvolvimento. Desde que $\mathbf{U} \in D(A)$, podemos calcular o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle &= \rho_1 \int_0^L \left[\frac{\kappa}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x - \frac{\alpha}{\rho_1} \mathbf{u} \right] \overline{\mathbf{u}} dx + \rho_2 \int_0^L \left[\frac{\mathbf{b}}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2} \mathbf{v} \right] \overline{\mathbf{v}} dx \\ &\quad + \mathbf{b} \int_0^L \mathbf{v}_x \overline{\psi_x} dx + \kappa \int_0^L (\mathbf{u}_x + \mathbf{v}) \cdot \overline{(\varphi_x + \psi)} dx \\ &= \kappa \left[\int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \overline{\mathbf{u}} dx + \int_0^L \mathbf{u}_x \overline{(\varphi_x + \psi)} dx \right] + \mathbf{b} \left[\int_0^L \psi_{xx} \overline{\mathbf{v}} dx + \int_0^L \mathbf{v}_x \overline{\psi_x} dx \right] \\ &\quad + \kappa \left[\int_0^L \mathbf{v} \overline{(\varphi_x + \psi)} dx - \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{\mathbf{v}} dx \right] - \alpha \int_0^L |\mathbf{u}|^2 dx - \beta \int_0^L |\mathbf{v}|^2 dx. \end{aligned}$$

Analisemos as parcelas por partes. Inicialmente, note que a terceira parcela pode ser escrita como

$$\kappa \left[\int_0^L \mathbf{v} \overline{(\varphi_x + \psi)} dx - \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{\mathbf{v}} dx \right] = 2\kappa \operatorname{Im} \left(\int_0^L \mathbf{v} (\varphi_x + \psi)_x dx \right).$$

Agora, observando a segunda parcela, chegamos a seguinte igualdade

$$\int_0^L \psi_{xx} \overline{\mathbf{v}} dx + \int_0^L \mathbf{v}_x \overline{\psi_x} dx = \mathbf{v} \cdot \psi_x \Big|_0^L$$

e assim, basta usar a condição de contorno de Neumann (2.8) para obter

$$b \left[\int_0^L \psi_{xx} \bar{v} \, dx + \int_0^L v_x \overline{\psi_x} \, dx \right] = 0.$$

Já na primeira parcela, podemos reescrever da seguinte forma

$$\begin{aligned} \kappa \left[\int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \bar{u} \, dx + \int_0^L u_x \overline{(\varphi_x + \psi)} \, dx \right] &= \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \bar{u} \, dx + \underbrace{\kappa u \overline{(\varphi_x + \psi)} \Big|_0^L}_0 - \kappa \int_0^L u \overline{(\varphi_x + \psi)_x} \\ &= 2\kappa \operatorname{Im} \left(\int_0^L u (\varphi_x + \psi)_x \, dx \right). \end{aligned}$$

Portanto, o operador A é dissipativo porque satisfaz

$$\operatorname{Re} \langle AU, U \rangle = -\alpha \int_0^L |u|^2 \, dx - \beta \int_0^L |v|^2 \, dx \leq 0, \quad \text{onde } \alpha, \beta \geq 0. \quad (2.12)$$

Definimos a equação resolvente do operador A como $(\lambda I - A)U = F$. Ou ainda, como

$$\lambda \varphi - u = f^1; \quad (2.13)$$

$$\lambda \rho_1 u - \kappa (\varphi_x + \psi)_x + \alpha u = \rho_1 f^2; \quad (2.14)$$

$$\lambda \psi - v = f^3; \quad (2.15)$$

$$\lambda \rho_2 v - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \beta v = \rho_2 f^4. \quad (2.16)$$

Lema 2.1

O conjunto resolvente do operador A contém o zero.

Demonstração. Mostraremos que dado qualquer vetor $F = (f^1, f^2, f^3, f^4) \in H$, existe um vetor solução $U \in D(A)$ tal que satisfaça $0 \cdot I_d U - AU = F$, ou seja,

$$\begin{aligned} -u &= f^1 \in H_0^1(0, L); \\ -\kappa (\varphi_x + \psi)_x + \alpha u &= \rho_1 f^2 \in L^2(0, L); \\ -v &= f^3 \in H_*^1(0, L); \\ -b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \beta v &= \rho_2 f^4 \in L^2(0, L). \end{aligned}$$

No qual é equivalentemente a

$$\begin{aligned} u &= -f^1 \in H_0^1(0, L); \\ -\kappa (\varphi_x + \psi)_x &= \rho_1 f^2 - \alpha u \in L^2(0, L); \\ v &= -f^3 \in H_*^1(0, L); \\ -b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) &= \rho_2 f^4 - \beta v \in L^2(0, L). \end{aligned}$$

Fazendo uso das notações adquiridas acima juntamente com as condições de contorno (2.8), notamos que de fato $U = (\varphi, u, \psi, v)^T$ satisfaz

$$\begin{cases} \varphi, \varphi_x, \varphi_{xx} \in L^2(0, L) \\ \varphi(0, t) = 0 \text{ e } \varphi(L, t) = 0 \\ \psi, \psi_x, \psi_{xx} \in L^2(0, L) \\ \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \\ u \in H_0^1(0, L) \\ \psi \in H_*^1(0, L) \cap H^2(0, L) \\ v \in H_*^1(0, L) \end{cases} \implies U \in D(A).$$

Segue do Teorema 2.1 que o sistema gerado por $-AU = F$ possui solução com regularidade

$$(\varphi, \psi) \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L).$$

E finalmente, obtemos $U \in D(A)$ e $\|U\|_H \leq N\|F\|_H$, para $N \in \mathbb{R}$. ■

2.3.1 Funcional de Energia do Sistema

O objetivo de tal seção é determinar o funcional de energia associado ao sistema (2.6)–(2.9) que irá nos fazer entender a necessidade de utilizar o espaço de Hilbert H previamente mencionado. Começemos por definir o funcional de energia do tal sistema como

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \right), \quad \forall t > 0. \quad (2.17)$$

O resultado seguinte nos confirma que o funcional do sistema é não-crescente. Em outras palavras, a energia é dissipativa.

Teorema 2.4

Seja (φ, u, ψ, v) a solução do sistema (2.6)–(2.9). Então, a derivada da energia do sistema em relação ao tempo t é dada por

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \beta \int_0^L |\psi_t|^2 dx \leq 0. \quad (2.18)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2.6) por $\overline{\varphi_t} \in L^2(0, L)$ e integrando em $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \overline{\varphi_t} dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \overline{\varphi_t} dx + \alpha \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0 \\ & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \underbrace{\kappa (\varphi_x + \psi) \overline{\varphi_t}}_{:= 0} \Big|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{(\varphi_t)_x} dx + \alpha \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0 \\ & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{(\varphi_t)_x} dx + \alpha \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Multiplicando a equação (2.7) por ψ_t e integrando em $(0, L)$, vem que

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \beta \int_0^L |\psi_t|^2 dx = 0 \\ & \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t|^2 dx - \underbrace{b \psi_x \psi_t}_b \Big|_0^L + b \int_0^L \psi_x \psi_{tx} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \beta \int_0^L |\psi_t|^2 dx = 0 \\ & \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \beta \int_0^L |\psi_t|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Somando-se as equações (2.19) e (2.20), temos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \alpha \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t^2 dx + \\ & \quad + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx + \beta \int_0^L \psi_t^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Retornando à equação (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \\ + \alpha \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \beta \int_0^L |\psi_x|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

De (2.17) resulta que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \beta \int_0^L |\psi_t|^2 dx \leq 0,$$

em que α e β constantes reais positivas. Concluimos assim que

$$E(t) \leq E(0), \quad \text{para } t > 0.$$

■

Observação 1. Se tivermos $\alpha = \beta = 0$, obtemos diretamente a conservação da energia, ou seja,

$$E(t) = E(0), \quad \text{para todo } t > 0.$$

DISSIPACÃO NA EQUAÇÃO DE ROTAÇÃO: $\alpha = 0$ E $\beta > 0$

Neste capítulo, estudaremos o modelo de placa unidimensional do feixe de Timoshenko. Devido à dissipação da equação do ângulo de rotação, consideramos as constantes de dissipação $\alpha = 0$ e $\beta > 0$ no sistema (2.6)–(2.7). Portanto, vamos examinar o comportamento assintótico de sua solução geral. Para este fim, podemos reescrever o mesmo sistema de equações da seguinte forma

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0; \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0, \quad (3.2)$$

definida em $\Omega \times \mathbb{R}^+$, onde Ω é um domínio limitado em \mathbb{R} .

