

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
I EXAME DE QUALIFICAÇÃO  
CÁLCULO AVANÇADO

Aluno:

Data: 06/08/2018

A prova é constituída de 5 (cinco) questões valendo 2(dois) pontos cada totalizando 10 (dez) pontos;

A prova deverá ser realizada com caneta esferográfica azul ou preta;

Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos durante a realização da prova;

Somente serão consideradas as questões devidamente justificadas;

Não é permitido destacar folhas do caderno de questões.

1.(2,0 pts) Classifique cada uma das sentenças abaixo como verdadeira ou falsa. Justifique cada uma das alternativas.

(a) ( ) Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tem-se  $\|x\|_M \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M$ .

(b) ( ) Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um caminho diferenciável tal que  $\|f(t)\| = c$  ( $c$  constante) então  $f(t)$  é perpendicular a  $f'(t)$ .

(c) ( ) Para quaisquer  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  vale  $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ .

(d) ( ) A interseção de infinitos abertos é ainda um conjunto aberto.

2.(2,0 pts) Sejam  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  caminhos diferenciáveis em  $t_0 \in I$ . Prove que a função  $\langle f, g \rangle$  é diferenciável em  $t_0$  e vale  $\langle f, g \rangle'(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0) \rangle + \langle f(t_0), g'(t_0) \rangle$ .

3.(2,0 pts) Prove que toda função  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  é diferenciável onde  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto.

4. (2,0 pts) Prove que a aplicação  $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $S(x, y) = x + y$  é diferenciável e calcule sua derivada.

5. (2,0 pts) Defina soma inferior e superior de uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  relativa a uma partição  $P$ , onde  $A$  é um bloco  $n$ -dimensional, e mostre que  $s(f, P) \leq S(f, P)$ .