UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos com e sem Simetria.

Lucian Villar Monte Palma Pantoja

Belém

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Lucian Villar Monte Palma Pantoja

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos com e sem Simetria.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática, como requisito parcial, para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

Belém

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M772m Monte Palma Pantoja, Lucian Villar.
Multiplicidade de soluções para problemas elípticos com e sem simetria / Lucian Villar Monte Palma Pantoja. — 2022.
53 f.

Orientador(a): Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2022.

1. Equações diferenciais parciais elípticas. 2. Teoria de gênero. 3. Problema variacional. 4. Funcionais simétricos. I. Título.

CDD 510

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Lucian Villar Monte Palma Pantoja

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos com e sem Simetria

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática, como requisito parcial, para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 21 de janeiro de 2022.
Resultado: APROVADO

Banca Examinadora

João Rodrigues Dos Santos Junior

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior (Orientador)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedicatória

Para Lady Maria Monte Palma.

Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer aos meus pais Laura e Alberto pelo apoio constante nas minhas escolhas durante toda a minha vida. Agradeço também aos meus irmãos Ramon, Gabriel, Lucas, Gabriela e o meu irmão de vida Wilson, pelo amor e companheirismo durante todos esses anos. Agradeço a minha avó Lady por todos os sábios conselhos e por ser um espelho intelectual para mim.

Gostaria de agradecer a todos os colegas e amigos que me ajudaram durante esta trajetória até aqui. Todos vocês tiveram contribuições na minha vida e me ajudaram demais durante o processo. Em particular, gostaria de agradecer aos meus amigos pessoais Renan, Ennyo, Thales, Lucas, Miguel, Bruno Beckman, Eduardo, Luciano e Bruno Freitas. Eu dificilmente teria concluído esta jornada sem a presença ou ajuda de vocês nos momentos tristes e felizes, muito obrigado por tudo.

Também agradeço à todos os meus colegas de curso, pela oportunidade do convívio e pela cooperação mútua durante estes anos.

Agradeço ao meu orientador João Rodrigues por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa. Trabalhar com o senhor era um sonho antigo. Foi um grande prazer aprender o seu estilo de produzir matemática, e mais importante, de ética de trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho investigamos a multiplicidade de soluções não-triviais para a seguinte classe de problemas

$$\begin{aligned} -\Delta u =& p(x,u) + f(x), \quad x \in \Omega \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$. Tal problema foi tratado em [12], [13]. No primeiro capítulo desenvolvemos as ferramentas básicas para o restante do trabalho. Definimos o conceito de gênero, que é o ponto de partida para um estudo topológico dos domínios que aparecem no decorrer do trabalho. No segundo capítulo, são exibidos os primeiros resultados sobre a multiplicidade de pontos críticos para funcionais simétricos. Demonstramos a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha, ponto crucial para tratar o problema (1). No terceiro capítulo nós atacamos (1) utilizando uma série de argumentos auxiliares para controlar o desvio na simetria do funcional associado ao problema.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais Elíticas; Teoria de Gênero; Problema Variacional; Teorema do Passo da Montanha; Funcionais Simétricos.

Abstract

In this work we investigate the multiplicity of non-trivial solutions for the follow class of problems given by

$$\begin{aligned} -\Delta u =& p(x,u) + f(x), \quad x \in \Omega \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

where $f \in L^2(\Omega)$. This problem was treated in [12], [13]. In the first chapter we develop the basic tools for the rest of the work. We define the concept of genus, which is the starting point for a topological study of the domains that appear throughout the work. In the second chapter, the first results on the multiplicity of critical points for symmetrical functionals are shown. We demonstrate the symmetrical version of the Mountain Pass Theorem, which is crucial for dealing with the problem (2). In the third chapter we attack (2) using a series of auxiliary arguments to control the deviation in symmetry of the functional associated with the problem.
Key-words: Elliptic Partial Differential Equations; Variational Problem; Genus Theory; Mountain Pass Theorem; Symmetric Functionals.

Conteúdo

Introdução

O desenvolvimento da teoria qualitativa das equações diferenciais parciais no século 20 sofreu um avanço extraordinário com a introdução dos métodos pela análise funcional não-linear. Tal fato criou uma nova perspectiva sobre as equações diferenciais originalmente motivadas pela modelagem de problemas físicos. Como um exemplo, consideramos a equação de Poisson

$$\begin{aligned} -\Delta u =& f(x), \quad x, \in \Omega \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave. No que segue, vamos considerar a abordagem variacional do problema (3). Indicamos [4], [7] para um detalhamento completo da teoria dos espaços de Sobolev e outras abordagens variacionais para problemas que não sejam elípticos. Para os resultados em análise funcional não-linear, ver [14].

Supondo que f possui condições adequadas, dizemos que uma função u é uma solução clássica de (3) se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Multiplicando (3) por uma *função teste* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e utilizando integração por partes obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx. \tag{4}$$

Denotando o espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \Big)^{1/2},$$

dizemos que u é uma *solução fraca* do problema (3) se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e satisfaz (4). Fixando $E = W_0^{1,2}(\Omega)$, defina

$$I(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu) dx. \tag{5}$$

O funcional I é diferenciável no sentido de Fréchet em E, e possui derivada dada por

$$I'(u)\varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f\varphi) dx \tag{6}$$

para $\varphi \in E$. Portanto u é um ponto crítico de I se, e somente se, u é uma solução fraca do problema (3).

Existem dois métodos principais para se obter pontos críticos de funcionais. O primeiro é a generalização da teoria de Morse para o contexto das equações diferenciais. O segundo método, que será abordado nesta dissertação, é a chamada teoria minimax. A teoria surgiu com o trabalho de Ljusternik e Schnirelman [10].

Em linhas gerais, o método consiste em caracterizar o valor crítico c de um funcional I como um valor minimax sobre uma classe apropriada de conjuntos S, onde

$$c = \inf_{A \in S} \max_{u \in A} I(u). \tag{7}$$

Em cada situação a escolha do conjunto S deve levar em conta a natureza topológica dos conjuntos de nível de I numa vizinhança da pré-imagem de c.

O primeiro, e mais impactante, resultado minimax é o Teorema do Passo da Montanha provado por Ambrosetti e Rabinowitz em [1]. O enunciado do teorema envolve uma condição de "compacidade"para o funcional I, que é recorrente na teoria. Se E for um espaço de Banach, dizemos que uma sequência $u_m \subset E$ satisfaz a condição de Palais-Smale (a qual vamos denotar por (PS)) para um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ se $I(u_m)$ é limitada e $I'(u_m) \to 0$, quando $m \to \infty$, implicam que u_m possui uma subsequência convergente. De fato, A condição (PS) implica que $K_c = \{u \in E | I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$ é um conjunto compacto para todo $c \in \mathbb{R}$. Vários exemplos em que a condição (PS) é satisfeita podem ser encontrados em [12], [14].

Agora, vamos enunciar o Teorema do Passo da Montanha. Denotaremos por B_r a bola aberta em E de raio r centrada na origem e ∂B_r o seu bordo.

Teorema 0.0.1. *Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Supondo que I satisfaz (PS), $I(0) = 0$,*
(I_1) existem constante $\rho, \alpha > 0$ tal que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$,

(I_2) *existe* $e \in E \backslash \partial B_\rho$ *tal que* $I(e) \leq 0$. *Nessas condições,* I *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$ *que pode ser dado por*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g[0,1]} I(u),$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) | g(0), g(1) = e\}.$$

A demonstração do teorema passa pelo Lema da Deformação (Lema **??** do Apêndice), um argumento recorrente para provar a existência de pontos críticos para funcionais. Existe uma outra versão básica do Teorema do Passo da Montanha devido a Willem, ver [14].

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira:

No capítulo 1, estudaremos a Teoria de Gênero, criada por Krasnoselski em [9]. A idéia principal é criar uma ferramenta para medir o "tamanho"de conjuntos simétricos e mostrar as propriedades necessárias para o desenvolvimento posterior da teoria variacional. Neste capítulo, vamos exibir alguns resultados de natureza topológica.

No capítulo 2, utilizando a Teoria de Gênero, vamos obter o resultado básico sobre multiplicidade de pontos críticos para funcionais $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, onde os pontos críticos serão obtidos como valores minimax sobre de uma classe apropriada de subconjuntos $A \subset E$. O resultado básico foi provado em [10]. Uma primeira aplicação será dada ao problema de autovalor

$$\begin{aligned} -\Delta u =& \lambda p(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{8}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado cujo bordo é uma superfície diferenciável, e a função p satisfaz certas condições de crescimento que serão explicitadas a frente. Após este prelúdio, vamos enunciar e demonstrar o principal resultado sobre multiplicidade de pontos críticos para funcionais simétricos, a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. Em seguida, vamos exibir uma aplicação ao problema semilinear

$$\begin{aligned} -\Delta u =& p(x,u), \quad x \in \Omega \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{9}$$

Onde Ω um domínio suave, e a função p satisfaz certas condições de crescimento que serão explicitadas a frente.

No capítulo 3, vamos tratar sobre uma perturbação no problema semilinear dada por

$$\begin{aligned} -\Delta u =& p(x,u) + f(x), \quad x \in \Omega \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$. Tal problema foi tratado em [12], [13]. A presença do termo $f(x)$ quebra a simetria do funcional associado ao problema e ele não será par. Neste caso, não será possível utilizarmos de maneira direta a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. Entretanto, vamos mostrar que é possível exibir uma infinidade de pontos críticos para o funcional associado ao problema, e portanto uma infinidade de soluções. Construiremos um funcional auxiliar que possui um controle no desvio da simetria e que possui os mesmos pontos críticos do funcional original. Após isso, vamos aplicar a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha ao funcional auxiliar e obter estimativas utilizando uma sequência auxiliar de valores minimax. O argumento final mostrará a sequência desejada de valores minimax, e utilizando uma desigualdade entre os valores minimax obtidos, vamos obter uma contradição que prova o resultado.

No Apêndice A, apresentaremos algumas definições e resultados básicos, que foram utilizados durante toda a dissertação.

Capítulo 1

Teoria de gênero

Neste capítulo vamos desenvolver as ferramentas básicas para obter os resultados sobre multiplicidade de pontos críticos para funcionais diferenciáveis. Vamos definir um conceito chamado gênero desenvolvido por Krasnoselski [9] para medir o "tamanho"de um conjunto simétrico, isto é, um conjunto invariante por um grupo de simetrias. Utilizaremos uma definição equivalente devido a Coffman [5].

Definição 1.0.1. *Seja E um espaço de Banach e Σ a família de conjuntos $A \subset E \backslash \{0\}$ tal que A é fechado em E e simétrico em relação a origem, isto é, $x \in A$ implica $-x \in A$. Se $A \in \Sigma$, definimos o gênero de A como n, denotado por $\gamma(A) = n$, se existe um mapa $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e n é o menor inteiro com esta propriedade. Quando não existe tal número n, definimos $\gamma(A) = \infty$ e $\gamma(\emptyset) = 0$.*

Exemplo 1.0.1. *Suponha que $B \subset E$ é fechado e $B \cap (-B) = \emptyset$. Seja $A = B \cup (-B)$ e defina*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in B \\ -1 & se\ x \in -B. \end{cases}$$

Então $\gamma(A) = 1$ pois $\varphi \in C(A, \mathbb{R} \backslash \{0\})$.

Observação 1.0.1. *Se $A \in \Sigma$ e $\gamma(A) > 1$, então A contém infinitos pontos distintos. Caso contrário, se A possuisse um número finito de pontos, poderíamos escrever $A = B \cup (-B)$ como no exemplo (1.0.1) e portanto $\gamma(A) = 1$.*

Exemplo 1.0.2. *Se $n \geq 1$ e A é homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ por um mapa ímpar, então $\gamma(A) > 1$. Caso contrário existiria um mapa $\varphi \in C(A, \mathbb{R} \backslash \{0\})$ com φ ímpar.*

Escolha $x \in A$ tal que $\varphi(x) > 0$. Assim, $\varphi(-x) < 0$ e pelo Teorema do Valor Intermediário φ deve ser anular em algum ponto sobre o caminho em A que liga x e $-x$, o que é uma contradição.