Vale ressaltar que as condições de contorno dadas são do tipo Dirichlet-Neumann (2.8) e as condições iniciais são indicadas por (2.9).

A ordem das seções deste capítulo será abordada da seguinte maneira:

- a) **Seção 3.1 (*Falta de Estabilidade Exponencial*)**: é motivada pelo fato das velocidades de propagação da onda associadas ao sistema (3.1)–(3.2) serem diferentes, isto é,

$$\frac{\rho_1}{\kappa} \neq \frac{\rho_2}{b}.$$

- b) **Seção 3.2 (*Estabilidade Exponencial*)**: quando as velocidades de propagação da onda associadas ao sistema (3.1)–(3.2) são iguais, ou seja,

$$\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}.$$

- c) **Seção 3.3 (*Decaimento Polinomial*)**: corrige a falta de estabilidade apresentada no item (a), além de apresentar uma taxa de decaimento ótima.

3.1 Falta de Estabilidade Exponencial

Consideremos dado o vetor $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4)^T$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sob esta premissa, desejamos que exista uma sequência de vetores $U_n = (\varphi_n, u_n, \psi_n, v_n)^T$ tal que esteja bem definida a equação resolvente

$(i\lambda_n I_d - A)U_n = F_n$ como

$$\begin{pmatrix} i\lambda_n I_d & -I_d & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & i\lambda_n I_d & -\frac{\kappa}{\rho_1}(\cdot)_x & 0 \\ 0 & 0 & i\lambda_n I_d & -I_d \\ \frac{\kappa}{\rho_2}(\cdot)_x & 0 & -\frac{b}{\rho_2}(\cdot)_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2} I_d & i\lambda_n I_d + \frac{\beta}{\rho_2} I_d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_n \\ u_n \\ \psi_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^1 \\ f_n^2 \\ f_n^3 \\ f_n^4 \end{pmatrix},$$

ou escrever em termos dos seus coeficientes, isto é,

$$i\lambda_n \varphi_n - u_n = f_n^1; \quad (3.3)$$

$$i\lambda_n \rho_1 u_n - \kappa((\varphi_n)_x + \psi_n)_x = \rho_1 f_n^2; \quad (3.4)$$

$$i\lambda_n \psi_n - v_n = f_n^3; \quad (3.5)$$

$$i\lambda_n \rho_2 v_n - b(\psi_n)_{xx} + \kappa((\varphi_n)_x + \psi_n) + \beta v_n = \rho_2 f_n^4. \quad (3.6)$$

A seguir apresentamos o resultado principal desta seção.

Teorema 3.1

Suponha que

$$\frac{\rho_1}{\kappa} \neq \frac{\rho_2}{b}.$$

Então o semigrupo associado ao sistema (3.1)–(3.2) não é exponencialmente estável.

Demonstração. Primeiramente, vamos admitir que $f_n^1 = f_n^3 = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Das igualdades (3.3) e (3.5), obtemos

$$i\lambda_n \varphi_n = u_n \quad \text{e} \quad i\lambda_n \psi_n = v_n.$$

Substituindo-os nas equações (3.4) e (3.6), simplificaremos para

$$-\lambda_n^2 \rho_1 \varphi_n - \kappa((\varphi_n)_x + \psi_n)_x = \rho_1 f_n^2; \quad (3.7)$$

$$-\lambda_n^2 \rho_2 \psi_n - b(\psi_n)_{xx} + \kappa((\varphi_n)_x + \psi_n) + i\lambda_n \beta \psi_n = \rho_2 f_n^4. \quad (3.8)$$

Levando em conta as condições de contorno (2.8), conseguimos exibir as funções

$$\varphi_n = A \operatorname{sen}(\delta \lambda_n x) \quad \text{e} \quad \psi_n = B \operatorname{cos}(\delta \lambda_n x), \quad \text{onde} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{\delta L} \quad \text{e} \quad \delta = \sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa}}.$$

Agora, substituindo-os nas equações (3.7) e (3.8), vem que

$$-\lambda_n^2 \rho_1 A \operatorname{sen}(\delta \lambda_n x) + \kappa \delta^2 \lambda_n^2 A \operatorname{sen}(\delta \lambda_n x) + \kappa \delta \lambda_n B \operatorname{sen}(\delta \lambda_n x) = \rho_1 f_n^2;$$

$$\begin{aligned} -\lambda_n^2 \rho_2 B \operatorname{cos}(\delta \lambda_n x) + b \delta^2 \lambda_n^2 B \operatorname{cos}(\delta \lambda_n x) + \kappa \delta \lambda_n A \operatorname{cos}(\delta \lambda_n x) + \\ + \kappa B \operatorname{cos}(\delta \lambda_n x) + i\lambda_n \beta B \operatorname{cos}(\delta \lambda_n x) = \rho_2 f_n^4. \end{aligned}$$

Seguindo as contas, basta evidenciar nas variáveis A e B , isto é,

$$(-\lambda_n^2 \rho_1 + \kappa \delta^2 \lambda_n^2) A \operatorname{sen}(\delta \lambda_n x) + \kappa \delta \lambda_n B \operatorname{sen}(\delta \lambda_n x) = \rho_1 f_n^2;$$

$$\kappa \delta \lambda_n A \operatorname{cos}(\delta \lambda_n x) + (-\lambda_n^2 \rho_2 + b \delta^2 \lambda_n^2 + \kappa + i\lambda_n \beta) B \operatorname{cos}(\delta \lambda_n x) = \rho_2 f_n^4.$$

Escolhendo para cada $n \in \mathbb{N}$ as funções $f_n^2 = \frac{1}{\rho_1} \cdot \text{sen}(\delta\lambda_n x)$ e $f_n^4 = 0$, obtemos

$$(-\lambda_n^2 \rho_1 + \kappa \delta^2 \lambda_n^2) A + \kappa \delta \lambda_n B = 1;$$

$$\kappa \delta \lambda_n A + (-\lambda_n^2 \rho_2 + b \delta^2 \lambda_n^2 + \kappa + i \lambda_n \beta) B = 0.$$

Substituindo o valor de $\delta = \sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa}}$, vem que

$$\begin{cases} \kappa \sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa}} \lambda_n B = 1; \\ \kappa \sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa}} \lambda_n A + \left(-\lambda_n^2 \rho_2 + b \frac{\rho_1}{\kappa} \lambda_n^2 + \kappa + i \lambda_n \beta\right) B = 0. \end{cases}$$

A solução do sistema é

$$B = \frac{1}{\kappa \lambda_n \sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa}}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

e

$$A = \frac{\kappa \left[\lambda_n^2 b \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) - \kappa - i \lambda_n \beta \right]}{\kappa^2 \lambda_n^2 \rho_1} \rightarrow \frac{b}{\kappa \rho_1} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Agora, observe que de

$$u_n = i \lambda_n \varphi_n = i \lambda_n A \text{sen}(\delta \lambda_n x),$$

temos por consequência a seguinte minoração

$$\begin{aligned} \|u_n\|_H &\geq \int_0^L |u_n|^2 dx \\ &= \int_0^L [i \lambda_n A \text{sen}(\delta \lambda_n x)]^2 dx \\ &= |\lambda_n A|^2 \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0$, segue que $\|u_n\|^2 \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Portanto, segue do Teorema 2.1, que então o semigrupo associado ao sistema (3.1)–(3.2) não é exponencialmente estável. ■

3.2 Estabilidade Exponencial

Para esta seção, vamos adotar o vetor $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sob esta premissa, podemos reescrever a equação resolvente $(i\lambda I_d - A)U = F$ como

$$i\lambda \varphi - u = f^1; \tag{3.9}$$

$$i\lambda \rho_1 u - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f^2; \tag{3.10}$$

$$i\lambda \psi - v = f^3; \tag{3.11}$$

$$i\lambda \rho_2 v - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \beta v = \rho_2 f^4. \tag{3.12}$$

Agora, o Teorema seguinte nos mostrará que o resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário.

