UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

EXAME DE SELEÇÃO

Candidato:

Data: 03/02/2017

LEIA COM ATENÇÃO

- Este exame possui 5 (cinco) questões e vale 10 (dez) pontos;
- A duração deste exame será de no máximo 180 (cento e oitenta) minutos ou 3 (três) horas;
- O exame deve ser realizado individualmente por cada candidato com caneta esferográfica azul ou preta e sem consulta bibliográfica;
- É proibido o empréstimo de materiais (tais como caneta, lápis, borracha, corretivo,...) durante a realização do exame;
- É proibido o uso de qualquer aparelho eletrônico durante a realização deste exame, incluindo celular, calculadora e notebook. Os mesmos devem estar desligados;
- Não é permitido o uso de folhas que não sejam as que já vêm grampeadas no exame. Não é permitido desgrampear as folhas do exame;
- O não cumprimento de qualquer um dos 5 (cinco) últimos itens anteriores implicará em nota 0 (zero).

Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística
Exame de Seleção em Análise Real

Candidato(a):

Data: 03/02/2017

1. Sejam $A \subset \mathbb{R}$. Uma função é dita limitada se $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o *supremo* de f, como sendo o *supremo* do conjunto $f(X)$:

   a) Mostre que o produto de duas funções limitadas é limitada.

   b) Mostre que $(f.g)(X) \subset f(X).g(X)$

   c) Conclua que, se forem ambas positivas,
   $$\sup(f.g) \leq \sup f. \sup g$$

2. Seja (a_n) uma sequencia de números reais:

   a) Se $a_n \to L$ e $L > M$, mostre então que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
   $$a_n > M, \forall n \geq n_0$$

   b) Se $a_n \to L$, mostre que $|a_n| \to |L|$. A recíproca é verdadeira? Justifique.

3. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos e suponha que
   $$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$$
   Prove que as séries convergem ou divergem simultaneamente.

4. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ contínua. Prove que f tem um ponto fixo, isto é, existe um $x \in [a, b]$, tal que $f(x) = x$. Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0, 1) \to [0, 1)$ sem ponto fixo.

5. Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

   a) Se $|f'(x)| \leq C, \forall x \in [a, b]$ e $C > 0$, mostre que f é uniformemente contínua.

   b) Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$, mostre que F é uniformemente contínua.