A próxima proposição lista as principais propriedades do gênero de um conjunto.

Proposição 1.0.1. *Sejam $A, B \in \Sigma$ e $\delta > 0$ e $N_\delta(A) = \{x \in E | \|x - A\| \leq \delta\}$ a vizinhança de A em relação a um raio δ. Então*

1. *Se $x \neq 0$, então $\gamma(\{x\} \cup \{-x\}) = 1$.*
2. *Se existe um mapa ímpar $f \in C(A, B)$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*
3. *Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.*
4. *$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.*
5. *Se A é compacto, então $\gamma(A) \leq \infty$ e existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$.*

Demonstração. O item 1 é um caso especial do Exemplo (1.0.1). Para provar os itens 2-5 vamos assumir que $\gamma(A), \gamma(B) \leq \infty$, os demais casos são triviais. Para provar o item 2, suponha que $\gamma(B) = n$. Assim, existe uma função $\varphi \in C(B, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e portanto $\gamma(A) \leq n = \gamma(B)$. Para provar o item 3, basta escolher $f = \mathrm{id}$ no item 2.

Para o item 4, vamos assumir que $\gamma(A) = m$ e $\gamma(B) = n$. Portanto existem mapas ímpares $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^m \backslash \{0\})$ e $\psi \in C(B, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Pelo Teorema da Extensão de Tietze [6], existem mapas $\hat{\varphi} \in C(E, \mathbb{R}^m)$ e $\hat{\psi} \in C(E, \mathbb{R}^m)$ tais que $\hat{\varphi}|_A = \varphi$ e $\hat{\psi}|_B = \psi$. Trocando $\hat{\varphi}, \hat{\psi}$ por suas partes ímpares, podemos assumir que $\hat{\varphi}, \hat{\psi}$ são funções ímpares. Assim, defina $f(x) = (\hat{\varphi}(x), \hat{\psi}(x))$. Portanto $f \in C(A \cup B, \mathbb{R}^{m+n} \backslash \{0\})$ é também uma função ímpar, e portanto $\gamma(A \cup B) \leq m + n = \gamma(A) + \gamma(B)$.

Para o item 5, para cada $x \in A$, defina $r(x) = \frac{1}{2}\|x\| = r(-x)$ e $T_x = B_{r(x)}(x) \cup B_{r(x)}(-x)$. Portanto $\gamma(\overline{T_x}) = 1$ pelo Exemplo (1.0.1). Assim $A \subset \bigcup_{x \in A} T_x$ e pela compacidade de A, $A \subset \bigcup_{x \in A}^k T_x$ para algum conjunto finito de pontos $x_1, \cdots, x_k$, e portanto $\gamma(A) < \infty$ pelo item 4. Se $\gamma(A) = n$, existe um mapa $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^m \backslash \{0\})$, com φ ímpar. Extenda φ a uma função ímpar $\hat{\varphi}$ como no item 4. Como A é um conjunto compacto, existe um $\delta > 0$ tal que $\hat{\varphi} \neq 0$ em $N_\delta(A)$. Assim, temos por um lado que $\gamma(N_\delta(A)) \leq n = \gamma(A)$, mas pelo item 3 $\gamma(A) \leq \gamma(N_\delta(A))$, e assim temos a igualdade.

□

Observação 1.0.2. *Uma consequência da última proposição é a seguinte: se $\gamma(B) \leq \infty$, então $\gamma(\overline{A \backslash B}) \leq \gamma(A) - \gamma(B)$. De fato, como $A \subset \overline{A \backslash B} \cup B$ então basta combinar os itens 3 e 4 da Proposição (1.0.1).*

O próximo resultado calcula o gênero de uma classe importante de conjuntos.

Proposição 1.0.2. *Se $A \subset E$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ é uma vizinhança de* 0 *e existe um mapa $h \in C(A, \partial\Omega)$, com h um homeomorfismo ímpar, então $\gamma(A) = k$.*

Demonstração. Claramente $\gamma(A) \leq k$. Se $\gamma(A) = j < k$, existe um mapa ímpar $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^j \backslash \{0\})$. Portanto $\varphi \circ h^{-1}$ é um mapa ímpar e pertence a $C(\partial\Omega, \mathbb{R}^j \backslash \{0\})$, o que é uma contradição com o Teorema de Borsuk-Ulam [8], já que $k > j$. Portanto $\gamma(A) = k$. □

Proposição 1.0.3. *Seja X um subespaço de E de codimensão k e $A \in \Sigma$ com $\gamma(A) > k$. Então $A \cap X \neq \emptyset$.*

Demonstração. Vamos decompor $E = V \oplus X$ com V um espaço de dimensão k complementar a X em E, e P a projeção de E sobre V. Se $A \cap X = \emptyset$, então $P \in C(A, V \backslash \{0\})$ e P é um mapa ímpar. Assim, pelo item 2 da Proposição (1.0.1), $\gamma(A) \leq \gamma(P(A))$. Agora, vamos considerar a projeção radial de $P(A)$ sobre $\partial B_1 \cap V$, a qual define um outro mapa contínuo e ímpar. Assim, utilizando o argumento mais uma vez temos $\gamma(A) \leq \gamma(P(A)) \leq \gamma(\partial B_1 \cap V) = k$ pela Proposição (1.0.2), o que é uma contradição. □

Capítulo 2

Multiplicidade de pontos críticos para funcionais simétricos

Neste capítulo vamos desenvolver as principais técnicas de minimax para obter a existência de múltiplos pontos críticos de funcionais que são invariantes sobre um grupo de simetrias. Mais especificamente, seja E um espaço de Banach real, $\mathcal{G}$ grupo de transformações que leva E em E e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que I é *invariante* sobre $\mathcal{G}$ se $I(gu) = I(u)$ para todo $g \in \mathcal{G}$ e $u \in E$. O exemplo simples e que será usado múltiplas vezes durante o decorrer dos próximos capítulos é o seguinte: suponha que I é par, isto é, $I(u) = I(-u)$ para todo $u \in E$. Então I é invariante sobre $\mathcal{G} = \{\mathrm{id}, \text{-id}\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

2.1 Funcionais restritos

Utilizando os fundamentos da teoria de gênero, vamos obter o primeiro resultado de multiplicidade para funcionais simétricos devido a Ljusternik e Schnirelmann [10], que provaram o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1. *Se $I \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é um funcional par, então $I|_{\mathbb{S}^{m-1}}$ possui pelo menos m pares distintos de pontos críticos.*

Demonstração. Para $E = \mathbb{R}^n$ e $1 \leq n$, defina

$$\gamma_j = \{A \in \Sigma | A \subset \mathbb{S}^{n-1} \text{ e } \gamma(A) \geq j\}. \tag{2.1}$$

Esta família de conjuntos possui as seguintes propriedades

1. $\gamma_j \neq \emptyset . 1 \leq j \leq n$

2. *Monotonicidade:* $\gamma_1 \supset \gamma_2 \supset \cdots \supset \gamma_n$.

3. *Invariância:* Suponha que $\varphi \in C(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1})$ é um mapa ímpar. Então $\varphi : \gamma_j \to \gamma_j$, isto é, $\varphi(A) \in \gamma_j$ sempre que $A \in \gamma_j$.

4. *Excisão:* Se $A \in \gamma_j$ e $B \in \Sigma$ com $\gamma(B) \leq s < j$, então $\overline{A \backslash B} \in \gamma_{j-s}$.

O item 1 segue da Proposição 1.0.1 com $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$. O item 2 segue diretamente da definição. O item 3 é uma consequência direta do item 2 da Proposição (1.0.1), e o item 4 segue da Observação 1.0.2.

Defina
$$c_j = \inf_{A \in \gamma_j} \max_{u \in A} I(u), \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.2}$$
Pela monotonicidade dos conjuntos γ_j, é claro que $c_1 \leq \cdots \leq c_n$. Vamos mostrar que c_j é um valor crítico de $I|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Este fato em si não é suficiente para provar o Teorema 2.1.1 pois alguns dos valores minimax podem coincidir com um único ponto crítico. A próxima proposição juntamente com a Observação 1.0.1 mostra que os $c_j's$ são valores críticos, e que existem pontos críticos o suficiente. Observe que $I|'_{\mathbb{S}^{n-1}}(u) = I'(u) - \lambda u$, onde $\lambda = (I'(u), u)$.

Proposição 2.1.1. *Se* $c_j = \cdots = c_{j+p} = c$, *e* $\hat{K}_c = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} | I(x) = c$ *e* $I|'_{\mathbb{S}^{n-1}}(x) = 0\}$, *então* $\gamma(\hat{K}_c) \geq p + 1$.

Demonstração. Suponhamos que $\gamma(\hat{K}_c) \leq p$. Então pelo item 5 da Proposição 1.0.1, existe um $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(\hat{K}_c)) \leq p$. Portanto se $\hat{N} := N_\delta(\hat{K}_c) \cap \mathbb{S}^{n-1}$, então pelo item 3 da Proposição (1.0.1), $\gamma(\hat{N}) \leq p$. Utilizando o Lema da Deformação com $\mathcal{O} = \mathrm{int}\hat{N}$ e $\overline{\varepsilon} = 1$, existe um $\epsilon \in (0, 1)$ e uma função $\eta \in C([0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1})$ com $\eta(t, u)$ ímpar em u e satisfazendo
$$\eta(1, \hat{A}_{c+\varepsilon} \backslash \hat{N}) \subset \hat{A}_{c-\varepsilon}. \tag{2.3}$$
Escolha $A \in \gamma_{j-p}$ tal que $\max_A I \leq c + \varepsilon$. Pela propriedade de Excisão temos que $\overline{A \backslash \hat{N}} \in \gamma_j$, e pela propriedade da Invariância temos $\eta(1, \overline{A \backslash \hat{N}}) \in \gamma_j$. Portanto por (2.3) e pela definição de c,
$$c \leq \max_{\eta(1, \overline{A \backslash \hat{N}})} I \leq c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo.

$\square$

Observação 2.1.1. *Os valores minimax c_j podem dar uma outra caracterização mais geométrica sendo dados por*

$$c_j = \inf\{r \in \mathbb{R} | \gamma(\hat{A}_r) \geq j\}. \tag{2.4}$$

Portanto os valores c_j são os números em que os conjuntos $\hat{A}_r$ mudam o gênero. De fato, defina o lado direito de (2.4) como $\overline{c}_j$. Se $r > \overline{c}_j$, $\gamma(\hat{A}_r) \geq j$, $\hat{A}_r$ e

$$c_j \leq \max_{\hat{A}_r} I = r. \tag{2.5}$$

Portanto (2.5) mostra que $c_j \leq \overline{c}_j$. Se $c_j < \overline{c}_j$, defina $c = (c_j + \overline{c}_j)/2$. Então existe um $A \subset \hat{A}_c$ tal que $\max_A I \leq c$. Portanto $\gamma(\hat{A}_c) \geq \gamma(A) \geq j$ mas $c < \overline{c}_j$, o que é uma contradição. Logo $c_j = \overline{c}_j$.

Vamos mencionar uma generalização para dimensão infinita do Teorema 2.1.1.

Teorema 2.1.2. *Seja E um espaço de Hilbert de dimensão infinita e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional par. Suponha que $r > 0$, $I|_{\partial B_r}$ satisfaz (PS) e $I|_{\partial B_r}$ é limitado inferiormente. Então $I|_{\partial B_r}$ possui infinitos pares de pontos críticos.*

Demonstração. Defina os conjuntos γ_j como em (2.1) para $j \in \mathbb{N}$ com $\mathbb{S}^{n-1}$ substituído por ∂B_r. Estes conjuntos ainda satisfazem as propriedades 1-4 do Teorema 2.1.1. Defina os valores minimax por

$$c_j = \inf_{A \in \Gamma_j} \sup_{u \in A} I(u). \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Como $I|'_{\partial B_r}$ é limitado inferiormente, então $c_1 > -\infty$. Além disso (PS) implica que $\hat{K}_c = \{u \in \partial B_r | I(u) = c \text{ e } I|_{\partial B_r} = 0\}$ é um conjunto compacto para todo $c \in \mathbb{R}$. Com estas observações e utilizando o argumento da Proposição 2.1.1 prova o teorema de maneira similar. $\square$

2.1.1 Um problema de autovalor

Vamos mostrar uma aplicação do Teorema 2.1.1 que exibe multiplicidade de pontos críticos na presença de simetria para o funcional associado ao problema. Considere o seguinte problema de autovalor

$$\begin{aligned} -\Delta u =& \lambda p(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado cujo bordo é uma superfície diferenciável. Durante o resto da seção a função p vai satisfazer as condições abaixo

(p_1) $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(p_2) Existem constantes $a_1, a_2 \geq 0$ tais que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$$

onde $0 \leq s < (n+2)(n-2)^{-1}$ se $n > 2$.