Lema 3.1

Com as notações (2.13)-(2.16), obtemos

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A). \quad (3.13)$$

Demonstração. Desde que A tem um resolvente compacto, este espectro é discreto. Assim, para provar $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ é suficiente mostrar que A não tem autovalores puramente imaginários.

Imediatamente, notamos que zero não é um autovalor de A . Então, sejam λ um valor real não nulo e $\mathbf{U} = (\varphi, \mathbf{u}, \psi, \nu)^T \in D(A)$, com $\|\mathbf{U}\|_H = 1$, tal que $i\lambda\mathbf{U} - A\mathbf{U} = 0$. Provaremos que

$$\mathbf{U} = (0, 0, 0, 0)^T.$$

Para isso, tomaremos o produto interno em H da equação resolvente com o vetor \mathbf{U} e obtemos

$$\langle i\lambda\mathbf{U} - A\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_H = \langle F, \mathbf{U} \rangle_H \implies i\lambda\|\mathbf{U}\|_H^2 - \langle A\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_H = \langle F, \mathbf{U} \rangle_H.$$

Agora, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para $\langle F, \mathbf{U} \rangle_H$ e sabendo que

$$i\lambda\|\mathbf{U}\|_H^2 - \langle A\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_H = \beta \int_0^L |\nu|^2 dx,$$

chegamos facilmente a tão útil desigualdade seguinte

$$\beta \int_0^L |\nu|^2 dx \leq \|\mathbf{U}\|_H \|F\|_H. \quad (3.14)$$

Sabendo que $F = 0$, resulta que $\nu = 0$. E conseqüentemente, da equação (3.5) temos também $\psi = 0$. Por outro lado, levando em conta que $f^4 = 0$, segue da igualdade (3.6) que $\varphi_x = 0$ e assim, usando a Desigualdade de Poincaré resulta que $\varphi = 0$. Além disso, da identidade (3.3) com $f^1 = 0$ obtemos $\mathbf{u} = 0$.

Portanto, $\mathbf{U} = 0$. Isso justifica a não existência de autovalores puramente imaginários sobre o conjunto do espectro. Como bem queríamos. ■

Observação 2. Em particular, isto implica que o semigrupo é fortemente estável, isto é,

$$S(t)\mathbf{U}_0 \longrightarrow 0,$$

onde $S(t) := e^{At}$ é o C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert H e \mathbf{U}_0 é o dado inicial.

Lema 3.2

Sob as condições das equações (2.13)-(2.16), obtemos

$$\mathbf{b} \int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq \frac{\kappa}{|\lambda|^2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{C}{|\lambda|} \|\mathbf{U}\|_H \|F\|_H + C \|\mathbf{U}\|_H \|F\|_H, \text{ para } C \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2.16) por $\bar{\psi} \in H_0^1(0, L)$ e integrando em $(0, L)$

$$i\lambda \rho_2 \int_0^L \nu \bar{\psi} dx - \mathbf{b} \int_0^L \psi_{xx} \bar{\psi} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + \beta \int_0^L \nu \bar{\psi} dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\psi} dx.$$

Da equação (2.15), temos

$$i\lambda\psi - v = f^3 \implies -i\lambda\bar{\psi} = \bar{v} + \bar{f}^3 \implies i\lambda\bar{\psi} = -\bar{v} - \bar{f}^3;$$

Substituindo na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L |v|^2 dx - \rho_2 \int_0^L v \bar{f}^3 dx - b \psi_x \bar{\psi}|_0^L + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + \\ + \beta \int_0^L v \bar{\psi} dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\psi} dx. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} b \int_0^L |\psi_x|^2 dx = \rho_2 \int_0^L |v|^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + \beta \int_0^L v \bar{\psi} dx \\ + \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\psi} dx + \rho_2 \int_0^L v \bar{f}^3 dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Primeiro, façamos uma estimativa para o termo $\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx$:

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx &= -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \frac{i}{\lambda} (-\bar{v} - \bar{f}^2) dx \\ &= \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \frac{i}{\lambda} \bar{v} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \frac{i}{\lambda} \bar{f}^3 dx \\ &\leq \frac{\kappa}{|\lambda|} \int_0^L |\varphi_x + \psi| |\bar{v}| dx + \frac{\kappa}{|\lambda|} \int_0^L |\varphi_x + \psi| |\bar{f}^3| dx \\ &\leq \frac{\kappa}{4} \int_0^L |v|^2 dx + \frac{\kappa}{|\lambda|^2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\kappa}{|\lambda|} \int_0^L |\varphi_x + \psi| |f^3| dx. \end{aligned}$$

onde $b = |v|$, $n = \frac{1}{|\lambda|} |\varphi_x + \psi|$ e $\varepsilon = 1$.

Agora, uma estimativa do termo $\beta \int_0^L v \bar{\psi} dx$:

$$\begin{aligned} \beta \int_0^L v \bar{\psi} dx &= \frac{\beta i}{\lambda} \int_0^L v (\bar{v} + \bar{f}^3) dx \\ &\leq \frac{\beta}{|\lambda|} \int_0^L |v|^2 dx + \frac{\beta}{|\lambda|} \int_0^L |v| |f^3| dx. \end{aligned}$$

Substituindo-o na equação (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} b \int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq \left(\rho_2 + \frac{\kappa}{4} + \frac{\beta}{|\lambda|} \right) \int_0^L |v|^2 dx + \frac{\kappa}{|\lambda|^2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\kappa}{|\lambda|} \int_0^L |\varphi_x + \psi| |f^3| dx \\ + \frac{\beta}{|\lambda|} \int_0^L |v| |f^3| dx + \rho_2 \int_0^L |f^4| |\psi| dx + \rho_2 \int_0^L |v| |f^3| dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, para alguma constante $C \in \mathbb{R}$, obtemos como resultado

$$b \int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq \frac{\kappa}{|\lambda|^2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{C}{|\lambda|} \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathbb{H}} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathbb{H}}.$$

■

Lema 3.3

Existe uma constante positiva C tal que alguma solução forte do sistema (2.13)-(2.16) satisfaz

$$\rho_1 \int_0^L |u|^2 dx \leq \left(\kappa + \frac{\kappa}{|\lambda|^2} \right) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_H \|F\|_H + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_H \|F\|_H. \quad (3.17)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2.14) por $\bar{\varphi} \in H_0^1(0, L) \cap H^2$ e integrando em $(0, L)$

$$i\lambda \rho_1 \int_0^L u \bar{\varphi} dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \bar{\varphi} dx = \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{\varphi} dx.$$

Para a primeira parcela, usaremos $i\lambda \bar{\varphi} = -\bar{u} - \bar{f}^1$ que provém da identidade (2.13) e, para a segunda parcela, recorreremos da integração por partes, ou seja,

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^L |u|^2 dx - \rho_1 \int_0^L u \bar{f}^1 dx - \kappa (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi} \Big|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi}_x dx &= \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{\varphi} dx \\ -\rho_1 \int_0^L |u|^2 dx - \rho_1 \int_0^L u \bar{f}^1 dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx &= \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{\varphi} dx \end{aligned}$$

resumindo as contas acima,

$$\rho_1 \int_0^L |u|^2 dx = \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \underbrace{\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi} dx}_{:= I_1} - \rho_1 \int_0^L u \bar{f}^1 dx - \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{\varphi} dx. \quad (3.18)$$

Observe o cálculo de I_1 à direita da igualdade acima.

$$\begin{aligned} I_1 &:= -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi} dx \leq \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi| |\bar{\varphi}| dx \\ &\leq \frac{\kappa}{|\lambda|} \int_0^L |\varphi_x + \psi| |\bar{v}| dx + \frac{\kappa}{|\lambda|} \int_0^L |\varphi_x + \psi| |\bar{f}^3| dx \\ &\leq \frac{\kappa}{|\lambda|^2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\kappa}{4} \int_0^L |v|^2 dx \\ &\quad + \frac{\kappa}{|\lambda|} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 |\bar{f}^3| dx. \end{aligned}$$

