

Universidade Federal do Pará  
Instituto de Ciências Exatas e Naturais – ICEN  
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística – PPGME  
Exame de Seleção de Mestrado 2019.2 (Probabilidade) – Tipo B

**Instruções:**

1. O Exame é estritamente individual e sem consulta;
2. Não é permitido empréstimo de material entre os candidatos;
3. O aparelho celular deve permanecer desligado durante o exame;
4. É permitido o uso de máquina de calcular;
5. Usar caneta esferográfica azul ou preta;
6. Assinale apenas **UMA** opção para cada questão;
7. Evite **RASURAS** em cada questão;
8. **SÓ SERÃO CONSIDERADAS AS RESPOSTAS ASSINALADAS NO QUADRO ABAIXO:**

Questão	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

**Nome:**

---

- 1) (1,0 ponto) Se  $f(x, y) = \frac{1}{8} (x + y)$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , é a função densidade conjunta das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ . É correto afirmar que:
- A)  $X$  e  $Y$  são variáveis independentes.
  - B)  $X$  e  $Y$  são variáveis identicamente distribuídas, ambas com valor esperado igual a  $\frac{1}{8}$ .
  - C)  $X$  e  $Y$  são variáveis identicamente distribuídas, ambas com variância igual a  $\frac{10}{6}$ .
  - D) O coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$  é igual a  $-\frac{1}{11}$ .
  - E)  $P(X > Y) = 0,25$ .
- 2) (1,2 ponto) João foi submetido a um teste de laboratório para o diagnóstico de uma doença rara. A probabilidade dessa doença se desenvolver em um indivíduo como o João é igual a 0,001. Sabe-se que esse teste pode resultar em “falso positivo”, ou seja, indicar que João possui essa doença, quando na verdade ele não a tem. Ou, o teste pode resultar em “falso negativo”, isto é indicar que João não possui a doença, quando na verdade ele está doente. A probabilidade de o teste resultar em “falso positivo” é igual a 0,05 e a probabilidade de o teste resultar em “falso negativo” é igual a 0,02. Assinale a alternativa correta:
- A) Se qualquer indivíduo como João submeter-se ao teste, então a probabilidade de o teste produzir um resultado negativo é superior a 0,98.
  - B) Se o teste ao qual João foi submetido der resultado positivo, então a probabilidade de ele estar de fato com a doença é inferior a 0,02.
  - C) Se qualquer indivíduo como João submeter-se ao teste, então a probabilidade de o teste produzir um resultado positivo é superior a 0,08.
  - D) Se o teste ao qual João foi submetido der resultado positivo, então a probabilidade de ele não estar com a doença é inferior a 0,08.
  - E) Se o João não tiver a doença, então a probabilidade de o teste acertar o diagnóstico é superior a 0,98.
- 3) (0,5 ponto) Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes, com  $X \sim \text{Binomial}(n, p_1)$  e  $Y \sim \text{Binomial}(n, p_2)$ . O valor esperado e a variância de  $X + Y$  são, respectivamente:
- A)  $E(X + Y) = n^2 + p_1 p_2$  e  $\text{Var}(X + Y) = n(2 - p_1 - p_2)$ .
  - B)  $E(X + Y) = n(p_1 - p_2)$  e  $\text{Var}(X + Y) = n(2 - p_1 - p_2)$ .
  - C)  $E(X + Y) = n(p_1 + p_2)$  e  $\text{Var}(X + Y) = n(p_1 - p_2 - (p_1^2 - p_2^2))$ .
  - D)  $E(X + Y) = n(p_1 + p_2)$  e  $\text{Var}(X + Y) = n(p_1 + p_2 - (p_1^2 + p_2^2))$ .
  - E)  $E(X + Y) = n^2 p_1 p_2$  e  $\text{Var}(X + Y) = n p_1 p_2 (p_1 + p_2)$ .
- 4) (1,0 ponto) Uma empresa realiza um processo interno para seleção de um funcionário que irá ocupar um cargo de chefia. Só poderão participar da seleção os funcionários de 3 setores da empresa, setor A, setor B e setor C, que correspondem a 20%, 35% e 45% dos funcionários aptos ao processo seletivo, respectivamente. Sabe-se, também, que a proporção de funcionários com nível superior nos setores A, B e C, é 40%, 50% e 70%, respectivamente. Se o funcionário selecionado para o cargo de chefia tem nível superior, qual a probabilidade dele ser do setor B?