(p_3) $\xi p(x,\xi) > 0$ se $\xi \neq 0$

(p_5) A função $p(x,\xi)$ é ímpar em ξ.

Seja $E = W_0^{1,2}$ e $u \in E$. Defina

$$I(u) = -\int_\Omega P(x,u)dx. \tag{2.8}$$

Assim $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e I é um funcional par, isto é, $I(u) = I(-u)$. Se u for um ponto crítico de $I|_{\partial B_1}$ então

$$I'(u)\varphi - \mu(u,\varphi) = 0 = -\int_\Omega p(x,u)\varphi dx - \mu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \tag{2.9}$$

para todo $\varphi \in E$. Escolhendo $\varphi = u$ e usando (p_3) temos

$$\mu = I'(u)u = -\int_\Omega p(x,u)udx < 0.$$

Portanto u é uma solução fraca do problema (2.7) com $\lambda = -\mu^{-1}$. Assim, gostaríamos de aplicar o Teorema 2.1.1 para obter soluções fracas do problema (2.7) em ∂B_1.

Para aplicar o Teorema (2.1.1), observe que pela Proposição 1.0.1 do Apêndice, I é fracamente contínuo, isto é, $u_m \to u$ implica $I(u_m) \to I(u)$. Isto implica que

$I|_{\partial B_1}$ é limitado inferiormente. Caso contrário, existe uma sequência $(u_m) \subset \partial B_1$ tal que $I(u_m) < -m$. Como (u_m) é limitada, ela possui uma subsequência convergindo fracamente para $\overline{u} \in \overline{B_1}$. Assim $I(u_m) \to I(\overline{u}) = \infty$, o que é um absurdo pois $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Para verificar a condição (PS), seja (u_m) uma sequência em ∂B_1 tal que $(I(u_m))$ é limitada e $I|'_{\partial B_1} \to 0$ quando $m \to \infty$, isto é

$$I|'_{\partial B_1}(u_m) = I'(u_m) - (I'(u_m))u_m \to 0. \tag{2.10}$$

Como (u_m) é limitada em E, e o funcional I' é compacto, então alguma subsequência de u_m converge fracamente para algum $u \in E$ e

$$I'(u_m) \to I'(u) - (I'(u)u)u = 0.$$

Como I é fracamente contínuo, então $I(u_m) \to I(u)$. Se $I(u) \neq 0$, por (p_3), $u \neq 0$. Logo $I'(u)u \neq 0$ e $I'(u_m)u_m \neq 0$ para m suficientemente grande. Consequentemente (2.10) mostra que

$$u_m = (I'(u_m)u_m)^{-1}(I|'_{\partial B_1}(u_m) - I'(u_m))$$

possui uma subsequência convergente. Entretanto, se $I(u) = 0$, a sequência (u_m) não necessariamente possui uma subsequência convergente. De fato, o argumento acima mostra que qualquer sequência (u_m) que é fracamente convergente para 0 satisfaz $I(u_m) \to 0$ e $I|'_{\partial B_1}(u_m) \to 0$ mas (u_m) não necessariamente possui uma subsequência convergente.

Portanto, o que mostramos é $I|_{\partial B_1}$ satisfaz $(PS)_{\text{loc}}$ para todo $c \neq 0$, onde $(PS)_{\text{loc}}$ está definido no Apêndice. Além disso, $(PS)_{\text{loc}}$ é tudo que precisamos para a provar do Teorema da Deformação. Portanto o Teorema 2.2.1 também é válido com a hipótese (PS) substituída por $(PS)_{\text{loc}}$ para cada c_j definido por (2.6). Para aplicar o Teorema (2.2.1) para o problema (2.7), usando as observações feitas acima, precisamos apenas provar que $c_j < 0$ para todo j. Isto é imediato a partir de (p_3) e (2.6). Assim provamos que

Teorema 2.1.3. *Se p satisfaz $(p_1), (p_2), (p_3) e (p_5)$, então o problema (2.7) possui uma sequência de pares distintos $(\lambda_k, \pm u_k)$ em $\mathbb{R} \times \partial B_r$, onde $\lambda_k := -(I'(u_k)u_k)^{-1}$.*

Corolário 2.1.1. $c_k = I(u_k) \to 0$ *quando* $k \to 0$.

Demonstração. Sejam $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ os autovalores do problema

$$\begin{aligned} -\Delta v =& \lambda v, \quad x \in \Omega, \\ v =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

e $v_1, v_2, \ldots$ as autofunções correspondentes normalizadas com $\|v_k\| = 1$. Defina $E_k = span\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $E_k^{\perp}$ o seu complemento ortogonal. Pela Proposição 1.0.3, se $A \in \gamma_k$, então $A \cap E_{k-1}^{\perp} \neq \emptyset$. Assim

$$\sup_A I \geq \inf_{E_{k-1}^{\perp} \cap \partial B_r} I,$$

e portanto

$$c_k \geq \inf_{E_{k-1}^{\perp} \cap \partial B_r} I. \tag{2.11}$$

Agora, observe que por (p_2)

$$\int_\Omega |P(x,u)|dx \leq \int_\Omega (a_1|u| + a_2|u|^{s+1})dx \leq a_2\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^{s+1} + a_3\|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.12}$$

Utilizando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (Teorema 1.0.2 do Apêndice) obtemos

$$\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)} \leq \alpha_s \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \Big)^a \Big(\int_\Omega u^2 dx \Big)^{1-a} = \alpha_s \|u\|^a \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-a}, \tag{2.13}$$

para todo $u \in E$ onde $2a = n(s-1)(s+1)^{-1}$. Além disso, se $u \in E_k^{\perp}$,

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \lambda_k^{-1} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{2.14}$$

o que implica

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_k^{-1/2} \|u\|. \tag{2.15}$$

Utilizando as estimativas (2.12),(2.13) e (2.15) temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^{s+1} \leq& \alpha_s \|u\|^{a(s+1)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{(1-a)(s+1)} \\ \leq& \alpha_s \|u\|^{a(s+1)} \lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)} \|u\|^{(1-a)(s+1)} \\ =& \alpha_s \lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)} \|u\|^{s+1} \\ =& \alpha_s \lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)}. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de I e combinando as estimativas acima temos

$$\begin{aligned}|I(u)| =&\Big|\int_\Omega P(x,u)dx\Big| \leq \int_\Omega |P(x,u)|dx\\ \leq& a_2\|u\|^{s+1}_{L^{s+1}(\Omega)} + a_3\|u\|_{L^2(\Omega)}\\ \leq&\alpha_s\lambda_k^{-(1-a)(s+1)/2} + a_3\lambda_k^{-1/2}\|u\|\end{aligned}$$

Como $u \in E_{k-1}^{\perp} \cap \partial B_1$, então

$$|I(u)| \leq a_4(\lambda_k^{-(1-a)(s+1)/2} + \lambda_k^{-1/2}) \tag{2.16}$$

Utilizando o fato que $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, (2.6),(2.11),(2.12) e 2.16 mostram que $I(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$. □

2.2 Funcionais não-restritos: a versão simétrica do teorema do passo da montanha

Nesta seção vamos provar o resultado chave sobre multiplicidade de pontos críticos para funcionais simétricos, e em seguida exibir uma aplicação a um problema semilinear. O resultado abaixo é uma generalização do celebrado Teorema do Passo da Montanha [1].

Teorema 2.2.1. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ um funcional par satisfazendo as condições de Palais-Smale, com $I(0) = 0$. Se $E = V \oplus X$, onde V é de dimensão finita, e I satisfaz*
(I_1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$;
(I_2) para cada subespaço de dimensão finita $\tilde{E} \subset E$, existe um $R = R(\tilde{E})$ tal que $I \leq 0$ em $\tilde{E}\backslash B_{R(\tilde{E})}$;
então I possui uma sequência não limitada de valores críticos.

Vamos introduzir uma sequência de famílias de conjuntos Γ_m e uma sequência correspondente (c_m) de valores críticos de I será obtida tomando um valor minimax de I sobre cada Γ_m. Um argumento separado irá mostrar que a sequência (c_m) é não limitada.

Suponha que V possui dimensão k e $V = \text{span}\{e_1, \cdots, e_k\}$. Para $m \geq k$, escolha indutivamente $e_{m+1} \notin \text{span}\{e_1, \cdots, e_m\} := E_m$. Defina $R_m = R(E_m)$ e

$D_m = B_{R_m} \cap E_m$. Seja

$$G_m := \{h \in C(D_m, E) | h \text{ é ímpar e } h(u) = u \text{ se } u \in \partial B_{R_m} \cap E_m\}. \tag{2.17}$$

Observe que id $\in G_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e portanto $G_m \neq \emptyset$. Defina

$$\Gamma_j = \{h(\overline{D_m \backslash Y}) | h \in G_m, m \geq j, Y \in \Sigma \text{ e } \gamma(Y) \leq m - j\}. \tag{2.18}$$

A próxima proposição mostra que estes conjuntos Γ_j satisfazem condições como no Teorema (2.2.1)

Proposição 2.2.1. *Os conjuntos Γ_j possuem as seguintes propriedades:*

1. *$\Gamma_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*
2. *Monotonicidade: $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$.*
3. *Invariância: Se $\varphi \in C(E, E)$ é um mapa ímpar, e $\varphi = id$ em $\partial B_{R_m} \cap E_m$ para todo $m \geq j$, então $\varphi : \Gamma_j \to \Gamma_j$.*
4. *Excisão: Se $B \in \Gamma_j$, $Z \in \Sigma$, e $\gamma(Z) \leq s < j$, então $\overline{B \backslash Z} \in \Gamma_{j-s}$.*

Demonstração. Para provar o Item 1, observe que id $\in G_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e portanto $\Gamma_j \notin \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Se $B = h(\overline{D_m \backslash Y}) \in \Gamma_{j+1}$, então $m \geq j+1 \geq j$, $h \in G_m$, $Y \in \Sigma$ e $\gamma(Y) \leq m - (j+1) \leq m - j$. Portanto $B \in \Gamma_j$ e isso prova o Item 2. Para provar o Item 3, suponha que $B = h(\overline{D_m \backslash Y}) \in \Gamma_j$ e φ satisfaz as condições acima. Portanto $\varphi \circ h \in G_m(\overline{D_m \backslash Y}) = \varphi(B) \in \Gamma_j$. Para provar o Item 4, defina novamente $B = h(\overline{D_m \backslash Y}) \in \Gamma_j$, $Z \in \Sigma$ com $\gamma(Z) \leq s < j$. Vamos provar que

$$\overline{B \backslash Z} = h(\overline{D_m \backslash (Y \cup h^{-1}(Z))}) \tag{2.19}$$

Assumindo (2.19), observe que como h é ímpar, contínua e $Z \in \Sigma$, então $h^{-1}(Z) \in \Sigma$. Portanto $Y \cup h^{-1}(Z) \in \Sigma$ e pelas propriedades do gênero temos

$$\begin{aligned} \gamma(Y \cup h^{-1}(Z)) \leq & \gamma(Y) + \gamma(h^{-1}(Z)) \leq \gamma(Y) + \gamma(Z) \\ \leq & m - j + s = m - (j - s). \end{aligned}$$

Portanto $\overline{B\backslash Z} \in \Gamma_{j-s}$. Para provar (2.19), suponha que $b \in h(D_m\backslash(Y \cup h^{-1}(Z))$. Então $b \in h(D_m\backslash Y)\backslash Z \subset B\backslash Z \subset \overline{B\backslash Z}$. Portanto

$$b \in h(D_m\backslash(Y \cup h^{-1}(Z))) \subset \overline{B\backslash Z}. \tag{2.20}$$

Por outro lado, se $b \in B\backslash Z$, então $b = h(w)$ onde

$$w \in \overline{D_m\backslash Y}\backslash h^{-1}(Z) \subset \overline{D_m\backslash(Y \cup h^{-1}(Z))}. \tag{2.21}$$

Comparando (2.20)-(2.21) e usando o fato que h é contínua, obtemos (2.19). $\square$

Agora, vamos definir os valores minimax como

$$c_j = \inf_{B\in\Gamma_j} \max_{u\in B} I(u), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Vamos mostrar que se $j > k$, onde $k = \dim V$, então c_j é um valor crítico de I. A próxima proposição vai nos auxiliar a provar uma estimativa chave a frente.