Feito isso, substituímos a estimativa de I_1 na equação (3.18) acima para obter

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L |u|^2 dx &\leq \left(\kappa + \frac{\kappa}{|\lambda|^2} \right) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\kappa}{4} \int_0^L |v|^2 dx - \rho_1 \int_0^L u \bar{f}^1 dx - \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{\varphi} dx \\ &\quad + \frac{\kappa}{|\lambda|} \int_0^L |\varphi_x + \psi| |\bar{f}^3| dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Usando a desigualdade (3.14) podemos concluir

$$\rho_1 \int_0^L |u|^2 dx \leq \left(\kappa + \frac{\kappa}{|\lambda|^2} \right) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_H \|F\|_H + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_H \|F\|_H.$$

■

Lema 3.4

Existe uma constante positiva C tal que alguma solução forte do sistema (2.13)-(2.16) satisfaz

$$\frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq i\lambda b \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}}. \quad (3.20)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.12) por $\overline{(\varphi_x + \psi)}$ e integrando em $(0, L)$, tem-se

$$i\lambda \rho_2 \int_0^L v \overline{(\varphi_x + \psi)} dx - b \int_0^L \psi_{xx} \overline{(\varphi_x + \psi)} dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \beta \int_0^L v \overline{(\varphi_x + \psi)} dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(\varphi_x + \psi)} dx.$$

Usando a equação (2.15) para a primeira parcela da equação acima e, integrando-se por partes a segunda parcela, vem que

$$\begin{aligned} i\lambda \rho_2 \int_0^L v \overline{\varphi_x} dx - \underbrace{b \psi_x(\varphi_x + \psi)|_0^L}_{:=0} + \underbrace{b \int_0^L \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi)}_x dx}_{:=I_2} + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ = -\beta \int_0^L v \overline{(\varphi_x + \psi)} dx + \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(\varphi_x + \psi)} dx + \rho_2 \int_0^L |v|^2 dx + \rho_2 \int_0^L v \overline{f^3} dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da equação (3.10), multiplicando por $\overline{\psi_x}$ e integrando-se em $(0, L)$, temos

$$-i\lambda \rho_1 \int_0^L \bar{u} \psi_x dx - \kappa \int_0^L \overline{(\varphi_x + \psi)}_x \psi_x dx = \rho_1 \int_0^L \bar{f}_2 \psi_x dx.$$

Daí,

$$\int_0^L \overline{(\varphi_x + \psi)}_x \psi_x dx = -\frac{1}{\kappa} \left(i\lambda \rho_1 \int_0^L \bar{u} \psi_x dx + \rho_1 \int_0^L \bar{f}_2 \psi dx \right).$$

Substituindo-o na expressão I_2 , equação (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda \rho_2 \int_0^L v \overline{\varphi_x} dx - \frac{b}{\kappa} i\lambda \rho_1 \int_0^L \bar{u} \psi_x dx - \frac{b}{\kappa} \rho_1 \int_0^L \bar{f}_2 \psi dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ := I_3 \\ = \rho_2 \int_0^L |v|^2 dx - \beta \int_0^L v \overline{(\varphi_x + \psi)} dx + \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(\varphi_x + \psi)} dx + \rho_2 \int_0^L v \overline{f^3} dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Usando-se a equação (3.9) em I_3 , segue que

$$\begin{aligned} I_3 &= -\rho_2 \int_0^L v \bar{u}_x dx - \rho_2 \int_0^L v \bar{f}_x^1 dx \\ &= \underbrace{-\rho_2 v \bar{u}|_0^L}_{:=0} + \rho_2 \int_0^L v_x \bar{u} dx - \rho_2 \int_0^L v \bar{f}_x^1 dx. \end{aligned}$$

Da equação (3.11) obtemos $v_x = i\lambda \psi_x - f_x^3$. Assim, reescrevemos I_3 como

$$I_3 = i\lambda \rho_2 \int_0^L \psi_x \bar{u} dx - \rho_2 \int_0^L f_x^3 \bar{u} dx - \rho_2 \int_0^L v \bar{f}_x^1 dx.$$

Substituindo-se a expressão I_3 na equação (3.22), vem que

$$\begin{aligned} i\lambda\rho_2 \int_0^L \psi_x \bar{u} \, dx - \rho_2 \int_0^L f_x^3 \bar{u} \, dx - \rho_2 \int_0^L v \bar{f}_x^1 \, dx - \frac{b}{\kappa} i\lambda\rho_1 \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx \\ - \frac{b}{\kappa} \rho_1 \int_0^L \bar{f}^2 \psi \, dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx = \rho_2 \int_0^L |v|^2 \, dx - \beta \int_0^L v \overline{(\varphi_x + \psi)} \, dx + \\ + \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(\varphi_x + \psi)} \, dx + \rho_2 \int_0^L v \bar{f}^3 \, dx. \end{aligned}$$

Assim, para alguma constante positiva C , segue que

$$\frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \leq i\lambda b \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + \left(\rho_2 + \frac{\beta^2}{2\kappa} \right) \int_0^L |v|^2 \, dx + C \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}}.$$

Finalmente, da equação (3.14), resulta que

$$\frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx \leq i\lambda b \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + C \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}}.$$

■

Agora, temos condições de mostrar o resultado principal.

Teorema 3.2

O semigrupo associado ao sistema de Timoshenko (2.6)–(2.9), onde $\alpha = 0$ e $\beta > 0$, é exponencialmente estável se, e somente, se

$$\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$$

onde $\frac{\rho_1}{\kappa}$ e $\frac{\rho_2}{b}$ são as velocidades de propagação de ondas.

Demonstração. Somaremos todas as desigualdades dos lemas anteriores com o propósito de buscar uma limitação para a norma do vetor U , obteremos

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathbf{H}}^2 &= \rho_1 \int_0^L |u|^2 \, dx + \rho_2 \int_0^L |v|^2 \, dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \\ &\leq \left(\kappa + \frac{2\kappa}{|\lambda|^2} \right) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + i\lambda b \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}} + C \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}} \\ &\leq i\lambda b \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}} + C \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}}. \end{aligned}$$

Sendo assim, existe uma constante positiva M_1 tal que

$$\|U\|_{\mathbf{H}}^2 \leq i\lambda b \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + M_1 \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}}, \quad \text{para todo } t > 0. \quad (3.23)$$

Quando $\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$, segue que

$$\|U\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}} + C \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Para λ suficientemente grande, existe $M > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathbf{H}} \leq M \|F\|_{\mathbf{H}}. \quad (3.24)$$

Usando o resultado 2.1, segue a conclusão deste teorema. ■

3.3 Decaimento Polinomial

Nesta seção, provaremos que a solução do sistema (2.6)–(2.9) decai polinomialmente para zero como também vai para infinito quando a relação de igualdade entre as velocidades da onda não é satisfeita.

Teorema 3.3

Se $\frac{\rho_1}{\kappa} \neq \frac{\rho_2}{b}$, então o C_0 -Semigrupo associado com o sistema (2.6)–(2.9) satisfaz

$$\|S(t)\|_{\mathcal{U}_0} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \|u_0\|_{D(A)}.$$

Além disso, essa taxa de decaimento é ótima.

