UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
EXAME DE SELEÇÃO - MATEMÁTICA - 2019

Candidato:

Data: 06/02/2019

INSTRUÇÕES

1. Resolva as 05 (cinco) questões apresentadas.

2. O exame iniciará às 8h30 e terminará às 11h30. Alunos com deficiência visual terão uma hora a mais para fazer o exame, ou seja, seu horário de exame será de 8h30 às 12h30;

3. O exame deve ser realizado individualmente por cada candidato com caneta esferográfica azul ou preta e sem consulta a qualquer tipo de material que não seja o fornecido no exame;

4. É proibido o empréstimo de materiais (tais como caneta, lápis, borracha, corretivo, dentre outros) durante a realização do exame;

5. É proibido o uso de qualquer aparelho eletrônico durante a realização deste exame, incluindo celular, calculadora e notebook. Os mesmos devem estar desligados;

6. Caso o candidato(a) necessite uso de banheiro, o mesmo(a) deve dirigir-se a um fiscal volante, permanecendo em silêncio no trajeto de ida e volta;

AS 05 (CINCO) QUESTÕES:

1. (**Critério de Cauchy para sucessões numéricas**)

   Mostre que toda sucessão (a_n) é convergente se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para $m, n > n_0$.

2. Mostre que se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ converge, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1 + a_n^2}$ converge. Se a primeira divergir, mostre que a segunda pode convergir ou divergir.

3. Seja φ uma função com $\varphi(0) = 0$ e φ' crescente em $(0, +\infty)$. Prove que a função $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ também é crescente em $(0, +\infty)$.

4. Suponha que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convirja para $|x| < r$. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge absolutamente para todo $|x| < r$. Sendo $S(x)$ a soma dessa série, mostre que $S(x)$ é uma função derivável em $|x| < r$ e $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

5. Mostre que a parte positiva f^+ de uma função integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$. Em seguida, mostre que o valor absoluto $|f|$, dessa função integrável f, também é integrável em $[a, b]$.