Proposição 2.2.2. *Se $j > k$ e $B \in \Gamma_j$, então*

$$B \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset. \tag{2.23}$$

Demonstração. Defina $B = \overline{h(D_m\backslash Y)}$ onde $m \geq j$ e $\gamma(Y) \leq m - j$. Seja $\hat{\mathcal{O}} = \{x \in D_m | h(x) \in B_\rho\}$. Como h é ímpar, então $0 \in \hat{\mathcal{O}}$. Seja $\mathcal{O}$ a componente de $\hat{\mathcal{O}}$ que contêm 0. Como D_m é limitado, $\mathcal{O}$ é uma vizinhança simétrica (com respeito a origem) de 0 em E_m. Portanto pela Proposição (1.0.2), $\gamma(\partial\mathcal{O}) = m$. Afirmamos que

$$h(\partial\mathcal{O}) \subset \partial B_\rho. \tag{2.24}$$

Assumindo (2.24), defina $W = \{x \in D_m | h(x) \in \partial B_\rho\}$. Portanto (2.24) implica que $W \supset \partial\mathcal{O}$. Utilizando o Item 3 da Proposição (1.0.1), temos $\gamma(W) = m$ e pela Observação (1.0.1), $\gamma(\overline{W\backslash Y}) \geq m - (m - j) = j > k$. Portanto utilizando o Item 2 da Proposição (1.0.1), $\gamma(h(\overline{W\backslash Y})) > k$. Como X possui codimensão k, então pela Proposição (1.0.3) temos $h(\overline{W\backslash Y}) \cap X \neq \emptyset$. Como $h(\overline{W\backslash Y}) \subset (B \cap \partial B_\rho)$, então (2.23) é verdadeira.

Resta apenas provar (2.24). Observe que pela escolha de R_m, $I \leq 0$ no conjunto $E_m\backslash B_{R_m}$. Como $m > k$, então $\partial B_\rho \cap X \cap E_m \neq \emptyset$. Portanto por

(I_1'), temos $I|_{\partial B_\rho \cap X \cap E_m} \geq \alpha > 0$. As duas estimativas para I mostram que $R_m > \rho$. Para verificar (2.24), suponhamos que $x \in \partial\mathcal{O}$ e $h(x) \in B_\rho$. Se $x \in D_m$, então existe uma vizinhança N de x tal que $h(N) \subset B_\rho$. Logo $x \notin \partial\mathcal{O}$. Assim $x \in \partial D_m$ (com o bordo relativo a E_m), mas observe que em ∂D_m, $h = \mathrm{id}$. Consequentemente se $x \in \partial D_m$ e $h(x) \in B_\rho$, então $\|h(x)\| = \|x\| = R_m < \rho$, o que é um absurdo pelo o que provamos acima. Portanto (2.24) é verdadeira. □

Corolário 2.2.1. *Se $j > k$, então $c_j \geq \alpha > 0$.*

Demonstração. Se $j > k$ e $B \in \Gamma_j$, (2.23) e a hipótese (I_1') implicam que $\max_{u \in B} I(u) \geq \alpha$. Portanto pela definição (2.22), $c_j \geq \alpha$. □

A próxima proposição mostra que c_j é um valor crítico de I para $j > k$. Além disso, temos um resultado sobre a multiplicidade de valores críticos degenerados.

Proposição 2.2.3. *Se $j > k$, $K_c = \{u \in E | I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$ e $c_j = \cdots = c_{j+p} = c$, então $\gamma(K_c) \geq p + 1$.*

Demonstração. Como $I(0) = 0$ e $c \geq \alpha$ pelo Corolário (2.2.1), então $0 \notin K_c$. Portanto $K_c \in \Sigma$ e por (PS), K_c é um conjunto compacto. Se $\gamma(K_c) \leq p$, então pelo Item 5 da Proposição (1.0.1) existe um $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(K_c)) \leq p$. Usando o Teorema da Deformação com $\mathcal{O} = N_\delta(K_c$ e $\overline{\varepsilon} = \alpha/2$, existe um $\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ e $\eta : E \times [0,1] \to E$ contínua tal que $\eta(1, \cdot)$ é ímpar e

$$\eta(1, A_{c+\varepsilon} \backslash \mathcal{O}) \subset A_{c-\varepsilon}, \tag{2.25}$$

onde $A_M = \{u \in E | I(u) \leq M\}$. Escolha $B \in \Gamma_{j+p}$ tal que

$$\max_{u \in B} I(u) \leq c + \varepsilon. \tag{2.26}$$

Pelo Item 4 da Proposição (2.2.1), $\overline{B \backslash \mathcal{O}} \in \Gamma_j$. A definição de R_m mostra que $I(u) \leq 0$ para $u \in \partial B_{R_m} \cap E_m$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Portanto novamente o Teorema da Deformação e a escolha de $\overline{\varepsilon}$ implicam que $\eta(1, \cdot) = \mathrm{id}$ em $\partial B_{R_m} \cap E_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Portanto $\eta(1, \overline{B \backslash \mathcal{O}}) \in \Gamma_j$ pelo Item 3 da Proposição (2.2.1). A definição de c_j e (2.25)-(2.26) implicam

$$\max_{\eta(1, \overline{B \backslash O})} I \leq c - \varepsilon,$$

o que é uma contradição. □

A próxima proposição completa a prova do Teorema 2.2.1.

Proposição 2.2.4. *$c_j \to \infty$ se $j \to \infty$.*

Demonstração. Pelo Item 2 da Proposição 2.2.1, $c_{j+1} \geq c_j$. Suponhamos que a sequência (c_j) é limitada. Então $c_j \to \overline{c} < \infty$ quando $j \to \infty$. Se $c_j = \overline{c}$ para j suficientemente grande, a Proposição 2.2.3 implica que $\gamma(K_{\overline{c}}) = \infty$. Por outro lado (PS) implica que $K_{\overline{c}}$ é um conjunto compacto e portanto $\gamma(K_{\overline{c}}) < \infty$ pelo item 5 da Proposição 1.0.1. Portanto $\overline{c} > c_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Defina

$$\mathcal{K} = \{u \in E | c_{k+1} \leq I(u) \leq \overline{c} \text{ e } I'(u) = 0\}.$$

Novamente utilizando (PS) temos que $\mathcal{K}$ é um conjunto compacto e o Item 5 da Proposição (1.0.1) implica $\gamma(\mathcal{K}) < \infty$. Assim, existem $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(\mathcal{K})) = \gamma(\mathcal{K}) = q$. Seja $s = \max(q, k+1)$. Utilizando o Teorema da Deformação com $c = \overline{c}$, $\varepsilon = \overline{c} - c_s$ e $\mathcal{O} = N_\delta(\mathcal{K})$ nos dá um $\varepsilon > 0$ e uma função η tal que

$$\eta(1, A_{\overline{c}+\varepsilon} \backslash \mathcal{O}) \subset A_{\overline{c}-\varepsilon}. \tag{2.27}$$

Escolha $j \in \mathbb{N}$ tal que $c_j > \overline{c} - \varepsilon$ e $B \in \Gamma_{j+s}$ tal que

$$\max_B I \leq \overline{c} + \varepsilon. \tag{2.28}$$

Argumentando como na prova da Proposição 2.2.3 temos novamente que $\overline{B \backslash \mathcal{O}}$ e $\eta(1, \overline{B \backslash \mathcal{O}})$ estão em Γ_j, dado que $\eta(1, \cdot = \text{id})$ em $\partial B_{R_m} \cap E_m$ para todo $m \geq j$. Mas $I \leq 0$ em $\partial B_{R_m} \cap E_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\overline{c} - \overline{\varepsilon} = c_s \geq c_{k+1} \geq \alpha > 0$ pelo Corolário 2.2.1. Assim, $\eta(1, \overline{B \backslash \mathcal{O}}) \in \Gamma_j$ e por (2.27)-(2.28) e pela escolha de c_j,

$$c_j \leq \max_{\eta(1, \overline{B \backslash \mathcal{O}})} I \leq \overline{c} - \varepsilon < c_j,$$

o que é uma contradição. Isso encerra a prova do teorema. □

Observação 2.2.1. *Se E possuir dimensão finita, o resultado do Teorema 2.2.1) também é verdadeiro e nos diz que I possui pelo menos dim X pontos críticos.*

2.2.1 Um problema semilinear

Vamos mostrar uma aplicação da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha ao problema semilinear dado por

$$
\begin{aligned}
-\Delta u =& p(x,u), \quad x \in \Omega \\
u =& 0, \quad x \in \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

onde Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ cujo bordo é uma superfície diferenciável. Durante o resto da seção a função p vai satisfazer as condições abaixo:
(p_1) $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
(p_2) Existem constantes $a_1, a_2 \geq 0$ tais que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$$

onde $0 \leq s < (n+2)(n-2)^{-1}$ se $n > 2$.
(p_4) Existem constantes $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que para $|\xi| \geq r$,

$$0 < \mu P(x,\xi) \leq \xi p(x,\xi)$$

onde $P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt$.
(p_5) A função $p(x,\xi)$ é ímpar em ξ.

Teorema 2.2.2. *Suponha que p satisfaz $(p_1), (p_2), (p_4), (p_5)$. Então (2.29) possui uma sequência não-limitada de soluções fracas.*

Demonstração. Seja $E = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ com respeito a norma

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{2.30}$$

e

$$I(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u) \Big) dx$$

o funcional associado ao problema (2.29). Pela Proposição (1.0.1) do Apêndice, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Para provar (PS), vamos utilizar a Proposição (1.0.2) do Apêndice. Assim, para verificar (PS), precisamos mostrar que $|I(u_m)| \leq M$, pois $I'(u_m) \to 0$

implica que (u_m) é uma sequência limitada. Para m suficientemente grande e utilizando $u = u_m$, $T = \mu^{-1}p(x,u)u - P(x,u)$ na definição do funcional temos

$$\begin{aligned} M + \mu^{-1}\|u\| \geq & I(u) - \mu^{-1}I'(u)u - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\Big)\|u\|^2 + \int_\Omega T dx \\ \geq & \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\Big)\|u\|^2 + \int_{\{x\in\Omega | u(x)\geq r\}} T dx + \int_{\{x\in\Omega | u(x)<r\}} T dx. \end{aligned}$$

Por (p_4), $(2^{-1} - \mu^{-1}) > 0$ e o primeiro termo na integral de T é positivo. O segundo termo é limitado por uma constante independente de m. Isso prova que (u_m) é limitada em E.

Agora, observe que pela definição do funcional $I(0) = 0$, e claramente a condição (p_5) implica que I é par. Para provar a condição (I_2) para I, observe que por (p_4)

$$\begin{aligned} I(tu) = & \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega P(x,tu)dx \\ \leq & \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - t^\mu k_1 \int_\Omega |u|^\mu + k_2|\Omega| \to -\infty \end{aligned}$$

quando $t \to \infty$. Portanto existe um $R_k > 0$ tal que $I(u) \leq 0$ se $u \in E_k \backslash B_{R_k}$, e isso prova a condição (I_2). Assuma que I também satisfaz (I_1). Então o Teorema (2.2.1) implica que I possui uma sequência não-limitada de valores críticos $c_k = I(u_k)$, onde u_k é uma solução fraca de (2.29). Como $I'(u_k)u_k = 0$, então

$$0 = I'(u_k)u_k = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 - P(x,u_k)\Big)dx, \tag{2.31}$$

e portanto

$$\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_k|^2 dx = \int_\Omega P(x,u_k)dx. \tag{2.32}$$

Assim, temos que

$$I(u_k) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}p(x,u_k) - P(x,u_k)\Big)dx \to \infty \tag{2.33}$$

quando $k \to \infty$. Portanto por (2.32)-(2.33) e por (p_4), a sequência (u_k) deve ser ilimitada em E e em $L^\infty(\Omega)$.

