UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

II EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE CÁLCULO AVANÇADO

Aluno (a): ____

Matrícula: ______________________

Data: 05/12/2016

ATENÇÃO!!!

a) **A prova é estritamente individual e sem consulta;**
b) **Não será permitido o uso de material entre os candidatos;**
c) **Não será permitido o uso de aparelho celular durante a prova;**
d) **Usar caneta esferográfica na cor preta ou azul;**
e) **A prova terá a duração de 02 (duas) horas.**

Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

II Exame de Qualificação de Cálculo Avançado(Mestrado)

Nome do Aluno(a):

Matrícula:

Data: 05/12/2016

INSTRUÇÕES PARA A PROVA

- A prova é constituída por 5 (cinco) questões valendo 2 (dois) pontos cada totalizando 10 (dez) pontos;
- A duração da prova será de no máximo 2 (duas) horas;
- A prova deve ser realizada individualmente com caneta esferográfica azul ou preta e sem consulta bibliográfica;
- Não é permitido destacar folhas do caderno de questões;
- Não é permitido o uso de papel que não seja o fornecido na prova.
- Justifique todas as suas respostas.

Boa Prova.

1) (2,0 pts) Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e conexo e $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua.

a) (0,5 pt)Prove que $\phi : K \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dada por $\phi = (x, f(x))$ é contínua.

b) (0,75 pt)Prove que o conjunto $graf(f) = \{(x, f(x)); x \in K\}$ é conexo e compacto.

c) (0,75 pt)Considere $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto que pertence a imagem de f. Prove que a imagem inversa $f^{-1}(p)$ não é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

2) (2,0 pts) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^2$ dados por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Prove que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq \langle gradf(0,0), v\rangle$. Justifique.

3) (2,0 pts) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável. Defina $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ por $F(x,y) = f(5x - y)$.

(a) Mostre que F é uma função diferenciável

(b) Usando a definição de derivada direcional calcule $\dfrac{\partial F}{\partial v}(x_0, y_0)$ em termos de f onde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $v = (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

4) (2,0 pts) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ax + by$ com $a^2 + b^2 \neq 0$.Utilize o Método dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos da restrição $f|M$, onde $M = \varphi^{-1}(1)$ sendo $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$.

5) (2,0 pts) Suponha $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se para algum $a \in U$ a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetiva prove que existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $B(a,\delta) \subset U$ e para quaisquer $x, y \in B(a,\delta)$ temos $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$.