- A) 0,175      B) 0,615      C) 0,307      D) 0,570      E) 0,107

5) (1,5 ponto) Seja  $f(x, y) = 6(1 - x - y)$ ,  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1 - x$ , a função densidade conjunta das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ . É correto afirmar que:

- A) A função densidade marginal da variável aleatória  $X$  é  $f(x) = (x - 1)^2$ ,  $0 < x < 1$ .  
 B) A função densidade condicional de  $X|Y$  é  $f(x|y) = \frac{(1-x-y)}{(1-y)^2}$ ,  $0 < x < 1$ .  
 C) A função densidade condicional de  $Y|X$  é  $f(y|x) = \frac{2(1-y)}{(1-x)^2}$ ,  $0 < y < 1 - x$ .  
 D) O valor esperado da variável aleatória  $X$  é igual a 0,25.  
 E) O valor esperado condicional de  $X|Y$  é  $E(X|Y = y) = \frac{1-y}{3}$ .

6) (1,0 ponto) O tempo (em horas) gasto na fabricação de uma peça é uma variável aleatória  $T$ , com função densidade dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t/4}}{4}, & t > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e seja  $C$  o custo para se produzir uma dessas peças. Suponha que o preço de venda de uma peça é uma variável aleatória  $X$  dada por

$$X = \begin{cases} p_1, & \text{se } T < 2 \\ p_2, & 2 \leq T < 3 \\ p_3, & \text{se } T \geq 3 \end{cases}$$

O lucro esperado por peça é:

- A)  $\frac{p_1+p_2+p_3}{4} - C$ .  
 B)  $p_1e^{-2/4} + p_2e^{-5/4} + p_3e^{-3/4} - C$ .  
 C)  $p_1 + (p_2 - p_1)e^{-2/4} + (p_3 - p_2)e^{-3/4} - C$ .  
 D)  $\frac{(p_1+p_2+p_3)C}{4} - Ce^{-2/4}$ .  
 E)  $2p_1e^{-2/4} + p_2e^{-5/4} + 3p_3e^{-3/4} - C$ .

7) (0,8 ponto) Considere que duas bolas tenham sido selecionadas aleatoriamente, e sem reposição, de uma urna contendo 10 bolas numeradas de 1 a 10. Se a soma dos números das bolas selecionadas é um número par, a probabilidade de ambos os números serem ímpares é:

- A) 0,50      B) 0,22      C) 0,44      D) 0,65      E) 0,78

8) (1,0 ponto) Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias com variâncias  $Var(X) = 4$  e  $Var(Y) = 9$ , respectivamente, e com coeficiente de correlação igual a  $\rho(X, Y) = -\frac{1}{3}$ . Se  $Z = 2X - Y$ , a  $Var(Z)$  é dada por:

- A) 7      B) 33      C) 17      D) 25      E) 75

9) (1,2 ponto) O comprimento  $X$  de uma peça usada na fabricação de navios é uma variável aleatória cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-0,25 x^2), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Assinale a alternativa correta:

- A) A função densidade de probabilidade de  $X$  é  $f(x) = x \exp(-0,25 x^2)$ ,  $x \geq 0$ .  
 B)  $P(X \leq 2) = 0,37$ .  
 C) O valor esperado e a variância da variável aleatória  $W = \exp(-0,25 X^2)$  são, respectivamente, iguais a  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{12}$ .  
 D) A variável aleatória  $Y = \sqrt{X}$  tem distribuição Exponencial.  
 E) O valor esperado da variável aleatória  $X$  é  $\sqrt{\pi} + 2$ .

10) (0,8 ponto) A distribuição conjunta das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é dada na tabela abaixo.

	Y	-1	0	1
X	-1	1/4	1/8	1/8
	1	1/8	1/8	1/4

A  $Var(-2X + 2Y)$  é dada por:

- A)  $\frac{14}{8}$       B) 7      C)  $\frac{6}{8}$       D)  $\frac{3}{8}$       E) 5