Para verificar (I_1), sejam $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ os autovalores de

$$\begin{aligned} -\Delta v = & \lambda v, \quad x \in \Omega, \\ v = & 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

e $v_1, v_2, \ldots$ as autofunções correspondentes normalizadas com $\|v_k\| = 1$. Seja $V = E_k = span\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $X = V^{\perp}$. Seja $u \in B_\rho \cap E_k^{\perp}$. Então por (p_2) temos que

$$\int_\Omega |P(x,u)|dx \leq \int_\Omega (a_1|u| + a_2|u|^{s+1})dx \leq a_2\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^{s+1} + a_3\|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.34}$$

Utilizando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg obtemos

$$\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)} \leq a_7\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)^a \Big(\int_\Omega u^2 dx\Big)^{1-a} = a_7\|u\|^a\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-a}, \tag{2.35}$$

para todo $u \in E$ onde $2a = n(s-1)(s+1)^{-1}$. Além disso, se $u \in E_k^{\perp}$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_{k+1}^{-1/2}\|u\|. \tag{2.36}$$

Utilizando as estimativas (2.34) e (2.35) temos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^{s+1} \leq & a_7\|u\|^{a(s+1)}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{(1-a)(s+1)} \\ \leq & a_7\|u\|^{a(s+1)}\lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)}\|u\|^{(1-a)(s+1)} \\ = & a_7\lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)}\|u\|^{s+1} \\ = & a_7\lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)}\rho^{s+1}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Pela definição de I temos que

$$I(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u)\Big)dx. \tag{2.38}$$

Substituindo as estimativas (2.34)-(2.36)-(2.37) em (2.38) temos

$$\begin{aligned}I(u) \geq & \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - a_2\int_\Omega |u|^{s+1}dx - a_6 \\ \geq & \frac{1}{2}\rho^2 - a_7\lambda_{k+1}^{-(1-a)(s+1)/2}\rho^{s+1} - a_6 \\ = & \rho^2\Big(\frac{1}{2} - a_7\lambda_{k+1}^{-(1-a)(s+1)/2}\rho^{s-1} - a_6\Big).\end{aligned}$$

Escolha $\rho = \rho(k)$ tal que o coeficiente de ρ^2 seja $\frac{1}{4}$. Assim temos

$$I(u) \geq \frac{1}{4}\rho^2 - a_6 \tag{2.39}$$

para $u \in \partial B_\rho \cap X$. Como $\lambda_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, então $\rho(k) \to \infty$ quando $k \to \infty$. Escolha k de tal forma que $\frac{1}{4}\rho^2 > 2a_6$. Desta forma

$$I(u) \geq \frac{1}{8}\rho^2 = \alpha \tag{2.40}$$

e portanto a condição (I_1) é verdadeira. $\square$

Capítulo 3

Multiplicidade de pontos críticos para funcionais não-simétricos

No capítulo 2 mostramos a existência de múltiplos pontos críticos para funcionais que são invariantes sobre um grupo de simetrias. Neste capítulo vamos tratar uma perturbação no problema (2.29) que destroi a simetria do funcional. Vamos mostrar que dentro de certas condições, é possível construir um funcional que controla o desvio na simetria, e exibir múltiplos pontos críticos para o problema modificado. Durante o resto do capítulo vamos seguir [12] e [13]. Considere novamente o problema semilinear dado por

$$\begin{aligned} -\Delta u =& p(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado cujo bordo é uma superfície diferenciável, e $u \in E$, onde $E = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ com respeito a norma

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{3.1}$$

O funcional associado ao problema é

$$I(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u) \Big) dx \tag{3.2}$$

onde $P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt$. O funcional em (3.2) é simétrico(ou par), isto é, satisfaz $I(u) = I(-u)$. Utilizando a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha, o problema (2.29) possui uma sequência não-limitada de valores críticos e portanto (3.2) admite uma sequência não-limitada de soluções fracas.

Vamos tratar de uma ruptura na simetria de (3.2). Seja $f \in L^2(\Omega)$ e considere o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u =& p(x,u) + f(x), \quad x \in \Omega \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

o qual tem funcional associado

$$I(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u) - f(x)u\Big)dx. \tag{3.3}$$

Se $f \neq 0$, então I não é um funcional par, e portanto não estamos em condições de aplicar a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. Apesar disso, vamos exibir um conjunto de técnicas para aproximar o funcional, e exibir uma sequência de soluções fracas. Antes disso, vamos fazer algumas hipóteses de crescimento sobre a função p.

Durante o resto da seção a função p vai satisfazer as condições abaixo:
(p_1) $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
(p_2) Existem constantes $a_1, a_2 \geq 0$ tais que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$$

onde $0 \leq s < (n+2)(n-2)^{-1}$ se $n > 2$.
(p_4) Existem constantes $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que para $|\xi| \geq r$,

$$0 < \mu P(x,\xi) \leq \xi p(x,\xi)$$

onde $P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt$.
(p_5) A função $P(x,\xi)$ é ímpar em ξ.

Teorema 3.0.1. *Se p satisfaz $(p_1),(p_2),(p_4),(p_5)$ e $f \in L^2(\Omega)$, então o problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u =& p(x,u) + f(x), \quad x \in \Omega, \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

possui uma sequência não-limitada de soluções fracas, dado que o parâmetro s em (p_2) possui uma condição de restrição da ordem de

$$\beta = \frac{(n+2)-(n-2)s}{n(s-1)} > \frac{\mu}{\mu - 1}. \tag{3.4}$$

Observação 3.0.1. *(i) A desigualdade na equação (3.4) é equivalente a*

$$s < \frac{\mu n + (\mu - 1)(n+2)}{\mu n + (\mu - 1)(n-2)}. \tag{3.5}$$

Se s satisfaz (3.5), então $s < (n+2)(n-1)^{-1}$. Observe que $s = 1$ e $\mu = 2$ satisfazem a equação (3.5) e portanto a condição (3.4) é não-vazia.

3.1 Controle no desvio da simetria

O argumento da demonstração do Teorema 3.0.1 gira em torno da versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. Para a prova é necessário uma estimativa no desvio da simetria do funcional I da ordem de

$$|I(u) - I(-u)| \leq \beta_1(|I(u)|^{1/\mu} + 1) \tag{3.6}$$

para $u \in E$. Apesar do funcional I não satisfazer (3.6), ele pode ser modificado para construir um novo funcional J que satisfaz (3.6), de uma forma que pontos e valores críticos suficientemente grandes de J serão também de I.

Para motivar o problema modificado, vamos estabelecer cotas para os pontos críticos de I em termos dos respectivos valores críticos. Em primeiro lugar, observe que por (p_4) existem constantes $a_4, a_5 > 0$ tais que

$$P(x, \xi) \geq a_5|\xi|^\mu - a_4 \tag{3.7}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Portanto existe uma constante $a_3 > 0$ tal que

$$\frac{1}{\mu}(\xi p(x,\xi) + a_3) \geq P(x,\xi) + a_4 \geq a_5|\mu|^\mu \tag{3.8}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.1.1. *Nas hipóteses do Teorema (3.0.1), existe uma constante $A > 0$ que depende apenas de $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ tal que se u é um ponto crítico de I, então*

$$\int_\Omega (P(x,u) + a_4)dx \leq A(I(u)^2 + 1)^{1/2} \tag{3.9}$$

Demonstração. O funcional associado ao problema no Teorema (3.0.1) é dado por

$$I(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u) - f(x)u\Big)dx, \tag{3.10}$$

o qual tem derivada dada por

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x,u)\varphi - f(x)\varphi\Big)dx \quad ; \quad \varphi \in E. \tag{3.11}$$

Suponha agora que u é um ponto crítico de I. Então por 3.8

$$\begin{aligned} I(u) =& I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u \\ =& \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u) - f(x)u\Big)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(|\nabla u|^2 - p(x,u)u - f(x)u\Big)dx \\ =& \int_\Omega \left[\frac{1}{2}up(x,u) - P(x,u) - \frac{1}{2}fu\right]dx \\ =& \frac{1}{2}\int_\Omega up(x,u)dx - \int_\Omega P(x,u)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega fudx \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Holder na última parcela da soma temos

$$\begin{aligned} I(u) \geq& \frac{1}{2}\int_\Omega up(x,u)dx - \frac{1}{\mu}\int_\Omega (up(x,u) + a_3)dx - \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} - a_6 \\ =& \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\Big)\int_\Omega (up(x,u) + a_3)dx - \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} - a_6 \\ \geq& a_7\int_\Omega (P(x,u) + a_4)dx - a_8\|u\|_{L^\mu(\Omega)} - a_9 \\ \geq& \frac{a_7}{2}\int_\Omega (P(x,u) + a_4)dx - a_9. \end{aligned}$$

Daí podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (P(x,u) + a_4)dx - a_9 \leq& \frac{2}{a_7}(I(u) + a_9) \\ \leq& AI(u) \\ \leq& A(I(u)^2 + 1)^{1/2} \end{aligned}$$

e isso encerra a prova. □

Para introduzir o problema modificado, seja $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \leq 1 \\ 0 & \text{se } \xi \geq 2 \end{cases}$$

na qual satisfaz $\chi'(\xi) \in (-2,0)$ para $\xi \in (1,2)$. Defina

$$Q(u) = 2A(I(u)^2+1)^{1/2}$$

e

$$\psi(u) = \chi\Bigg(Q(u)^{-1}\int_\Omega (P(x,u)+a_4)dx\Bigg).$$

Observe que pela Proposição (3.1.1), se u é um ponto crítico de I, então o argumento de χ pertence ao intervalo $[0,\frac{1}{2}]$ e portanto $\psi(u)=1$. De fato,

$$\begin{aligned}\psi(u) =&\chi\Bigg(Q(u)^{-1}\int_\Omega (P(x,u)+a_4)dx\Bigg)\\ \leq&\chi\Bigg(\frac{1}{2A(I(u)^2+1)^{1/2}}A(I(u)^2+1^{1/2})\Bigg)\\ =&\chi(1/2).\end{aligned}$$

Por último, vamos definir o funcional auxiliar

$$J(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u) - \psi(u)f(x)u\Big)dx. \tag{3.12}$$

Daí segue que se u for um ponto crítico de I, então $J(u) = I(u)$. O próximo resultado contém as principais propriedades técnicas do funcional J.

Proposição 3.1.2. *Sobre as hipóteses do Teorema (3.0.1), vale que:*

1. $J \in C^1(E,\mathbb{R})$.
2. *existe uma constante β_1 que depende apenas de $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ tal que*

$$|J(u) - J(-u)| \leq \beta_1(|J(u)|^{1/\mu}+1) \tag{3.13}$$

para todo $u \in E$.

3. *Existe uma constante $M_0 > 0$ tal que se $J(u) \geq M_0$ e $J'(u) = 0$, então $J(u) = I(u)$ e $I'(u) = 0$.*
4. *Existe uma constante $M_0 > M_1$ tal que para todo $c > M_1$, J satisfaz a condição de Palais-Smale numa vizinhança de c.*

Demonstração. As hipóteses $(p_1)-(p_2)$ implicam que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Como χ é suave, então ψ e J também são suaves, e isso prova o item 1.