Demonstração. Das equações (3.9) e (3.11), temos

$$\bar{u}_x = -i\lambda \bar{\varphi}_x - \bar{f}_x^1 \quad \text{e} \quad i\lambda \psi = v + f^3.$$

Agora observe que,

$$\begin{aligned} i\lambda \int_0^L \bar{u}\psi_x \, dx &= i\lambda \left(u\psi|_0^L - \int_0^L \bar{u}_x \psi \, dx \right) \\ &= -i\lambda \int_0^L \bar{u}_x \psi \, dx \\ &= \int_0^L (i\lambda \bar{\varphi}_x + \bar{f}_x^1)(v + f^3) \, dx \\ &= i\lambda \int_0^L \bar{\varphi}_x (v + f^3) \, dx + \int_0^L \bar{f}_x^1 (v + f^3) \, dx, \end{aligned}$$

segue então da desigualdade de Young que

$$i\lambda \int_0^L \bar{u}\psi_x \, dx \leq C_\varepsilon |\lambda|^2 \int_0^L |v|^2 \, dx + \varepsilon \|u\|_{\mathbb{H}}^2 + C|\lambda| \|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} + C\|F\|_{\mathbb{H}}^2 + C\|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}}. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.25) em (3.23) e, assumindo $\frac{\rho_1}{\kappa} \neq \frac{\rho_2}{b}$, vem que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq i\lambda C \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) \int_0^L \bar{u}\psi_x \, dx + \frac{C}{|\lambda|} \|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} + C\|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) \cdot \left[C_\varepsilon |\lambda|^2 \int_0^L |v|^2 \, dx + \varepsilon \|u\|_{\mathbb{H}}^2 + C|\lambda| \|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} + C\|F\|_{\mathbb{H}}^2 + C\|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} \right] \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} + C\|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

donde obtemos,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{H}}^2 &\leq C_\varepsilon \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) |\lambda|^2 \|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} + C \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) \varepsilon \|u\|_{\mathbb{H}}^2 + C|\lambda| \|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + C\|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} + \frac{C}{|\lambda|^2} \|u\|_{\mathbb{H}} \|F\|_{\mathbb{H}} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) |\lambda|^2 \|F\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Tomando $|\lambda| > 1$ suficientemente grande, resulta

$$\|u\|_{\mathbb{H}}^2 \leq C|\lambda|^4 \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \implies \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \leq C|\lambda|^2.$$

Segue então do Teorema 2.1 devido a Borichev e Tomilov que

$$\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} = O(t^{-1/2}) \implies \|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \|F\|_{\mathbb{H}}.$$

Desde que $0 \in \rho(A)$, tem que A é sobrejetivo sobre H , daí tomando $A\mathbf{U}_0 = F$ concluímos que

$$\|S(t)\mathbf{U}_0\|_H \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \|\mathbf{U}_0\|_{D(A)},$$

o que completa a primeira afirmação do teorema. Agora, com o intuito de provar a taxa de decaimento que a taxa de decaimento $t^{-1/2}$ é ótima, procederemos por contradição supondo que esta taxa pode ser melhorada para $t^{-1/(2-\delta)}$ para algum $\delta > 0$. Assim, devemos ter

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\delta}} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C, \quad (3.26)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\delta}} \|\mathbf{U}\|_H \leq C\|F\|_H,$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande. Contudo, isto é contradição, pois levando em conta o Teorema 3.1, podemos construir sequências $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $(\mathbf{U}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ e $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$, tais que

$$\|\mathbf{U}_n\|_H^2 \geq |\lambda_n|^2 \|F_n\|_H^2,$$

de onde segue que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\delta}} \|(\lambda_n I - A)^{-1}\|_H \geq C|\lambda_n|^{\delta-1} \rightarrow \infty, \quad (\text{quando } n \rightarrow \infty).$$

Mas isto contradiz a inequação (3.26), dessa forma a taxa não pode ser melhorada. A prova do teorema agora está completa. ■

DISSIPACÃO NA EQUAÇÃO DE DESLOCAMENTO: $\alpha > 0$ E $\beta = 0$

Neste capítulo, levamos em conta que $\alpha > 0$ e $\beta = 0$ para reescrever o sistema de equações (2.6)-(2.9) da seguinte forma

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha \varphi_t = 0; \quad (4.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0. \quad (4.2)$$

Vale ressaltar que as condições de contorno dadas são do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0; \text{ para } t \in (0, \infty). \quad (4.3)$$

e as condições iniciais são indicadas por

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x); \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x); \psi(x, 0) = \psi_0(x); \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \text{ para } x \in (0, L). \quad (4.4)$$

Agora, podemos usar o sistema (4.1)-(4.4) para enquadrar no problema de Cauchy

$$\begin{cases} A\mathbf{U} &= \mathbf{U}_t, \text{ para } t > 0 \\ \mathbf{U}(0) &= \mathbf{U}_0 \end{cases}$$

onde $\mathbf{U}_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)$. Segue de

$$A\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\alpha}{\rho_1}\varphi_t \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix} = \mathbf{U}_t$$

que o operador diferencial A é definido como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & -\frac{\alpha}{\rho_1}(\cdot)_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \\ -\frac{\kappa}{\rho_2}(\cdot)_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}(\cdot)_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}I_d & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto, o domínio do operador é

$$D(A) := H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_*^1(0, L).$$

4.1 Falta de Estabilidade Exponencial

Para provar a falta de estabilidade exponencial iremos argumentar por contradição. Para isso, mostraremos que existe uma sequência de valores $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $\mathbf{U}_n = (\varphi_n, \mathbf{u}_n, \psi_n, v_n)^T \subset D(A)$ para $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4)^T \subset H$ tal que

$$(i\lambda_n I_d - A)\mathbf{U}_n = F_n,$$

onde F_n é limitado em H , mas $\|\mathbf{U}_n\|_H$ tende a infinito.

Reescrevendo esta equação em termos de seus componentes, obtemos

$$i\lambda_n \varphi_n - \mathbf{u}_n = f_n^1; \quad (4.5)$$

$$i\lambda_n \mathbf{u}_n - \frac{\kappa}{\rho_1} ((\varphi_x)_n + \psi_n)_x + \frac{\alpha}{\rho_1} \mathbf{u}_n = f_n^2; \quad (4.6)$$

$$i\lambda_n \psi_n - v_n = f_n^3; \quad (4.7)$$

$$i\lambda_n v_n - \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2} ((\varphi_x)_n + \psi_n) = f_n^4. \quad (4.8)$$

Teorema 4.1

Suponha que

$$\frac{\rho_1}{\kappa} \neq \frac{\rho_2}{b}.$$

Então o semigrupo associado ao sistema (4.1)–(4.4) não é exponencialmente estável.

Demonstração. Suponhamos que $f_n^1 = f_n^3 = 0$. Resulta das equações (4.5) e (4.7)

$$\mathbf{u}_n = i\lambda_n \varphi_n \quad \text{e} \quad v_n = i\lambda_n \psi_n.$$

Substituindo-os nas equações (4.6) e (4.8), teremos

$$-\rho_1 \lambda_n^2 \varphi_n - \kappa ((\varphi_x)_n + \psi_n)_x + i\alpha \lambda_n \varphi_n = \rho_1 f_n^2; \quad (4.9)$$

$$-\rho_2 \lambda_n^2 \psi_n - b (\psi_{xx})_n + \kappa ((\varphi_x)_n + \psi_n) = \rho_2 f_n^4. \quad (4.10)$$

Levando em conta as condições de contorno (4.3), tomamos

$$\varphi_n(x) = A \sin(\delta \lambda_n x) \quad \text{e} \quad \psi_n(x) = B \cos(\delta \lambda_n x), \quad \text{onde } \lambda_n = \frac{n\pi}{\delta L} \quad \text{e} \quad \delta = \sqrt{\frac{\rho_2}{b}}.$$

Substituindo-os nas equações (4.9) e (4.10), vem que

$$-\rho_1 \lambda_n^2 A \sin(\delta \lambda_n x) + \kappa \delta^2 \lambda_n^2 A \sin(\delta \lambda_n x) + \kappa \delta \lambda_n B \sin(\delta \lambda_n x) + i\alpha \lambda_n A \sin(\delta \lambda_n x) = \rho_1 f_n^2;$$

$$-\rho_2 \lambda_n^2 B \cos(\delta \lambda_n x) + b \delta^2 \lambda_n^2 B \cos(\delta \lambda_n x) + \kappa \delta \lambda_n A \cos(\delta \lambda_n x) = \rho_2 f_n^4,$$

ou seja,

$$(-\rho_1 \lambda_n^2 + \kappa \delta^2 \lambda_n^2 + i\lambda_n \alpha) A \sin(\delta \lambda_n x) + \kappa \delta \lambda_n B \sin(\delta \lambda_n x) = \rho_1 f_n^2;$$

$$\kappa \delta \lambda_n A \cos(\delta \lambda_n x) + (-\rho_2 \lambda_n^2 + b \delta^2 \lambda_n^2) B \cos(\delta \lambda_n x) = \rho_2 f_n^4.$$