Para provar 2, observe que se $u \in \operatorname{supp}\psi$, então

$$\left|\int_\Omega fudx\right| \leq \alpha_1(|I(u)|^{1/\mu}+1), \tag{3.14}$$

onde α_1 depende de $\|f\|_{L^2(\Omega)}$. De fato, pela desigualdade de Schwarz e Holder, temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega fudx\right| \leq & \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha_2\|u\|_{L^2(\Omega)}\\ \leq & \alpha_3\left(\int_\Omega(P(x,u)+a_4)dx\right)^{1/\mu}\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (3.7) pois

$$\begin{aligned}\alpha_3\int_\Omega(P(x,u)+a_4)dx \geq & \int_\Omega |u|^\mu dx\\ = & \|u\|^\mu_{L^\mu(\Omega)}.\end{aligned}$$

Entretanto se $u \in \operatorname{supp}\psi$, então pela proposição (3.1.1) temos

$$\int_\Omega(P(x,u)+a_4)dx \leq 4A(I(u)^2+1)^{1/2} \leq \alpha_4(|I(u)|+1).$$

Portanto,

$$\left|\int_\Omega fudx\right| \leq \alpha_1\left(\int_\Omega(P(x,u)+a_4)dx\right)^{1/\mu} \leq \alpha_1(|I(u)|+1)^{1/\mu} \leq \alpha_1(|I(u)|^\mu+1)$$

e isso prova a desigualdade (3.14). Para provar (3.13), observe que utilizando 3.12 e (p_5),

$$\begin{aligned}|J(u)-J(-u)| = & \left|\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2-P(x,u)-\psi(u)f(x)u\Big)dx\right.\\ & \left.-\int_\Omega\Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2-P(x,-u)-\psi(-u)f(x)(-u)\Big)dx\right|.\end{aligned}$$

Subtraindo os termos temos

$$
\begin{aligned}
|J(u) - J(-u)| =& \left| \int_\Omega -P(x,u)dx - \psi(u)fu - \int_\Omega P(x,u) + \psi(-u)fudx \right| \\
=& \left| \int_\Omega (\psi(u) - \psi(-u))fudx \right| \\
=& (\psi(u) - \psi(-u)) \left| \int_\Omega fudx \right| \\
\leq& (\psi(u) + \psi(-u)) \left| \int_\Omega fudx \right|.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
|J(u) - J(-u)| \leq (\psi(u) + \psi(-u)) \left| \int_\Omega fudx \right|. \tag{3.15}
$$

Para estimar o lado direito de (3.15), utilizamos (3.14) e

$$
\psi(u) \left| \int_\Omega fudx \right| \leq \alpha_1 \psi(u)(|I(u)|^{1/\mu} + 1).
$$

Agora por (3.3) e (3.12),

$$
|I(u)| \leq |J(u)| + \left| \int_\Omega fudx \right|
$$

Portanto

$$
\psi(u) \left| \int_\Omega fudx \right| \leq \alpha_5 \psi(u) \left(|J(u)|^{1/\mu} + \left| \int_\Omega fudx \right|^{1/\mu} + 1 \right). \tag{3.16}
$$

Utilizando a desigualdade de Young, o termo f no lado direito da equação pode ser colocado no lado direito, resultando em

$$
\psi(u) \left| \int_\Omega fudx \right| \leq \alpha_6 (|J(u)|^{1/\mu} + 1). \tag{3.17}
$$

Combinando (3.17) com uma estimativa similar para o termo $\psi(-u)$, temos (3.13).

Para provar o item 3), é suficiente mostrar que se M_0 é suficientemente grande e u é um ponto crítico de J com $J(u) \geq M_0$, então

$$
Q(u)^{-1} \int_\Omega (P(x,u) + a_4)dx < 1. \tag{3.18}
$$

A definição de ψ implica então que $\psi(v) = 1$ para v numa vizinhança de u. Portanto $\psi'(u) = 0$ e portanto $J(u) = I(u)$, $J'(u) = I'(u)$, e isso implica prova o item 3).

Vamos mostrar que a desigualdade (3.18) é verdadeira. Pela definição de J temos

$$J'(u)u = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - up(x,u) - (\psi(u) + \psi'(u)u)fu)dx, \tag{3.19}$$

onde

$$\psi(u)'u = \chi'(\theta(u))Q(u)^{-2}\left[Q(u)\int_\Omega up(x,u)dx - (2A)^2\theta(u)I(u)I'(u)u\right] \tag{3.20}$$

e

$$\theta(u) = Q(u)^{-1}\int_\Omega (P(x,u) + a_4)dx \tag{3.21}$$

Reagrupando os termos em (3.19)-(3.20) obtemos

$$J'(u)u = (1+T_1(u))\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (1+T_2(u))\int_\Omega up(x,u)dx - (\psi(u)+T_1(u))\int_\Omega fudx, \tag{3.22}$$

onde

$$\begin{aligned} T_1(u) =& \chi'(\theta(u))(2A)^2 Q(u)^{-2} I(u)\int_\Omega fudx, \\ T_2(u) =& \chi'(\theta(u))Q(u)^{-1}\int_\Omega fudx + T_1(u). \end{aligned}$$

Considere

$$J(u) - \frac{1}{2(1+T_1(u))}J'(u)u. \tag{3.23}$$

Se $\psi(u) = 1$ e $T_1(u) = 0 = T_2(u)$, a equação (3.23) se reduz a

$$J(u) - \frac{1}{2(1+T_1(u))}J'(u)u = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u, \tag{3.24}$$

e assim

$$\int_\Omega (P(x,u) + a_4)dx \le A(I(u)^2 + 1)^{1/2}$$

Pela desigualdade em (3.9). Portanto (3.18) segue de (3.24). Como $0 \le \psi(u) \le 1$, se $T_1(u)$ e $T_2(u)$ são suficientemente pequenos, as estimativas na demonstração da Proposição 3.1.1 aplicadas a (3.23) nos levam a (3.9) com a constante A

substituída por uma constante da ordem de $2A$, e portanto a desigualdade em (3.18) é verdadeira.

Assim, temos que provar $T_1(u), T_2(u) \to 0$ quando $M_0 \to \infty$. Se $u \notin \operatorname{supp}\psi$, então $T_1(u) = 0 = T_2(u)$. Portanto vamos assumir que $u \in \operatorname{supp}\psi$. Pela definição de $T_2(u)$ e (3.14) temos

$$
\begin{aligned}
|T_1(u)| \leq & \left| \chi'(\theta(u)) 4A^2 \frac{1}{4A^2(I(u)^2+1)} I(u) \right| \left| \int_\Omega fudx \right| \\
\leq & |\chi'(\theta(u))| \frac{|I(u)|}{|(I(u)^2+1)|} \alpha_1 (|I(u)|^{1/\mu} + 1) \\
\leq & 4\alpha_1 (|I(u)|^{1/\mu}+1).|I(u)|^{-1}.
\end{aligned}
$$

Precisamos de uma estimativa relacionando $I(u)$ e $J(u)$ para $u \in \operatorname{supp}\psi$. Sabemos que

$$
I(u) \geq J(u) - \left| \int_\Omega fudx \right|.
$$

Portanto por 3.14

$$
I(u) + \alpha_1 |I(u)|^{1/\mu} \geq J(u) - \alpha_1 \geq M_0/2, \tag{3.25}
$$

para M_0 suficientemente grande. Se $I(u) \leq 0$, então (3.25) implica que

$$
\alpha_1^\nu/\nu + |I(u)|/\mu \geq M_0/2 + |I(u)|, \tag{3.26}
$$

onde $\nu^{-1} + \mu^{-1} = 1$. Porém, se supormos que $M_0 \geq 2\alpha_1^\nu \nu^{-1}$, então

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_1^\nu}{\nu} + \frac{|I(u)|}{\mu} \geq & \frac{M_0}{2} + |I(u)| \\
\geq & \frac{\alpha_1^\nu}{\nu} + |I(u)|,
\end{aligned}
$$

o que é um absurdo. Portanto $I(u) > 0$ e (3.25) implica que $I(u) \geq M_0/4$ ou $I(u) \geq (M_0/4\alpha_1)^\mu$. Em qualquer um dos dois casos, teremos que $I(u) \to \infty$ quando $M_0 \to 0$ e (3.25) mostra que $T_1(u) \to 0$ se $M_0 \to \infty$. Analogamente conseguimos estimativas que implicam que $T_2(u) \to 0$ quando $M_0 \to \infty$ e portanto 3) está provado.

Por último vamos provar 4). É suficiente provar que existe um $M_1 > M_0$ tal que se $(u_m) \subset E$, $M_1 \leq J(u_m) \leq K$, e $J'(um) \to 0$, então (u_m) é limitada. Para

m grande e qualquer $\rho > 0$,

$$
\begin{aligned}
\rho\|u_m\| \geq & J(u_m) - \rho J'(u_m)u_m \\
= & (\frac{1}{2} - \rho(1 + T_1(u_m)))\|u_m\|^2 \\
& + \rho(1 + T_2((u_m)) \int_\Omega u_m p(x, um)dx - \int_\Omega P(x, (u_m)dx \\
& + [\rho\psi((u_m) + T_1((u_m) - \psi((u_m)] \int_\Omega f u_m dx.
\end{aligned}
$$

Para M_1 suficientemente grande, e portanto T_1, T_2 pequenos, podemos escolher $\rho \in (\mu^{-1}, 2^{-1})$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$
\frac{1}{2(1 + T_1(u_m))} > \rho + \varepsilon > \rho - \varepsilon > \frac{1}{\mu(1 + T_2(u_m))} \tag{3.27}
$$

Portanto pelas estimativas acima, (3.27) e (p_4) temos

$$
\rho\|u_m\| + K \geq \frac{\varepsilon}{2}\|u_m\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\mu a_5 \rho \|u_m\|^\mu_{L^\mu(\Omega)} - \alpha_2 - \alpha_3\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.28}
$$

De fato observe que utilizando as desigualdades em (3.27) para o primeiro termo na soma temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2(1 + T_1(u_m))} > & \rho + \varepsilon \\
\frac{1}{2} - \rho(1 + T_1(u_m)) > & \varepsilon(1 + T_1(u_m)).
\end{aligned}
$$

Como $\varepsilon(1 + T_1(u_m)) \geq \varepsilon/2$, então

$$
\Big(\frac{1}{2} - \rho(1 + T_1(u_m))\Big))\|u_m\|^2 \geq \frac{\varepsilon}{2}\|u_m\|^2.
$$

Isso prova a primeira estimativa. Para o segundo termo na soma, observe que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(1 + T_2(u_m))} < & \rho - \varepsilon \\
\frac{1}{\mu} < & \rho(1 + T_2(u_m)) - \varepsilon(1 + T_2(u_m)),
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
\rho(1 + T_2(u_m) > & \frac{1}{\mu} + \varepsilon(1 + T_2(u_m))) \\
> & \frac{1}{\mu} + \varepsilon \\
> & \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Agora, utilizando a condição (p_4) na sequência (u_m) temos que

$$\frac{1}{\mu}(u_m p(x,u_m)+a_3)\geq a_5|u_m|^\mu$$

E portanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u_m p(x,u_m)+a_3)dx \geq& \mu a_5\int_\Omega |u_m|^\mu dx\\ =&\mu a_5\|u_m\|^\mu_{L^\mu(\Omega)}\end{aligned}$$

Utilizando as duas estimativas acima obtemos

$$\rho(1+T_2(u_m)\int_\Omega u_m p(x,u_m)dx\geq \frac{\varepsilon}{2}\mu a_5\|u_m\|^\mu_{L^\mu(\Omega)},$$

e isso prova a segunda estimativa em (3.28). A terceira segue diretamente do fato que $P(x,u_m)$ é integrável. Para provar a 4ª e última estimativa, observe que pela desigualdade de Schwarz

$$\int_\Omega f u_m dx\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_m\|_{L^2(\Omega)}\leq \alpha_3\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto

$$[\psi(u_m)-\rho\psi(u_m)-T_1(u_m)]\int_\Omega f u_m dx\leq \alpha_3\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e isso implica na quarta estimativa. Utilizando a desigualdade de Holder e de Young, a desigualdade (3.28)

$$\rho\|u_m\|+K\geq \frac{\varepsilon}{2}\|u_m\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\mu a_5\rho\|u_m\|^\mu_{L^\mu(\Omega)}-\alpha_2-\alpha_3\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

implica que (u_m) é limitada em E. Agora, pela Proposição (1.0.2) do Apêndice,

$$D^{-1}J'(u_m)=(1+T_1(u_m))u_m-P(u_m)$$

onde $D:E\to E^\star$ é o mapa de dualidade, P é um operador compacto e $|T_1(u_m)|\leq\frac{1}{2}$(Para M_1 grande). Portanto valem as condições de Palais-Smale, e isso conclui a prova de 4) e da Proposição (3.1.2).

□

3.2 Estimativas para o funcional auxiliar

Para concluir a prova do Teorema (3.0.1) vamos nos basear no terceiro item da Proposição (3.1.2) e provar que o funcional J possui uma sequência ilimitada de pontos críticos utilizando a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. Por conveniência, vamos enuncia-lo novamente

Teorema. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional par satisfazendo (PS), com $I(0) = 0$. Se $E = V \oplus X$, onde V é de dimensão finita, e I satisfaz*
(I_1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
(I_2) para cada subespaço de dimensão finita $\tilde{E} \subset E$, existe um $R = R(\tilde{E})$ tal que $I \leq 0$ em $\tilde{E} \backslash B_{R(\tilde{E})}$;
então I possui uma sequência não limitada de valores críticos.

Sejam $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ os autovalores de

$$\begin{aligned} -\Delta v =& \lambda v, \quad x \in \Omega, \\ v =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

e $v_1, v_2, \ldots$ as autofunções correspondentes normalizadas com $\|v_k\| = 1$. Seja $E_k = span\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $E_k^\perp$ o complemento ortogonal de E_k em E. Para provar a condição (I_2) para J, observe que por (p_4)

$$\begin{aligned} J(tu) =& \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega P(x, tu) dx - t \int_\Omega \psi(tu) f u dx \\ \leq& \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - t^\mu k_1 \int_\Omega |u|^\mu + k_2 |\Omega| - t \int_\Omega \psi(tu) f u dx \to -\infty \end{aligned}$$

quando $t \to \infty$. Portanto existe um $R_k > 0$ tal que $J(u) \leq 0$ se $u \in E_k \backslash B_{R_k}$, e isso prova a condição (I_2).
Defina $D_k := B_{R_k} \cap E_k$ e

$$\Gamma_k := \{h \in C(D_k, E) | h \text{ é ímpar e } h(u) = u \text{ se } u \in \partial B_{R_k} \cap E_k\}.$$

Defina também

$$b_k := \inf_{h \in \Gamma_k} \max_{u \in D_k} J(h(u)); \quad j \in \mathbb{N} \tag{3.29}$$

Esta sequência de valores minimax em geral não vai ser uma sequência de valores críticos para J, a menos do caso em que $f \equiv 0$. Porém, vamos utilizá-los como um argumento de comparação para provar que J possui uma sequência ilimitada de valores críticos. Em primeiro lugar, vamos obter cotas inferiores para b_k.

Proposição 3.2.1. *Existe uma constante β_2 e $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq \tilde{k}$ vale*

$$b_k \geq \beta_2 k^{\beta},$$

onde $\beta = \frac{(n+2)-(n-2)s}{n(s-1)}$ como no Teorema (3.0.1).

Demonstração. Seja $h \in \Gamma_k$ e $\rho < R_k$. Pela Proposição 2.2.2, existe um $w \in h(D_k) \cap \partial B_\rho \cap E_{k-1}^{\perp}$ e portanto

$$\max_{u \in D_k} J(h(u)) \geq J(w) \geq \inf_{u \in B_\rho \cap E_{k-1}^{\perp}} J(u). \tag{3.30}$$

Queremos obter uma cota inferior para o lado direito de (3.30). Seja $u \in B_\rho \cap E_{k-1}^{\perp}$. Então por (p_2) temos que

$$\int_\Omega |P(x,u)|dx \leq \int_\Omega (a_1|u| + a_2|u|^{s+1})dx \leq a_2\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^{s+1} + c_1\|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.31}$$

Utilizando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg obtemos

$$\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)} \leq a_7\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)^a \Big(\int_\Omega u^2 dx\Big)^{1-a} = a_7\|u\|^a\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-a}, \tag{3.32}$$

para todo $u \in E$ onde $2a = n(s-1)(s+1)^{-1}$. Além disso, se $u \in E_{k-1}^{\perp}$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_k^{-1/2}\|u\|. \tag{3.33}$$

Utilizando as estimativas (3.32) e (3.33) temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^{s+1} \leq & a_7\|u\|^{a(s+1)}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{(1-a)(s+1)} \\
\leq & a_7\|u\|^{a(s+1)}\lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)}\|u\|^{(1-a)(s+1)} \\
= & a_7\lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)}\|u\|^{s+1} \\
= & a_7\lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)}\rho^{s+1}.
\end{aligned}$$

Pela definição de J temos que

$$J(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u) - \psi(u)f(x)u\Big)dx. \tag{3.34}$$

Substituindo as estimativas (3.31)(3.32)(3.33) em (3.34) temos

$$\begin{aligned}
J(u) \geq & \frac{1}{2}\rho^2 - c_1\|u\|_{L^2(\Omega)} - a_2\|u\|^{s+1}_{L^{s+1}(\Omega)} - \alpha_2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
\geq & \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{c_1}{\lambda_k}\rho^2 - a_2 a_7 \lambda_k^{-(1/2)(1-a)(s+1)}\rho^{s+1} - \alpha_2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\lambda_k^{-1/2}\rho.
\end{aligned}$$

Escolha k_0 suficientemente grande tal que $4\alpha_2 \leq \lambda_k$ e $\rho = \rho_k$ tal que

$$\rho_k = \frac{1}{8}\lambda^{((1-a)/2)((s+1)/(s-1))}$$

para todo $k \geq k_0$. Portanto

$$\begin{aligned}
J(u) \geq & \frac{1}{2}\rho_k^2 - \frac{1}{4}\rho_k^2 - a_2 a_7 \lambda_k^{-(1-a)(s+1)/2}\rho_k^{s+1} - \alpha_2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\lambda_k^{-1/2}\rho_k \\
= & \rho_k^2\Big(\frac{1}{2} - a_2 a_7 \lambda_k^{-(1-a)(s+1)/2}\rho_k^{s-1} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\lambda_k^{-1/2}\rho_k^{-1}\Big) - \alpha_2.
\end{aligned}$$

Escolhendo ρ_k de tal forma que o coeficiente de ρ_k^2 seja $1/4$ temos

$$J(u) \geq \frac{1}{4}\rho_k^2 - \alpha_2$$

Utilizando o fato que a distribuição dos autovalores $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ é tal que

$$\lambda_k \geq \alpha_5 k^{2/n}$$

onde α_5 é independente de k, e que $1 - a = \frac{2(s+1)-n(s-1)}{2(s+1)}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\rho_k^2 = & \frac{1}{8^2}\lambda_k^{(1-a)(s+1)/(s-1)} \\
\geq & \alpha_5 k^{\frac{2}{n}\frac{(1-a)(s+1)}{s-1}} \\
= & \alpha_5 k^{\frac{2(s+1)-n(s-1)}{n(s-1))}} \\
= & \alpha_5 k^{\frac{(n+2-s(n-2))}{(n(s-1))}} \\
= & \alpha_5 k^{\beta}.
\end{aligned}$$

Escolhendo k de tal forma que $\frac{1}{4}\rho^2 > 2\alpha_2$, obtemos

$$J(u) \geq \frac{1}{4}\rho^2 \geq \alpha_5 k^{\beta},$$

e portanto

$$b_k = \inf_{h\in\Gamma_k}\max_{u\in D_k} J(h(u)) \geq \inf_{u\in B_\rho\cap E_{k-1}^{\perp}} J(u) \geq \alpha_5 k^{\beta}.$$

Isso completa a prova da proposição.

$\square$

3.3 Uma sequência minimax de valores críticos

Para obter valores críticos de J a partir da sequência (b_k), um outro conjunto de valores minimax deve ser introduzido. Defina

$$U_k := \{u = tv_{k+1} + w | t \in [0, R_{k+1}], w \in B_{R_{k+1}} \cap E_k, \|u\| \leq R_{k+1}\}$$

e

$$\Lambda_k := \{H \in C(U_k, E) | H|_{D_k} \in \Gamma_k \text{ e } H(u) = u \text{ se } u \in Q_k = (\partial B_{R_{k+1}} \cap E_{k+1}) \cup (B_{R_{k+1}} \backslash B_{R_k} \cap E_k)\}.$$

Por último, definimos os valores de minimax

$$c_k := \inf_{H \in \Lambda_k} \max_{u \in U_k} J(H(u)) \tag{3.35}$$

Comparando a definição de c_k com b_k em (3.29), vemos que $c_k \geq b_k$.

Proposição 3.3.1. *Assuma que $c_k > b_k \geq M_1$. Para $\delta \in (0, c_k - b_k)$, defina*

$$\Lambda_k(\delta) := \{H \in \Lambda_k | J(H(u)) \leq b_k + \delta \text{ se } u \in D_k\}$$

e

$$c_k(\delta) = \inf_{H \in \Lambda_k(\delta)} \max_{u \in U_k} J(H(u)).$$

Nessas condições $c_k(\delta)$ é um valor crítico de J.

Demonstração. A definição de $\Lambda_k(\delta)$ implica que este conjunto é não-vazio. Como $\Lambda_k(\delta) \subset \Lambda_k$, temo que $c_k(\delta) \geq c_k$. Vamos supor que $c_k(\delta)$ não é um valor crítico de J. Defina $\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(c_k - b_k - \delta)$. Assim, $\overline{\varepsilon} > 0$ e vamos aplicar o Lema da Deformação. Escolha $H \in \Lambda_k(\delta)$ tal que

$$\max_{u \in U_k} J(H(u)) \leq c_k(\delta) + \varepsilon \tag{3.36}$$

Considere $\eta(1, H(\cdot)) \in C(U_k, E)$. Observe que se $\|u\| = R_{k+1}$ ou $u \in B_{R_{k+1}} \backslash B_{R_k} \cap E_k$, $J(H(u)) = J(u) \leq 0$ e portanto $\eta(1, H(u)) = u$ em Q_k pelo Lema da Deformação(pois podemos assumir $b_k \geq M_1 > 0$ e portanto $c_k(\delta) \geq c_k > b_k$). Portanto $\eta(1, H(\cdot)) \in \Lambda_k$. Como $H \in \Lambda_k(\delta)$, se $u \in D_k$,

$$J(H(u)) \leq b_k + \varepsilon \leq c_k - \overline{\varepsilon} \leq c_k(\delta) - \overline{\varepsilon}$$

pela escolha $\bar{\varepsilon}$. Assim $\eta(1, H) = H \leq b_k + \delta$ em D_k pelo item (1) do Lema da Deformação e portanto $\eta(1, H(\cdot)) \in \Lambda_k(\delta)$. Pelo item (2) do Lema da Deformação e pela equação (3.36) temos

$$\max_{u \in U_k} J(\eta(1, H(u))) \leq c_k(\delta) - \varepsilon$$

o que é uma contradição pela definição de $c_k(\delta)$. Isso encerra a demonstração. $\square$

De posse da sequência de valores críticos para J, estamos próximos da prova do Teorema 3.0.1. Se $c_k > b_k$ para uma sequência de $k's \to \infty$, pelas Proposições (3.2.1) e (3.3.1) temos que $c_k > b_k \geq \beta_2 k^{\beta}$ $\forall k \geq \tilde{k}$. Assim J possui uma sequência ilimitada de valores críticos, e a prova está completa. Resta provar que para todo k suficientemente grande, $c_k = b_k$ é um absurdo.

Proposição 3.3.2. *Se $c_k = b_k$ para todo $k \geq k^*$, existe uma constante $\omega > 0$ e $\hat{k} \geq k^*$ tal que*

$$b_k \leq \omega k^{\mu/\mu - 1} \tag{3.37}$$

para todo $k \geq \hat{k}$.