Por outro lado, tomando-se $f_n^2 = 0$ e $f_n^4 = \frac{1}{\rho_2} \cos(\delta \lambda_n x)$, resulta que

$$\left(-\rho_1 \lambda_n^2 + \kappa \delta^2 \lambda_n^2 + i\lambda_n \alpha\right) A + \kappa \delta \lambda_n B = 0;$$

$$\kappa \delta \lambda_n A + (-\rho_2 \lambda_n^2 + b \delta^2 \lambda_n^2) B = 1.$$

Substituindo o valor de $\delta = \sqrt{\frac{\rho_2}{b}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(-\rho_1 \lambda_n^2 + \kappa \frac{\rho_2}{b} \lambda_n^2 + i \lambda_n \alpha\right) A + \kappa \sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \lambda_n B &= 0; \\ \kappa \sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \lambda_n A + \underbrace{\left(-\rho_2 \lambda_n^2 + b \frac{\rho_2}{b} \lambda_n^2\right)}_{=0} B &= 1. \end{aligned}$$

De onde segue a solução do sistema

$$A = \frac{1}{\kappa \lambda_n \sqrt{\frac{\rho_2}{b}}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

e

$$B = \frac{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b}\right) \kappa - \frac{i\alpha}{\lambda_n}}{\kappa^2 \frac{\rho_2}{b}} \rightarrow \frac{b}{\kappa \rho_2} \left(\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b}\right), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Desde que $\frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0$, temos que $B \neq 0$. Por consequência, tem-se

$$\begin{aligned} \|U_n\|_H^2 &\geq \int_0^L \rho_2 |v|^2 dx \\ &= \rho_2 \int_0^L |\lambda_n \psi_n|^2 dx \\ &= \rho_2 \int_0^L |i \lambda_n B \cos(\delta \lambda_n x)|^2 dx \\ &= \rho_2 |i \lambda_n B|^2 \int_0^L |\cos(\delta \lambda_n x)|^2 dx \\ &= \rho_2 \frac{L}{2} |i \lambda_n B|^2 \rightarrow +\infty, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Como

$$\|U_n\|_H \rightarrow \infty,$$

concluimos que o semigrupo em questão não é exponencialmente estável. ■

4.2 Estabilidade Exponencial

Nesta seção mostraremos que quando o sistema de vigas de Timoshenko está sobre a influência de um mecanismo dissipativo do tipo atrito atuando somente na equação de deslocamento, isto é, assumimos $\beta = 0$ e $\alpha > 0$ em (2.6)-(2.7), então o decaimento da energia é exponencial desde que a condição $\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$ seja satisfeita.

Para começar, seguindo o Teorema 2.1, vamos mostrar que o resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Para tal, considere o produto interno em H de $U = (\varphi, u, \psi, v)^T \in D(A)$ com a equação resolvente de A , isto é,

$$i\lambda \|U\|_H^2 - (AU, U)_H = (F, U)_H,$$

onde $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in H$. Então, tomando a parte real e usando a equação (4), com $\beta = 0$, resulta

$$\alpha \int_0^L |u|^2 dx \leq C \|U\|_H \|F\|_H. \quad (4.11)$$

Agora estamos em condições de provar o seguinte lema.

Lema 4.1

Com as notações (4.13)-(4.16), obtemos

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A). \quad (4.12)$$

Demonstração. Desde que A tem um resolvente compacto, este espectro é discreto. Assim, para provar $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ é suficiente mostrar que A não tem autovalores puramente imaginários.

Sabendo que zero não é um autovalor do operador A , suponhamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $i\lambda$ é um autovalor e seja $\mathbf{U} \in D(A)$ um autovetor unitário que satisfaça

$$(i\lambda I_d - A)\mathbf{U} = 0.$$

Ou equivalentemente,

$$i\lambda\varphi - \mathbf{u} = 0; \quad (4.13)$$

$$i\lambda\rho_1\mathbf{u} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\mathbf{u} = 0; \quad (4.14)$$

$$i\lambda\psi - \mathbf{v} = 0; \quad (4.15)$$

$$i\lambda\rho_2\mathbf{v} - \mathbf{b}\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0. \quad (4.16)$$

Tomando $F = 0$, obtemos imediatamente de (3.14) que $\mathbf{v} = 0$. Segue da equação (4.15) que $\psi = 0$. Por outro lado, levando em conta que $f^4 = 0$, segue da igualdade (4.16) que $\varphi_x = 0$ e assim, usando a Desigualdade de Poincaré resulta que $\varphi = 0$. Além disso, da identidade (4.13) com $f^1 = 0$ obtemos $\mathbf{u} = 0$.

Portanto, $\mathbf{U} = 0$. Isso justifica a não existência de autovalores puramente imaginários sobre o conjunto do espectro. Como bem queríamos. ■

Provaremos agora o item 2.2 do Teorema 2.1, para tal considere o sistema resolvente $i\lambda\mathbf{U} - A\mathbf{U} = F$ em H em termos de seus componentes

$$i\lambda\varphi - \mathbf{u} = f^1; \quad (4.17)$$

$$i\lambda\rho_1\mathbf{u} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\mathbf{u} = \rho_1 f^2; \quad (4.18)$$

$$i\lambda\psi - \mathbf{v} = f^3; \quad (4.19)$$

$$i\lambda\rho_2\mathbf{v} - \mathbf{b}\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f^4. \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{U} = (\varphi, \mathbf{u}, \psi, \mathbf{v})^T \in D(A)$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in H$. A prova envolve os seguintes lemas auxiliares.

Lema 4.2

Existem as constantes $c_1 > 0$ e $C > 0$, para o sistema (4.17)-(4.20), que satisfaz a relação

$$\kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq c_1 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + C \|\mathbf{U}\|_H \|\mathbf{V}\|_H + \frac{C}{|\lambda|} \|\mathbf{U}\|_H \|F\|_H. \quad (4.21)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.18) por $\bar{\varphi}$ e integrando em $(0, L)$

$$\underbrace{i\lambda\rho_1 \int_0^L \mathbf{u}\bar{\varphi} dx}_{=: I_1} - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \bar{\varphi} dx + \alpha \int_0^L \mathbf{u}\bar{\varphi} dx = \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{\varphi} dx.$$

Da equação (4.17) temos que $i\lambda\bar{\varphi} = -\bar{u} - \bar{f}^1$. Substituindo na expressão I_1 e integrando por partes a segunda parcela da equação acima, vem que

$$-\rho_1 \int_0^L u(\bar{u} + \bar{f}^1) dx - \kappa(\varphi_x + \psi)\bar{\varphi}|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\bar{\varphi}_x dx + \alpha \int_0^L u\bar{\varphi} dx = \rho_1 \int_0^L f^2\bar{\varphi} dx.$$

Observando que a segunda parcela é nula por considerarmos a condição de contorno (4.3) e substituindo na terceira parcela o seguinte ajuste $(\varphi_x + \psi)\bar{\varphi}_x = |\varphi_x + \psi|^2 - (\varphi_x + \psi)\bar{\psi}$ obteremos

$$-\rho_1 \int_0^L |u|^2 dx - \rho_1 \int_0^L u\bar{f}^1 dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\bar{\psi} dx + \alpha \int_0^L u\bar{\varphi} dx = \rho_1 \int_0^L f^2\bar{\varphi} dx.$$

Isolando o termo desejado, teremos

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx &= \rho_1 \int_0^L |u|^2 dx + \underbrace{\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\bar{\psi} dx}_{:= I_2} \\ &\quad - \underbrace{\alpha \int_0^L u\bar{\varphi} dx}_{:= I_3} + \rho_1 \int_0^L u\bar{f}^1 dx + \rho_1 \int_0^L \bar{\varphi}f^2 dx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Fazendo uma estimativa para a expressão I_2 , segue que

$$I_2 = \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\bar{\psi} dx \leq \frac{\kappa\varepsilon}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\kappa}{2\varepsilon} \int_0^L |\psi|^2 dx.$$

Escolhendo $\varepsilon = 1$ e usando a Desigualdade de Poincaré, resulta

$$I_2 = \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + c_1 \int_0^L |\psi_x|^2 dx,$$

onde $c_1 = \frac{\kappa c_p}{2}$ e c_p é a constante de Poincaré.

Façamos agora uma estimativa para $I_3 = -\alpha \int_0^L u\bar{\varphi} dx$. Da equação (4.17), temos que

$$-i\lambda\bar{\varphi} - \bar{u} = \bar{f}^1 \implies -i\bar{\varphi} = \frac{1}{\lambda}(\bar{u} + \bar{f}^1).$$

Portanto,

$$\bar{\varphi} \leq |\bar{\varphi}| \leq \frac{1}{|\lambda|}(|u| + |f^1|).$$

Logo,

$$I_3 \leq \left| \alpha \int_0^L u\bar{\varphi} dx \right| \leq \frac{\alpha}{|\lambda|} \int_0^L |u|^2 dx + \frac{\alpha}{|\lambda|} \int_0^L |u||f^1| dx.$$

Substituindo as estimativas de I_2 e I_3 na equação (4.22), obtemos

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq \rho_1 \int_0^L |u|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + c_1 \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{|\lambda|} \int_0^L |u|^2 dx + \frac{\alpha}{|\lambda|} \int_0^L |u||f^1| dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^L u\bar{f}^1 dx + \rho_1 \int_0^L \bar{\varphi}f^2 dx. \end{aligned}$$

De onde, utilizando (3.17), obtemos para algum número real positivo C como resultado

$$\frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq c_1 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{V}\|_{\mathbb{H}} dx + \frac{C}{|\lambda|} \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathbb{H}}.$$

Lema 4.3

Existem as constantes $c_2 > 0$ e $C > 0$, para o sistema (4.17)–(4.20), que satisfaz a relação

$$\rho_2 \int_0^L |v|^2 dx \leq c_2 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathbb{H}}. \quad (4.23)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.20) por $\bar{\psi}$ e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\underbrace{i\lambda \rho_2 \int_0^L v \bar{\psi} dx - b \int_0^L \psi_{xx} \bar{\psi} dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx}_{:= I_4} = \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\psi} dx.$$

Da equação (4.19), temos que $i\lambda \bar{\psi} = -\bar{v} - \bar{f}^3$. Então, usando-se em I_4 e, integrando por partes, resulta

$$-\rho_2 \int_0^L |v|^2 dx - \rho_2 \int_0^L v \bar{f}^3 dx - b \psi_x \bar{\psi} \Big|_0^L + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\psi} dx.$$

Usando-se as condições de contorno (4.3), segue que

$$\rho_2 \int_0^L |v|^2 dx = b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx - \rho_2 \int_0^L v \bar{f}^3 dx - \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\psi} dx.$$

Das desigualdades de Young e de Poincaré, obtemos

$$\rho_2 \int_0^L |v|^2 dx \leq b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\kappa c_p}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \rho_2 \int_0^L v \bar{f}^3 dx - \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\psi} dx.$$

Finalmente, obtemos o resultado desejado

$$\rho_2 \int_0^L |v|^2 dx \leq c_2 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathbb{H}},$$

onde $c_2 = \left(b + \frac{\kappa c_p}{2}\right)$ e c_p é a constante de Poincaré. ■

Lema 4.4

Existem as constantes χ e $C > 0$, para o sistema (4.17)–(4.20), que satisfaz a relação

$$\frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq i\lambda b \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa}\right) \int_0^L \bar{u} \psi_x dx + C \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathbb{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\mathbf{U}\|_{\mathbb{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathbb{H}}. \quad (4.24)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.20) por $\bar{\varphi}_x$ e integrando em $(0, L)$, vem que

$$i\lambda \rho_2 \int_0^L v \bar{\varphi}_x dx - b \int_0^L \psi_{xx} \bar{\varphi}_x dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi}_x dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\varphi}_x dx.$$

Integrando-se por partes, obtemos

$$i\lambda \rho_2 \int_0^L v \bar{\varphi}_x dx - b \psi_x \bar{\varphi}_x \Big|_0^L + \underbrace{b \int_0^L \psi_x \bar{\varphi}_{xx} dx}_{:= I_5} + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi}_x dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{\varphi}_x dx. \quad (4.25)$$

Da equação (4.18), temos que

$$-i\lambda\rho_1 \int_0^L u\overline{\psi_x} \, dx - \kappa \int_0^L \overline{(\varphi_x + \psi)_x} \psi_x \, dx + \alpha \int_0^L \overline{u} \psi_x \, dx = \rho_1 \int_0^L \overline{f^2} \psi_x \, dx.$$

De onde segue que

$$\kappa \int_0^L \overline{\varphi_{xx}} \psi_x \, dx = -i\lambda\rho_1 \int_0^L \overline{u} \psi_x \, dx - \kappa \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \alpha \int_0^L \overline{u} \psi_x \, dx - \rho_1 \int_0^L \overline{f^2} \psi_x \, dx. \quad (4.26)$$

Substituindo a expressão (4.26) em I_5 , equação (4.25), obtemos

$$\underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L v\overline{\varphi_x} \, dx}_{:= I_6} + \frac{b}{\kappa} \left(-i\lambda\rho_1 \int_0^L \overline{u} \psi_x \, dx - \kappa \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \alpha \int_0^L \overline{u} \psi_x \, dx - \rho_1 \int_0^L \overline{f^2} \psi_x \, dx \right) + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\varphi_x} \, dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{\varphi_x} \, dx. \quad (4.27)$$

Vamos determinar uma estimativa para a expressão $I_6 = i\lambda\rho_2 \int_0^L v\overline{\varphi_x} \, dx$. Integrando-se por partes, vem que

$$I_6 = i\lambda\rho_2 v\overline{\varphi}|_0^L - i\lambda\rho_2 \int_0^L v_x \overline{\varphi} \, dx.$$

Da equação (4.17), temos que $-i\lambda\overline{\varphi} = \overline{u} + \overline{f^1}$. Portanto,

$$I_6 = \rho_2 \int_0^L v_x (\overline{u} + \overline{f^1}) \, dx = \rho_2 \int_0^L v_x \overline{u} \, dx + \rho_2 \int_0^L v_x \overline{f^1} \, dx.$$

Tomando a equação (4.19), temos que $v_x = i\lambda\psi_x - f_x^3$. Então, substituindo-o em I_6 temos que

$$\begin{aligned} I_6 &= \rho_2 \int_0^L \overline{u} (i\lambda\psi_x - f_x^3) \, dx + \rho_2 \int_0^L v_x \overline{f^1} \, dx \\ &= i\lambda\rho_2 \int_0^L \overline{u} \psi_x \, dx - \rho_2 \int_0^L \overline{u} f_x^3 \, dx + \rho_2 \int_0^L v_x \overline{f^1} \, dx. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo I_6 dada por (4.28) em (4.27), resulta

$$\begin{aligned} i\lambda\rho_2 \int_0^L \overline{u} \psi_x \, dx - i\lambda \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L \overline{u} \varphi_x \, dx - b \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \frac{\alpha b}{\kappa} \int_0^L \overline{u} \psi_x \, dx - \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L \overline{f^2} \psi_x \, dx \\ + \kappa \underbrace{\int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\varphi_x} \, dx}_{:= I_7} = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{\varphi_x} \, dx + \rho_2 \int_0^L \overline{u} f_x^3 \, dx - \rho_2 \int_0^L v_x \overline{f^3} \, dx. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Multiplicando a equação (4.18) por $\overline{\varphi}$ e integrando em $(0, L)$, temos

$$i\lambda\rho_1 \int_0^L u\overline{\varphi} \, dx - \kappa(\varphi_x + \psi)\overline{\varphi}|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\varphi_x} \, dx + \alpha \int_0^L u\overline{\varphi} \, dx = \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{\varphi} \, dx.$$