Demonstração. Tome $\varepsilon > 0$ e $k \geq k^*$. Escolha $H \in \Lambda_k$ tal que

$$\max_{u \in U_k} J(H(u)) \leq b_k + \varepsilon. \tag{3.38}$$

Como $D_{k+1} = U_k \cup (-U_k)$, podemos extender H continuamente para D_{k+1} como uma função ímpar. De fato, seja

$$\widehat{H}(u) = \begin{cases} H(u) & \text{se } u \in U_k \\ -H(u) & \text{se } u \in -U_k \end{cases}$$

Como $H|_{B_{R_{k+1}} \cap E_k}$ é uma função ímpar, $\widehat{H}$ está bem definida e $\hat{H} \in \Gamma_{k+1}$. Portanto

$$\inf_{h \in \Gamma_k} \max_{u \in D_{k+1}} J(h(u)) = b_{k+1} \leq \max_{D_{k+1}} J(\hat{H}(u)) = J(H(w)) \tag{3.39}$$

para algum $w \in D_{k+1}$. Se $w \in U_k$, por (3.38) e (3.39),

$$J(H(w)) \leq b_k + \varepsilon. \tag{3.40}$$

Suponha que $w \in -U_k$. Como $b_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, temos por (3.38) e (3.13),

$$|J(u) - J(-u)| \leq \beta_1(|J(u)|^{1/\mu} + 1),$$

o que implica $J(-H(w)) > 0$ se $k \geq k^*$ é suficientemente grande. Utilizando novamente (3.13) e o fato de H ser ímpar, isto é, $J(H(w)) = J(-H(-w))$, temos que,

$$J(H(w)) - J(H(-w)) \leq \beta_1(|J(H(-w))|^{1/\mu} + 1),$$

e portanto

$$\begin{aligned} J(H(w)) \leq & J(H(-w)) + \beta_1(|J(H(-w))|^{1/\mu} + 1 \\ \leq & b_k + \varepsilon + \beta_1((b_k + \varepsilon)^{1/\mu} + 1). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Combinando (3.39)-(3.41) temos

$$b_{k+1} \leq b_k + \varepsilon + \beta_1((b_k + \varepsilon)^{1/\mu} + 1). \tag{3.42}$$

Como ε é arbitrário, (3.42) implica

$$b_{k+1} \leq b_k + \beta_1((b_k)^{1/\mu} + 1) \tag{3.43}$$

para todo $k \geq k^*$.

Resta agora mostrar que (3.43) implica em (3.37). Vamos concluir a prova utilizando um processo de indução finita. Suponhamos que (3.37) seja válida para todo $k \in [\hat{k}, j] \cap \mathbb{N}$. Vamos provar que também vale para $j + 1$. Sem perda de generalidade vamos assumir que $j \geq 2\hat{k}$ e

$$\omega \geq \max_{0 \leq l \leq \hat{k}} \frac{b_{\hat{k}+l}}{(\hat{k} + l)^{\mu/\mu+1}}.$$

Por (3.43) temos

$$\begin{aligned} b_{j+1} \leq & b_j + \beta_1((b_j)^{1/\mu} + 1) \leq b_j + \beta_1(\omega j^{\mu/\mu-1})^{1/\mu} + 1) \\ \leq & b_{\hat{k}} + \beta_1 \sum_{l=\hat{k}}^{j} (\omega^{1/\mu} l^{1/\mu-1} + 1) \\ \leq & b_{\hat{k}} + \beta_1(j - \hat{k} + 1) + \beta_1 \omega^{1/\mu} \sum_{l=\hat{k}}^{j} l^{1/\mu-1}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Nós precisamos provar que o lado direito de (3.44) é limitado por $\omega(j+1)^{\mu/\mu-1}$. Observe que

$$\sum_{l=\hat{k}}^{j} l^{1/\mu-1} \leq \int_{\hat{k}}^{j} x^{1/\mu-1} dx = \frac{\mu-1}{\mu} x^{\mu/\mu-1} \Big|_{\hat{k}}^{j} \leq \frac{\mu-1}{\mu} j^{\mu/\mu-1}. \tag{3.45}$$

Comparando (3.44) e (3.45), vemos que para obter (3.37) para $j+1$, é suficiente que ω satisfaça as seguintes condições

i. $b_{\hat{k}} \leq \omega(1-2\delta)(j+1)^{\mu/\mu-1}$

ii. $\beta_1 \leq \omega\delta$

iii. $\beta_1 \omega^{1/\mu} \frac{\mu}{\mu-1} \leq \omega\delta$

para algum $\delta \in (0,1)$. Como $j \geq 2\hat{k}$, o item (i) é válido se

$$1 \leq (1-2\delta)2^{\mu/\mu-1},$$

o que é satisfeito para δ numa vizinhança de 0. Com δ fixado, os itens (ii) e (iii) são verdadeiros se ω é suficientemente grande. Para concluir a prova, observe que utilizando (3.45)

$$\begin{aligned} b_{j+1} \leq & b_{\hat{k}} + \beta_1(j-\hat{k}+1) + \beta_1 \omega^{1/\mu} \sum_{l=\hat{k}}^{j} l^{1/\mu-1} \\ \leq & b_{\hat{k}} + \beta_1(j-\hat{k}+1) + \beta_1 \omega^{1/\mu} \frac{\mu}{\mu-1} j^{\mu/\mu-1}. \end{aligned}$$

Utilizando as condições acima, temos

$$\begin{aligned} b_{j+1} \leq & \omega(1-2\delta)(j+1)^{\mu/\mu-1} + \omega\delta(j-\hat{k}+1) + \omega\delta(j+1)^{\mu/\mu-1} \\ = & \omega(1-\delta)(j+1)^{\mu/\mu-1} + \omega\delta(j-\hat{k}+1). \end{aligned}$$

Como δ é arbitrário, isso implica que

$$b_{j+1} \leq \omega(j+1)^{\mu/\mu-1}.$$

Isso a prova a indução $j+1$ e conclui a prova da proposição. □

Comparando (3.37) com a Proposição 3.2.1 e com (3.4), obtemos que

$$\beta_2 k^{\beta} \leq b_k \leq \omega k^{\mu/\mu-1},$$

onde $\omega, \beta_2 > 0$. Isso é uma contradição pela definição de β e isso conclui a prova do Teorema 3.0.1.

Considerações Finais

Vamos mencionar alguns resultados que melhoram o Teorema (3.0.1). Se $f(x)$ no problema

$$\begin{aligned} -\Delta u =& p(x,u) + f(x), \quad x \in \Omega, \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

for substituída por $f(x,u)$ onde

$$|f(x,u)| \leq \beta_1 + \beta_2|\xi|^\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq \mu - 1, \tag{3.46}$$

e supormos uma condição mais forte para (3.4), da ordem de

$$\frac{(n+2)-(n-2s)}{n(s-1)} > \frac{\mu}{\mu - (\sigma+1)}, \tag{3.47}$$

então uma variação dos argumentos feitos no Capítulo 3 nos dá uma versão do Teorema (3.0.1) para este caso. Mais detalhes deste caso estão contidos em [13]. Outra questão interessante é se o Teorema (3.0.1) continua válido sem a presença da hipótese (3.4). Em [2], Bahri obteve uma resposta parcial onde ele provou que para o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u =& |u|^{s-1}u + f(x), \quad x \in \Omega \\ u =& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde $s < (n+2)(n-2)^{-1}$, existe um conjunto denso de f no espaço $W^{-1,2}(\Omega)$ em que o problema possui um número infinito de soluções fracas distintas. Finalmente, em [3], Bahri e P.L. Lions melhoraram o valor de s em (3.4) para $s < n(n-2)^{-1}$.

Apêndice A

Resultados importantes

Definição 1.0.1 (Palais-Smale). *Se E for um espaço de Banach, dizemos que uma sequência $u_m \subset E$ satisfaz a condição de Palais-Smale (a qual vamos denotar por (PS)) para um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ se $I(u_m)$ é limitada e $I'(u_m) \to 0$, quando $m \to \infty$, implicam que u_m possui uma subsequência convergente. Dizemos que $u_m \subset E$ satisfaz a condição de Palais-Smale localmente (a qual vamos denotar por $(PS)_{loc}$) se existe $\delta > 0$ tal que $|I(u_n) - c| < \delta$ e $I'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$ implicam que u_n possui uma subsequência convergente.*

Teorema 1.0.1 (Teorema da Deformação). *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Se $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$, e $\mathcal{O}$ uma vizinhança de K_c, então existe $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que*

1. *$\eta(0, u) = u$ para todo $u \in E$.*
2. *$\eta(t, u) = u$ para todo $t \in [0,1]$ se $I(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$.*
3. *$\eta(t, u) = u$ é um homeomorfismo de E em E para cada $t \in [0,1]$.*
4. *$\|\eta(t, u) - u\| \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$ e $u \in E$.*
5. *$I(\eta(t, u)) \leq I(u)$ para todo $t \in [0,1]$ e $u \in E$.*
6. *$\eta(1, A_{c+\varepsilon} \backslash \mathcal{O}) \subset A_{c-\varepsilon}$.*
7. *Se $K_c = \emptyset$, então $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.*
8. *Se $I(u)$ é um funcional par em u, então $\eta(t, u)$ é ímpar em u.*

Demonstração. Ver [12]. □

Proposição 1.0.1. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ cujo bordo é uma superfície diferenciável. Vamos supor que:*
(p_1) $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
(p_2) *Existem constantes $a_1, a_2 \geq 0$ tais que*

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$$

onde $0 \leq s < (n+2)(n-2)^{-1}$ se $n > 2$. Se

$$P(x,\xi) = \int_0^{\xi} p(x,t)dt$$

e

$$I(u) = \int_{\Omega} \Big(|\nabla u|^2 - P(x,u)\Big)dx,$$

então $I \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - p(x,u)\varphi)dx$$

para todo $\varphi \in E = W_0^{1,2}(\Omega)$. Além disso

$$J(u) = \int_{\Omega} P(x,u(x))dx$$

é um funcional fracamente contínuo e $J'(u)$ é compacto.

Demonstração. Ver [12]. □

Proposição 1.0.2. *Seja p uma função satisfazendo as condições $(p_1) - (p_2)$ e*

$$I(u) = \int_{\Omega} \Big(|\nabla u|^2 - P(x,u)\Big)dx.$$

Se (u_m) é uma sequência em $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $I'(u_m) \to 0$ quando $m \to \infty$, então u_m possui uma subsequência convergente.

Teorema 1.0.2 (Gagliardo-Nirenberg)**.** *Seja $1 \leq q \leq \infty$ e $j,k \in \mathbb{N}$, $j < k$. Assumindo uma das duas possibilidades*

$$\begin{cases} r = 1 \\ \frac{j}{k} \leq \theta \leq 1 \end{cases} \qquad ou \qquad \begin{cases} 1 < r < \infty \\ k - j - \frac{n}{r} = 0, 1, 2, \ldots, \\ \frac{j}{k} \leq \theta < 1 \end{cases}$$

e definirmos

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\Big(\frac{1}{r} - \frac{k}{n}\Big) + \frac{1-\theta}{q},$$

então existe uma constante C independente de u tal que

$$\|\nabla^j u\|_p = \| \leq C\|\nabla^k u\|_r^\theta \|u\|_q^{1-\theta} \quad \forall u \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap W^{k,r}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver [11]. $\square$

Bibliografia

[1] Ambrosetti A.; Rabinowitz, P. *Dual variational methods in critical point theory and apllications. Journal of Functional Analysis, v. 14, p. 349-381, 1973.*

[2] Bahri, A. *Topological results on a certain class of functionals and applications. Journal of Functional Analysis, v. 41, p. 397-427, 1981.*

[3] Bahri, A.; Lions P. L. *Remarks on the variational theory of critical points and applications. C. R. Acad. Sci. Paris Sér, v. 301, p. 145-148, 1985.*

[4] Brezis, H., *Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext, Springer, New York, 2011.*

[5] Coffman, V. C, *A minimum-maximum principle for a class of nonlinear integral equations. J. Analyse Math, v. 22, p. 391-419, 1969.*

[6] Dugundji, J., *Topology. Allyn and Bacon, Boston, 1965.*

[7] Evans, L., *Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 1988.*

[8] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problemes elliptiques. Springer, Heidelberg, 1983.*

[9] Krasnoselski, M. A, *Topological methods in theory of nonlinear integrable equations. Macmillan, New York, 1964.*

[10] Ljusternik, L.; Schnirelmann, L. *Methodes topologique dans les problémes variationnels. Hermann and Cie, Paris, 1934.*

[11] Nirenberg, L. *On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, v. 13, p. 115-162, 1959.*

[12] Rabinowitz, P., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1984.*

[13] Rabinowitz, P. *Multiple critical points of pertubed symmetric functionals. Transactions of the American Mathematical Society, v. 272, n. 2, p. 753-769., August. 1982.*

[14] Willem, M., *Minimax theorems. Birkhäuser, 1966.*