Da equação (4.17) temos que $i\lambda\overline{\varphi} = -\overline{u} - \overline{f^1}$. Daí,

$$-\rho_1 \int_0^L |u|^2 \, dx - \rho_1 \int_0^L u\overline{f^1} \, dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\varphi_x} \, dx \leq \frac{\alpha}{|\lambda|} \int_0^L |u|^2 \, dx + \frac{\alpha}{|\lambda|} \int_0^L |u||f^1| \, dx + \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{\varphi} \, dx,$$

ou ainda,

$$\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi} \, dx \leq \left(\rho_1 + \frac{\alpha}{|\lambda|} \right) \int_0^L |u|^2 \, dx + \frac{\alpha}{|\lambda|} \int_0^L |u| |f^1| \, dx + \rho_1 \int_0^L u \bar{f}^1 \, dx + \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{\varphi} \, dx. \quad (4.30)$$

Substituindo (4.30) em I_7 , equação (4.29), vem que

$$\begin{aligned} b \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx &\leq i\lambda b \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + \frac{b\alpha^2}{2\kappa^2} \int_0^L |u|^2 \, dx \\ &\quad + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \left(\rho_1 + \frac{\alpha}{|\lambda|} \right) \int_0^L |u|^2 \, dx + \frac{\alpha}{|\lambda|} \int_0^L |u| |f^1| \, dx + \rho_1 \int_0^L u \bar{f}^1 \, dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{\varphi} \, dx - \rho_2 \int_0^L f^4 \varphi_x \, dx - \rho_2 \int_0^L \bar{u} f_x^3 \, dx + \rho_2 \int_0^L v_x \bar{f}^3 \, dx. \end{aligned}$$

Usando-se a inequação (3.17), concluímos que

$$\frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \leq i\lambda b \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + C \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}}.$$

Teorema 4.2

O semigrupo associado ao sistema de Timoshenko (2.6)–(2.9), onde $\alpha > 0$ e $\beta = 0$, é exponencialmente estável se, e somente, se

$$\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$$

onde $\frac{\rho_1}{\kappa}$ e $\frac{\rho_2}{b}$ são as velocidades de propagação de onda.

Demonstração. Somaremos todas as desigualdades dos lemas anteriores com o propósito de buscar uma limitação para a norma do vetor \mathbf{U} , obteremos

$$\begin{aligned} \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}}^2 &= \rho_1 \int_0^L |u|^2 \, dx + \rho_2 \int_0^L |v|^2 \, dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \\ &\leq \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}} + c_2 \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + C \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}} \\ &\quad + c_1 \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + C \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}} \\ &\quad + i\lambda b \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + C \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}}, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}}^2 \leq i\lambda b \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^L \bar{u} \psi_x \, dx + C \| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}}, \quad \text{para todo } t > 0. \quad (4.31)$$

Por hipótese, $\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}$. Então, existe uma constante M_2 positiva, tal que

$$\| \mathbf{U} \|_{\mathbf{H}} \leq M_2 \| \mathbf{F} \|_{\mathbf{H}}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Usando o resultado 2.1, segue a conclusão do teorema. ■

4.3 Decaimento Polinomial

Para esta seção, provaremos que a solução do sistema (2.6)–(2.9) decai polinomialmente para zero como também vai para infinito quando a relação de igualdade entre as velocidades da onda não é satisfeita.

Teorema 4.3

Se $\frac{\rho_1}{\kappa} \neq \frac{\rho_2}{b}$, então o C_0 -Semigrupo associado com o sistema (4.4)–(4.4) satisfaz

$$\|S(t)\|_{\mathcal{U}_0} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \|u_0\|_{D(A)}.$$

Além disso, essa taxa de decaimento é ótima.

Demonstração. Assumindo $\frac{\rho_1}{\kappa} \neq \frac{\rho_2}{b}$ e usando-se a desigualdade de Young em (4.31), obtemos

$$\|u\|_{\mathbf{H}}^2 \leq C_\varepsilon |\lambda|^2 \int_0^L |u|^2 dx + \varepsilon \|u\|_{\mathbf{H}}^2 + C \|u\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}}. \quad (4.32)$$

Da equação (4.11), resulta

$$\|u\|_{\mathbf{H}}^2 \leq C_\varepsilon |\lambda|^2 \|u\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}} + \varepsilon \|u\|_{\mathbf{H}}^2 + C \|u\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}},$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande e $\varepsilon \rightarrow 0$, vem que

$$\|u\|_{\mathbf{H}} \leq |\lambda|^4 \|F\|_{\mathbf{H}}^2,$$

o que é equivalente a

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leq M |\lambda|^2,$$

então usando o Teorema 2.1, a primeira parte do teorema está concluída.

Provaremos agora que a taxa de decaimento $t^{-1/2}$ é ótima. Para tal, vamos supor por contradição que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leq M |\lambda|^{2-\delta}, \quad \text{quando } |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (4.33)$$

isto implica que, para todo $F \in \mathbf{H}$, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\delta}} \|u\|_{\mathbf{H}} \leq \|F\|_{\mathbf{H}},$$

onde $u \in \mathbf{H}$ é a solução da equação resolvente $i\lambda u - Au = F$. Isto é contradição, pois do Teorema 4.1 podemos construir seqüências $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ para $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{H}$, tais que

$$\|u\|_{\mathbf{H}} \geq C |\lambda_n|^2 \|F_n\|_{\mathbf{H}},$$

o que implica em

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\delta}} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \geq C |\lambda_n|^{\delta-1} \rightarrow \infty, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

contradizendo (4.33). E o teorema está provado. ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação inicial de estudar as equações diferenciais parciais de vigas de Timoshenko deu-se por conhecer mais sobre a técnica de Semigrupos. E nada melhor do que revisitar um resultado que comemora 100 anos. Vimos no presente trabalho que ao estudar as características que envolvem o sistema nos leva a trabalhar com espaços mais complexos.

Como o objetivo central é buscar por uma estabilidade exponencial desse sistema, desejamos que tal controle seja feito de forma mais rápida e eficaz, ou seja, preferencialmente de ordem exponencial. Porém, não precisamos nos frustrar pois notamos que isso ocorre apenas sob a dependência da relação dos coeficientes de propagação da onda do sistema. E mesmo que a relação não seja satisfeita, ainda podemos controlar a energia do sistema por um polinômio e, por fim, indicar uma taxa ótima.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. S. Almeida Júnior; M. L. Santos; J. E. Muñoz Rivera. **Stability to weakly dissipative Timoshenko systems.** *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36:1965–1976, 2013.
- [2] J. E. Muñoz Rivera; R. Racke. **Global stability for damped Timoshenko systems.** *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, B 9:1625–1639, 2003.
- [3] C. A. Raposo; J. Ferreira; M. L. Santos; N. N. O. Castro. **Exponential stability for the Timoshenko beam with two weak dampings.** *Applied Mathematics Letters*, 18:535–541, 2005.
- [4] A. Borichev; Y. Tomilov. **Optimal polynomial decay of functions and operator semi-groups.** *Mathematische Annalen*, 347 (2):455-478, 2009.
- [5] H. D. Fernández Sare. **On the stability of Mindlin-Timoshenko plates.** *Quartely of Applied Mathematics*, 67:249-263, March 2009.
- [6] M. A. Jorge Silva; M. T. Fu; J. E. Muñoz Rivera. **Mindlin-Timoshenko systems with Kelvin-Voigt: analyticity and optimal decay rates.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 417:164-179, 2014.
- [7] Z. Liu; S. Zheng. **Semigroups associated with dissipative systems.** In: *CRC Research Notes in Mathematics* 398, Chapman & Hall, 1999.
- [8] A. Soufyane. **Stabilisation de la poutre de Timoshenko.** *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I – Mathematics*, 328(8):731–734, 1999.
- [9] M. L. Santos; A. D. S. Campelo; D. S. Almeida Júnior. **Rates of Decay for Porous Elastic System Weakly Dissipative,** 151:1–26, 2017.
- [10] F. Ammar-Khodja; A. Benabdallah; J. E. Muñoz Rivera; R. Racke. **Energy decay for Timoshenko systems of memory type.** *Journal of Differential Equation*, 194 (1):82-115, 2003.